

MAREK BRODZKI

Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Ogólnej

PEWNE ZAGADNIENIA TEORETYCZNE ZWIĄZANE Z TRANSPORTEM
CIECZY ZA POMOCĄ POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO
CZ.II. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ KONKRETYCH MODELI

Streszczenie. W artykule tym zostało rozwiązane zagadnienie wyznaczenia rozkładu pola magnetycznego oraz prędkości i ciśnienia cieczy przewodzącej prąd elektryczny dla dwóch modeli: rury o przekroju kołowym z "postępowym" polem wirującym wzbudzonym powierzchniowym "okładem prądowym" oraz rury o przekroju prostokątnym z polem stałym (względem czasu). W obu przypadkach są one całkowicie wypełnione cieczą nieściśliwą i umieszczone w jednorodnym polu grawitacyjnym. Jest to dokonane dla małych prędkości cieczy (w porównaniu z prędkością pola wirującego w pierwszym przypadku) oraz o granicznych dodatkowo laminarnością ruchu. Wyłączona została z rozważań warstwa przyścienna o dużych gradientach prędkości, gdzie niezbędnym jest uwzględnienie lepkości cieczy.

Oprócz tego rozpatrzony jest problem transportu ciepła, przy założeniu jednowymiarowej ryny przewodzącej, gdzie uwzględniono przewodzenie bądź promieniowanie ciepła na zewnątrz, a pominięto niewielkie przewodzenie wzdłuż ryny. (Uwzględnione jest ciepło unoszenia i ciepło Joule'a). Dzięki tym uproszczeniom równania magnetohydrodynamiki, które trzeba było rozwiązać, są liniowe (z wyjątkiem części dotyczącej promieniowania) oraz zagadnienie to można podzielić na trzy części: elektromagnetyczną, hydrodynamiczną i ciepłą, które mogą być rozwiązywane w wymienionej kolejności.

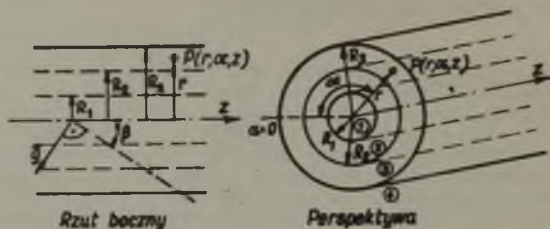
1. Wstęp

We wstępie do artykułu [1] zostało sformułowane rozpatrywane zagadnienie. Z powodu znacznych komplikacji natury matematycznej nie będziemy tu zajmować się nim w pełni, tzn. znalezieniem takiego kształtu naczynia do transportu surówki oraz takiego sposobu wytworzenia pola, aby uzyskać optymalizację pewnych parametrów, np. minimalizację prądu zasilającego. Nie będziemy również, z tego samego powodu, przeprowadzać obliczeń dla najbardziej prawdopodobnego praktycznie układu. Obierzemy możliwie najprostszymi modelem, na którym można by pokazać drogę obliczeń i uzyskać jakieś wzory dające podstawę do przeprowadzenia oszacowania interesujących nas wielkości. Najwłaściwszą drogą do rozwiązania reszty problemu wydaje się eksperyment przeprowadzony np. na modelu.

2. Opis pierwszego modelu

Ze względu na symetrię najprostszym modelem transportu wydaje się fragment nieskończenie długiej rury (symetria walcowa), wypełnionej całkowi-

cie cieczą przewodzącą. Rurę tę dla zwiększenia sił elektromagnetycznych napędzających ciecz otoczmy obwodem magnetycznym o wspomnianej symetrii. Pomiedzy obwodem magnetycznym a rurą występować będzie "okład prądowy" zrealizowany przy pomocy prądu sinusoidalnie zależnego od czasu (wymuszono-ego). Dla uproszczenia założymy, że jest on nieskończenie cienki, posiada kierunek linii współrzędnych α oraz zależy sinusoidalnie od współrzędnej z (rys. 1).



Rys. 1

Charakterystykę magnesowania zakładamy liniową. Wprowadzamy walcowy układ współrzędnych (prawoskrętny), zaznaczony na rys. 1. Parametry występujących tu ośrodków są następujące (oznaczenia są takie same jak w artykule [1]).

Ciecz przewodząca (1):

$$0 \leq r \leq R_1,$$

$$\mu = \mu_0, \quad j > 0. \quad (1a)$$

Zakładamy tu, że ciecz posiada temperaturę wyższą od temperatury Curie, wówczas z wystarczającą dokładnością mamy: ($\mu_w = 1$).

Rura izolacyjna (2):

$$R_1 < r < R_2,$$

$$\mu = \mu_0, \quad j = 0. \quad (1b)$$

"Okład prądowy" (powierzchniowy):

$$r = R_2,$$

$$i_{(ct)}(z, t) = \sqrt{2} i \sin(\omega t - hz). \quad (1c)$$

"h" - współczynnik proporcjonalności związany z okresowym (przestrzennie) rozkładem gęstości liniowej prądu.

Obwód magnetyczny (3):

$$R_2 < r < R_3,$$

$$\mu_w > 1, \quad j = C. \quad (1d)$$

Zakładamy, że prądy wirowe w obwodzie magnetycznym są pomijalne (odpowiednio ułożone blachy izolowane o małej przewodności właściwej) oraz linio-wość charakterystyki magnesowania. Powietrze (4):

$$R_3 < r,$$

$$\mu = \mu_0, \quad j = 0. \quad (1e)$$

3. Rozwiązanie równań pola dla pierwszego modelu

Dla tak scharakteryzowanego ośrodka trzeba zająć się równaniami różniczkowymi opisującymi pole magnetyczne. W tym celu korzystamy z zależności ((18), (60), (64)), [1]. Ponieważ w równaniu pola (18), [1] występują współrzędne wektora prędkości cieczy wraz z ich pochodnymi uprościmy zagadnienie w następujący sposób: założymy, że występuje przepływ laminarny cieczy nieściśliwej o jedynej niezerowej współrzędnej v^z (dyskusję dopuszczalności tego założenia przeprowadzimy później w części hydrodynamicznej rozważań). Będziemy poszukiwać takich rozwiązań dotyczących pola we współrzędnych walcowych, dla których zachodzi: ($H^\alpha = 0$), co jest zrozumiałe ze względu na związek (1c) oraz symetrię układu, poza tym współrzędne H^r, H^z nie będą zależeć od " α " z tych samych powodów. Wypiszmy więc równanie (18), [1] dla współrzędnej H^r z użyciem składowych fizycznych.

$$\frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H^r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 H^r}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} H^r \right] = v \frac{\partial H^r}{\partial z} + \frac{\partial H^r}{\partial t}. \quad (2)$$

Składnik zawierający " $\nabla_1 v^1$ " został pominięty ze względu na założoną nieściśliwość cieczy. Składowa $\left(\frac{v}{z} \right)$ może zależeć jedynie od zmiennej r (spośród zmiennych r, α, z), niezależność od zmiennej α wynika z symetrii układu i laminarności przepływu, niezależność od " z " z równania (33), [1] nieściśliwości cieczy. W związku z wymuszeniem określonym wzorem (1c) poszukujemy rozwiązania r.r.(2) w postaci zespolonej: $\hat{H}(r, z, t) = \sqrt{2} \hat{h}(r) e^{j(\omega t - kz)}$; podstawiając " $\hat{H}(r, z, t)$ " do r.r.(2) mamy:

$$\frac{d^2 \hat{H}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \hat{H}}{dr} - \left[\frac{1}{r^2} + h^2 + j \mu j \omega \left(1 - \frac{v}{v_p} \right) \right] \hat{H}(r) = 0, \quad (3)$$

gdzie:

$$v_p = \frac{\omega}{h}. \quad (4)$$

" v_p " oznacza, wobec tego, prędkość postępowego pola wirującego w kierunku osi z . Założymy teraz, że: $\left(\frac{v}{v_p} \right) \ll 1$.

Jest to usprawiedliwione względami technologii transportu cieczy, bowiem " v_p " jest rzędu 10^2 m/sec. Przyjmując takie przybliżenie możemy albo opuścić składnik $\frac{v}{v_p}$, albo założyć jego niezależność od zmiennej r oraz od pola. Postąpimy na drugi sposób, uzyskując wówczas liniowość r.r.(2) i usprawiedliwiając tym samym stosowanie symbolicznej postaci rozwiązania $\hat{H}(r, z, t)$ r.r.(3) (możemy wówczas obliczyć jego część urojoną czy też rzeczywistą i będą one rozwiązaniami r.r. (2). Zajmiemy się teraz r.r.(19), [1]. Korzystając z równania (1), [1] mamy:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{H}(r)) + \frac{\partial^2 \hat{H}(z)}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

Ponieważ rozwiązanie, odnośnie składowej $\hat{H}(z)$, przewidujemy w postaci analogicznej do opisywanej dla $\hat{H}(r)$ (tzn.: $\hat{H}(r, z, t) = \sqrt{2} \hat{H}(r) e^{j(\omega t - hz)}$), więc z r.r. (5) wynika:

$$\hat{H}(z) = \frac{1}{jH} \left(\frac{d \hat{H}}{dr} \right) (r) + \frac{1}{r} \hat{H}(r). \quad (6)$$

Ponieważ w równaniu (6) występuje składnik $\frac{d \hat{H}}{dr}$, więc można spodziewać się wpływu pochodnej $\frac{dv}{dr}$ na " $\hat{H}(r)$ "; potwierdza to r.r.(18), [1] zapisane dla współrzędnej z . Można jednak ten wpływ zaniedbać z wyjątkiem tzw. warstwy przyściennej, gdzie " $\frac{dv}{dr}$ " jest duże. Bez większych błędów można dopuścić: $\left(\frac{dv}{dr} \sim 1 \text{ sec}^{-1} \right)$. W celu obliczenia rozkładu gęstości prądu

korzystamy z r. (3), [1] (z pominiętym składnikiem $\frac{\partial(\epsilon \mathbf{E})}{\partial t}$ - dyskusja tego kroku zamieszczona jest w [1]) oraz (62), [1], czyli:

$$\hat{j}_{(\alpha)}(r, z, t) = \frac{\partial \hat{H}(r)}{\partial z}(r, z, t) - \frac{\partial \hat{H}(z)}{\partial r}(r, z, t), \quad (7)$$

skąd po podstawieniu zależności (6) i uwzględnieniu r. (3) otrzymujemy:

$$\hat{j}_{(\alpha)}(r) = -j(v_p - v) \hat{B}(z) \hat{B}(r). \quad (8)$$

Ponieważ r.r. ((18), (19)), [1] wynikają z r. (1-6), [1], ale nie prześle-
dziliśmy ogólnie czy i w jakim stopniu zachodzi implikacja odwrotna (co
można również łatwo zrobić), więc wyliczając "E" z r. (6), [1] przy po-
mocy wzoru (8) i wstawiając wynik do r.r. (1), [1], stwierdzamy, że jest
ono spełnione. Równania ((3), (4)), [1] wykorzystaliśmy już a r.(2), [1]
jest definicyjnym dla "E_{zad}", r. (5), [1] wynika z r. ((2), (3)), [1]; wo-
bec tego równania Maxwella są spełnione dla każdego rozwiązania r.r.(3) o
założonej postaci $\hat{H}(r, z, t)$. Poza tym, można się wówczas przekonać, że
" $\hat{H}(r, z, t)$ " wyliczone ze wzoru (6) spełnia r.r.(3). Rozważania nasze są
(z)
skuszone dla: ($j \neq 0$), w przypadku przeciwnym cytowana implikacja odwrotna
dotyczy "H" (dla pola tutaj rozważanego). Przystąpimy teraz do obliczenia
rozkładu pola w poszczególnych ośrodkach opisanych wzorami (1), w oparciu
o r. (3), (6).

Ośrodek 1. Ponieważ składnik h^2 po prawej stronie wzoru (3) jest rzędu
 5 m^{-2} a składnik $\mu_0 j^\omega$ rzędu 500 m^{-2} , więc pominiemy " h^2 " (dane te wyni-
kają ze względów technologicznych). Przy tym uproszczeniu całka ogólna
r.r. (3) jest następująca:

$$\hat{H}_{(r)1}(r) = \hat{A} \hat{J}_1(j^3/2 kr) + \hat{B} \hat{K}_1(j^1/2 kr), \quad (9)$$

gdzie:

$$k = \sqrt{\mu_0 j^\omega \left(1 - \frac{v}{v_p}\right)}. \quad (10)$$

(Patrz [2], R. VII; w [2], T. II, VI podane są również definicje funkcji
Bessela 1 rodzaju, rzędu $1(\hat{J}_1)$ oraz zmodyfikowane 2 rodzaju rzędu $1(\hat{K}_1)$
a w tablicach podano ich wartości). Zakładamy: ($\hat{B} = 0$), ponieważ zachodzi:
($\lim_{r \rightarrow 0} \hat{K}_1(j^1/2 kr) = \infty$). Stałą \hat{A} łącznie z innymi stałymi dla pozosta-
łych ośrodków wyznaczmy z pomocą warunków brzegowych.

Z wzoru (6) mamy:

$$\hat{H}_{(z)1}(r) = \hat{A}_1 \frac{1}{j h} \left(-\frac{dJ_1}{dr} (j^{3/2} kr) + \frac{1}{r} J_1(j^{3/2} kr) \right). \quad (11)$$

Ośrodek 2.3. Tutaj: ($j = 0$), więc składnik h^2 pozostawiamy. Całka ogólna:

$$\hat{H}_{(r)j}(r) = \hat{A}_j I_1(hr) + \hat{B}_j K_1(hr), \quad \delta \in (2,3). \quad (12)$$

" I_1 " - oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela 1 rodzaju, rzędu 1, (patrz [2] R. VI).

$$\begin{aligned} \hat{H}_{(z)j}(r) = \hat{A}_j \frac{1}{j h} \left(-\frac{dI_1}{dr} (hr) + \frac{1}{r} I_1(hr) \right) + \\ + \hat{B}_j \frac{1}{j h} \left(-\frac{dK_1}{dr} (hr) + \frac{1}{r} K_1(hr) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Ośrodek 4. Także zachodzi: ($j = 0$) oraz: ($\lim_{r \rightarrow \infty} I_1(hr) = \infty$), więc:

$$\hat{H}_{(r)4}(r) = \hat{B}_4 K_1(hr), \quad (14)$$

$$\hat{H}_{(z)4}(r) = \hat{B}_4 \frac{1}{4} \frac{1}{h} \left(-\frac{dK_1}{dr} (hr) + \frac{1}{r} K_1(hr) \right). \quad (15)$$

W celu obliczenia stałych $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_2, \hat{A}_3, \hat{B}_3, \hat{B}_4$ sformułujemy teraz warunki brzegowe na granicy ośrodków. Dotyczą one ciągłości składowych normalnych wektora indukcji magnetycznej oraz porównania różnicy składowych stycznych wektora natężenia pola magnetycznego z liniową gęstością prądu \hat{j} . Mamy więc:

$$\hat{H}_{(r)1}(R_1) = \hat{H}_{(r)2}(R_1), \quad (16)$$

$$\hat{H}_{(z)1}(R_1) = \hat{H}_{(z)2}(R_1), \quad (17)$$

$$\hat{H}_{(r)2}(R_2) = \mu_w \hat{H}_{(r)3}(R_2), \quad (18)$$

$$\hat{H}_{(z)2}(R_2) - \hat{H}_{(z)3}(R_2) = \hat{J}, \quad (19)$$

$$\mu_w \hat{H}_{(r)3}(R_3) = \hat{H}_{(r)4}(R_3), \quad (20)$$

$$\hat{H}_{(z)3}(R_3) = \hat{H}_{(z)4}(R_3). \quad (21)$$

Wyrażenia występujące we wzorach (16)-(21) rozumiane są jako granice odpowiednio lewo i prawostronne względem zmiennej r . Wprowadzimy teraz oznaczenia:

$$\hat{a}_1 = \hat{J}_1(j^3/2 k R_1), \quad (22)$$

$$a_2 = I_1(h R_1), \quad (23)$$

$$a_3 = K_1(h R_1), \quad (24)$$

$$\hat{a}_4 = \frac{d\hat{J}_1}{dr} (j^3/2 k R_1) + \frac{1}{R_1} \hat{J}_1(j^3/2 k R_1), \quad (25)$$

$$a_5 = \frac{dI_1}{dr} (h R_1) + \frac{1}{R_1} I_1(h R_1), \quad (26)$$

$$a_6 = \frac{dK_1}{dr} (h R_1) + \frac{1}{R_1} K_1(h R_1), \quad (27)$$

$$a_7 = I_1(h R_2), \quad (28)$$

$$a_8 = K_1(h R_2), \quad (29)$$

$$a_9 = \frac{dI_1}{dr} (h R_2) + \frac{1}{R_2} I_1(h R_2), \quad (30)$$

$$a_{10} = \frac{dK_1}{dr} (h R_2) + \frac{1}{R_2} K_1(h R_2), \quad (31)$$

$$a_{11} = I_1(h R_3), \quad (32)$$

$$a_{12} = K_1(h R_3), \quad (33)$$

$$a_{13} = \frac{dI_1}{dr} (h R_3) + \frac{1}{R_3} I_1(h R_3), \quad (34)$$

$$a_{14} = \frac{dK_1}{dr} (h R_3) + \frac{1}{R_3} K_1(h R_3). \quad (35)$$

Na podstawie wzorów (16)-(21) i wprowadzonych oznaczeń (22)-(35) otrzymujemy równania:

$$\hat{a}_1 \hat{A}_1 = a_2 \hat{A}_2 + a_3 \hat{B}_2, \quad (36)$$

$$\hat{a}_4 \hat{A}_1 = a_5 \hat{A}_2 + a_6 \hat{B}_2, \quad (37)$$

$$a_7 \hat{A}_2 + a_8 \hat{B}_2 = \mu_w a_7 \hat{A}_3 + \mu_w a_8 \hat{B}_3, \quad (38)$$

$$a_9 \hat{A}_2 + a_{10} \hat{B}_2 - a_9 \hat{A}_3 - a_{10} \hat{B}_3 = jh \hat{J}, \quad (39)$$

$$\mu_w a_{11} \hat{A}_3 + \mu_w a_{12} \hat{B}_3 = a_{12} \hat{B}_4, \quad (40)$$

$$a_{13} \hat{A}_3 + a_{14} \hat{B}_3 = a_{14} \hat{B}_4. \quad (41)$$

Rozwiązując powyższy układ równań mamy kolejno:

$$\hat{A}_3 = a_{15} \hat{B}_4, \quad (42)$$

$$\hat{B}_3 = a_{16} \hat{B}_4, \quad (43)$$

gdzie:

$$a_{15} = - \frac{(\mu_w - 1) a_{12} a_{14}}{\mu_w (a_{11} a_{14} - a_{12} a_{13})}, \quad (44)$$

$$a_{16} = \frac{\mu_w a_{11} a_{14} - a_{12} a_{13}}{\mu_w (a_{11} a_{14} - a_{12} a_{13})}. \quad (45)$$

$$\hat{A}_2 = a_{17} \hat{B}_4 + a_{18} jh \hat{J}, \quad (46)$$

$$\hat{B}_2 = a_{19} \hat{B}_4 + a_{20} jh \hat{J}, \quad (47)$$

gdzie:

$$a_{17} = \frac{(\mu_w a_7 a_{10} - a_8 a_9) a_{15} + (\mu_w - 1) a_8 a_{10} a_{16}}{a_7 a_{10} - a_8 a_9}, \quad (48)$$

$$a_{18} = - \frac{a_8}{a_7 a_{10} - a_8 a_9}, \quad (49)$$

$$a_{19} = \frac{-(\mu_w - 1)a_7 a_9 a_{15} + (a_7 a_{10} - \mu_w a_8 a_9)a_{16}}{a_7 a_{10} - a_8 a_9}, \quad (50)$$

$$a_{20} = \frac{a_7}{a_7 a_{10} - a_8 a_9}. \quad (51)$$

Podstawiając wzory (46), (47) do wzorów (36), (37) otrzymujemy:

$$\hat{a}_1 \hat{A}_1 + a_{21} \hat{B}_4 = a_{23} \text{ jh } \hat{J}, \quad (52)$$

$$\hat{a}_4 \hat{A}_1 + a_{22} \hat{B}_4 = a_{24} \text{ jh } \hat{J}, \quad (53)$$

gdzie:

$$a_{21} = - (a_2 a_{17} + a_3 a_{19}), \quad (54)$$

$$a_{22} = - (a_5 a_{17} + a_6 a_{19}), \quad (55)$$

$$a_{23} = a_2 a_{18} + a_3 a_{20}, \quad (56)$$

$$a_{24} = a_5 a_{18} + a_6 a_{20}. \quad (57)$$

Stąd:

$$\hat{A}_1 = \hat{a}_{25} \text{ jh } \hat{J}, \quad (58)$$

$$\hat{B}_4 = \hat{a}_{26} \text{ jh } \hat{J}, \quad (59)$$

gdzie:

$$\hat{a}_{25} = \frac{a_{22} a_{23} - a_{21} a_{24}}{\hat{a}_1 a_{22} - \hat{a}_4 a_{21}}, \quad (60)$$

$$\hat{a}_{26} = \frac{\hat{a}_1 a_{24} - \hat{a}_4 a_{23}}{\hat{a}_1 a_{22} - \hat{a}_4 a_{21}}. \quad (61)$$

W oparciu o własności funkcji Bessela łatwo wykazać, że dla: $(k, h, R_1, R_2, R_3 > 0)$, mianowniki wzorów (44), (45), (48)-(51), (60), (61) są różne od zera. W ten sposób uzyskaliśmy rozwiązanie podające wartości poszukiwanych stałych. Ze względu na konieczność obliczenia sił elektromagnetycznych napędzających ciecz specjalnie potrzebna jest znajomość rozwiązania $\vec{H}(r)$, czyli stałych \vec{A} względnie \vec{A}_{25} . W oparciu o znajomość funkcji $\vec{A}(r)$ ($\omega, h, \mu_w, j, R_1, R_2, R_3$), można po obliczeniu prędkości przepływu cieczy, rozwiązać zagadnienie optymalizacji gęstości liniowej prądu J , przy zadanej wydajności przepływu, w funkcji wymienionych zmiennych. Obserwując ciąg wzorów doprowadzających do "A" widać, że byłaby to analiza bardzo uciążliwa.

Uwaga: Dla uproszczenia, celowo nie zajmujemy się polem elektrycznym wytworzonym przez ładunki powierzchniowe przewodników. Zresztą dla ich wnętrza, jak można oszacować, wprowadza to zupełnie pomijalną modyfikację pola oraz sił elektrodynamicznych (łącznie z siłami powierzchniowymi).

4. Rozwiązanie strony hydrodynamicznej zagadnienia dla pierwszego modelu

Przed wszystkim należy teraz obliczyć gęstość objętościową sił pochodzenia elektromagnetycznego. Ze względów, które będą wyjaśnione nieco później, interesujące będzie otrzymanie wzorów określających średnią (w ciągu okresu T) wartość gęstości siły (nietrudno spostrzec, że jest ona opisana funkcją okresową). Wobec tego na mocy wzorów ((38), (66)), [1], (8) mamy:

$$f_{(em)}(z) \dot{s}r = - \operatorname{Re} \left\{ \dot{j}_{(\alpha)}(r) \vec{B}(r) \right\} = j (v_p - v) B^2(z, r). \quad (62)$$

Wprowadzając:

$$\dot{j}_1(j^3/2 kr) = M_1(kr) e^{j\theta_1(kr)} \quad (63)$$

oraz stosując wzory (9), (58) otrzymujemy:

$$f_{(em)}(z) \dot{s}r = \mu_0^2 j (v_p - v) a_{25}^2 h^2 J^2 M_1^2(kr). \quad (64)$$

Następnie w sposób podobny wyprowadzamy wzór określający "f(r)" $f_{(em)}(r) \dot{s}r$ stosując dodatkowo zależność (6).

$$f_{(em)}(r) \dot{s}r = \operatorname{Re} \left\{ \dot{j}_{(\alpha)}(r) \vec{B}(r) \right\} = - f_{(em)}(z) \dot{s}r \frac{k}{h} \frac{d\theta_1(kr)}{d(kr)} \quad (65)$$

Składowa $f_{(em)}^{(r, z, t)}$ jest identycznie równa zeru, gdyż istnieje tylko jedna niezerowa składowa gęstości prądu $j_{(a)}(r, z, t)$, Oprócz sił elektromagnetycznych występują siły ciężenia o gęstości (wzór (40), [1], rys. 1):

$$f_{(g)}^{(r)}(\alpha) = - \rho g \cos \beta \sin \alpha, \quad (66)$$

$$f_{(g)}^{(\alpha)}(\alpha) = - \rho g \cos \beta \cos \alpha, \quad (67)$$

$$f_{(g)}^{(z)}(\alpha) = - \rho g \sin \beta. \quad (68)$$

Zajmijmy się równaniami ruchu cieczy. W ogólnej formie są one podane dla cieczy nieściśliwej (wzory ((33), (34)), [1], (warunki zawarte w komentarzu do wzoru (33), [1] są w przybliżeniu spełnione). Trzeba teraz zbadać kiedy zachodzi laminarność przepływu. (Spełnienie tego założenia bardzo znacznie upraszcza równania ruchu cieczy). Decyduje o tym znana z hydrodynamiki liczba Reynoldsa:

$$R = \frac{2R_1 \left| \frac{v}{(z)} \right| \delta r}{\nu}. \quad (69)$$

(Wartość $\left| \frac{v}{(z)} \right| \delta r$ rozumiana jest jako średnia dla przekroju rury).

Jej wartość krytyczna dla ciekłego metalu jest rzędu 10^5 ([5], str. 382), rząd " ν " - $10^{-6} \frac{m^2}{sec}$ ([5], str. 360). Wobec tego przy średnicy rzędu kilku dziesięciu centymetrów " $\left| \frac{v}{(z)} \right| \delta r$ " wynosi około kilkadziesiąt centymetrów na sekundę. Są to dane bardzo szacunkowe, gdyż wartość " R_{kr} " zależy w dużej mierze od stopnia gładkości powierzchni rury. Dla prędkości większych od " $\frac{v}{(z)}_{kr}$ " następuje przepływ burzliwy (niestabilny). Wówczas należałoby

operować statystyczną teorią turbulencji włączającą do równania ruchu cieczy tzw. naprężenia Reynoldsa pochodzące od wirów ([3], R. IX). Nie będziemy tego tutaj czynić. Wobec tego dla przepływu laminarnego na mocy wzorów ((34), (58), (64)), [1] mamy:

$$\frac{\delta v}{\delta t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\delta v}{\delta r} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{r}{(z)}. \quad (70)$$

(Na mocy uwag uczynionych przy r.r. (2), wiemy, że r.r.(33), [1] jest spełnione). Dla pozostałych współrzędnych r, α r.r.(34), [1] daje:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{f}{(r)}, \quad (71)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{f}{(\alpha)}, \quad (72)$$

gdzie na mocy wzoru (37), [1] gęstości sił opisywane we wzorach (70)-(72) składają się z części elektromagnetycznej i grawitacyjnej.

Ponieważ: $(v \approx 10^{-6} \frac{m^2}{sec})$ oraz: $(\frac{1}{g} \frac{f}{(z)}(z)) \approx 1 \frac{m}{sec^2}$, więc nie zrobimy na ogół dużego błędu pomijając człon uwzględniający lepkość cieczy. Duże błędy wystąpią jedynie w opisie warstwy cieczy przylegającej do brzegu rury, gdzie na skutek warunku brzegowego: $v(R_1) = 0$, wystąpią bardzo znaczne gradienty prędkości. Wyłączmy więc z rozważań tą warstwę o grubości ΔR_1 ,

rzędu: $10 \sqrt{\frac{v}{g \sin \theta}} \approx 10^{-2}$ m. Postępowanie nasze usprawiedliwione jest tym bardziej, że nie wiemy na pewno, czy przepływ nie będzie burszliwy oraz model transportu cieczy: zamknięta rura kompletnie wypełniona cieczą - też jest nierealny. W ten sposób oszczędzimy trudu związanego z rozwiązaniem r.r. (70), które i tak byłoby nieprzejrzyste (rozwiązanie). Następne uproszczenie polega na zastąpieniu w równaniach (70)-(72) składnika $\frac{f}{(em)}$ gęstości siły pochodzenia elektromagnetycznego, który jest zależny od "z" i "t" (jak łatwo zauważyć, zależność ta jest następującego typu: składnik stały względem zmiennych z, t oraz funkcja sinusoidalna o podwojonej częstotliwości), jego wartością średnią za okres $\frac{f}{(em)\dot{r}}$. Można operację tę usprawiedliwić za pomocą następującego rozumowania. Gęstość siły elektromagnetycznej jest rzędu gęstości siły grawitacyjnej, wobec tego uwzględniając tę ostatnią oraz liniowość r.r. (70) można ustalić, że przyczynek prędkości v pochodzący od składowej zmiennej gęstości siły jest rzędu:

$\frac{K \sin \theta}{z \omega} \approx 10^{-3} \frac{m}{sec}$. W równaniach (71), (72) pomijamy całą składową zmienną ciśnienia, lecz nie jest to specjalnie istotne, bowiem chodzi nam o prędkość v, (można się również przekonać że składnik $-\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z}$ powoduje,

przy uwzględnieniu składowej zmiennej ciśnienia, składową zmienną prędkości cytowanego już rzędu). W ten sposób średnia gęstość siły f jest funkcją jedynie zmiennej r, a stąd mamy prawo spodziewać się na podstawie r.r. (70), że "v" rzeczywiście nie zależy od "z" i r.r. (33), [1] oraz (70) są faktycznie spełnione dla: $(\frac{v}{(r)} = \frac{v}{(\alpha)} = 0)$. Na mocy wzorów (37), [1]

(65)-(67) mamy:

$$\frac{f_r}{\dot{s}r}(r, \alpha) = \frac{f_r}{(em)\dot{s}r}(r) - qg \cos \beta \sin \alpha, \quad (73)$$

$$\frac{f_\alpha}{\dot{s}r}(r, \alpha) = -qg r \cos \beta \cos \alpha \quad (74)$$

Stąd stwierdzamy, że zachodzi:

$$\frac{\partial f_r}{\partial \alpha} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial r}, \quad (75)$$

czyli, że zmienna p faktycznie może spełniać związki (71), (72), ponieważ "dp" jest różniczką zupełną:

$$dp = f_r(r, \alpha) dr + f_\alpha(r, \alpha) d\alpha. \quad (76)$$

Całkując kolejno wzdłuż linii parametrycznych układu współrzędnych od punktu (r_0, α_0) do punktu (r, α) otrzymujemy:

$$p(r, \alpha) = \int_{r_0}^r \frac{f_r}{(em)\dot{s}r}(r) dr - qg r \cos \beta \sin \alpha + qg r_0 \cos \beta \sin \alpha_0. \quad (77)$$

Obieramy: $(r_0 = 0)$ i wprowadzamy "stałą dowolną" p_0 zależną od zmiennej z :

$$p(r, \alpha, z) = \int_0^r \frac{f}{(em)(r)\dot{s}r}(r) dr - qg r \cos \beta \sin \alpha + p_0(z). \quad (78)$$

Po przedyskutowanych uproszczeniach, uwzględniając relację: $v \ll v_p$, r.r. (70) przyjmie postać:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial z} + a(r) - g \sin \theta, \quad (79)$$

$$\text{gdzie:} \quad a(r) = \frac{1}{q} \mu_0^2 j v_p a_{25}^2 h^2 J^2 M_1^2(kr). \quad (80)$$

Ponieważ lewa strona r.r. (79) może zależeć wyłącznie od "r" i "t", podobnie jak drugi wyraz prawej strony (od "r"), a składnik $-\frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial z}$ - wyłącznie od "z", więc musi zachodzić:

$$-\frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{q} \frac{\partial p_0}{\partial z} = \frac{c}{q}, \quad c \in C(r, \alpha, z, t), \quad (81)$$

(patrz oznaczenia we wzorze (7), [1]).

Wprowadzając definicję " $\varphi(r, \alpha)$ ":

$$\varphi(r, \alpha) = \int_0^r \frac{f(r)}{(em)(r)} dr - \rho g r \cos \beta \sin \alpha \quad (82)$$

i całkując r.r. (81) mamy:

$$p(r, \alpha, z) = \varphi(r, \alpha) - c z + d, \quad d \in C(r, \alpha, z, t). \quad (83)$$

Stałe c i d można wyznaczyć z warunków brzegowych podających wartości ciśnienia $p(r, \alpha, z)$ w punktach $(0, \alpha, -\frac{1}{2})$ i $(0, \alpha, \frac{1}{2})$ odpowiednio równe p_p i p_k .

Korzystając z zależności: $\varphi(0, \alpha) = 0$, otrzymujemy ostatecznie:

$$p(r, \alpha, z) = \varphi(r, \alpha) - \frac{p_p - p_k}{1} z + \frac{p_p + p_k}{2}. \quad (84)$$

Zcałkujmy teraz r.r. (79), zakładając warunek początkowy:

$$v_0(r) = v(z, r, t_0).$$

$$v(z, r, t) = v_0(r) + \left(\frac{p_p - p_k}{\rho l} + a(r) - g \sin \theta \right) (t - t_0). \quad (85)$$

Rozumowanie nasze można bez trudu uogólnić na przypadek gdy ciśnienia p_p i p_k zależą od czasu t . Otrzymany wynik jest słuszny w przybliżeniu w przedziale prędkości:

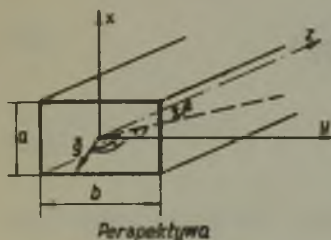
$$\sim 1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} < v < n 10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \quad \text{gdzie "n" jest rzędu kilku.}$$

Górna granica wynika z relacji: $v \ll v_p(z)$ oraz przede wszystkim z laminarności ruchu, dolna - z warunków, aby składowa zmienna prędkości rzędu $\frac{K \sin \theta}{2\omega}$ była znacznie mniejsza od prędkości opisanej wzorem (85). Poza tym ze względów już omawianych powinna zachodzić nierówność: $r < R_1 - \Delta R_1$. W tym zakresie prędkość $v(z)$ rośnie, jak widać ze wzoru (85), liniowo z czasem t . Następnie nasze rozważania tracą ważność, ale przez analogię z silnikiem asynchronicznym można domyślać się, że prędkość (średnia w ruchu już burzliwym), ustali się na jakiejś wartości mniejszej od v_p . Widać, że dzięki założeniu: $v(z) \ll v_p$, uzyskaliśmy liniowość równań pola (które można było rozwiązać oddzielnie, nie znając ruchu cieczy) oraz laminarność tego ruchu, co spowodowało zniknięcie składnika bezwładnościowego $v^1 v_1 v^h$ w r.r. (34), [1], a zatem też liniowość tego równania. Z kolei założenie nieściśliwości cieczy pozwoliło na odseparowanie się od za-

gadnień termicznych, które będą mogły być rozpatrzone osobno. Należałoby jeszcze zaznaczyć, że ponieważ przy odzuzłaniu ruch cieczy powinien być w przybliżeniu laminarny, więc eksploatacja dla takiego urządzenia powinna odbywać się na zasadzie kolejnego włączania i wyłączania go, gdy ruch staje się burzliwy.

5. Drugi model. Strona polowa oraz hydrodynamiczna zagadnienia

Omawiany model transportu cieczy przy pomocy pola wirującego nie jest jedynym. Należałoby wspomnieć o innym teoretycznie możliwym rozwiązaniu zrealizowanym przy pomocy prądów stałych. Rozważmy fragment nieskończenie długiej rury o przekroju prostokątnym (rys. 2).



Rys. 2

Rura wypełniona jest całkowicie cieczą niściśliwą, przewodzącą, o przewodnictwie właściwym λ oraz: ($\mu_w = 1$), która porusza się w sposób laminarny wzdłuż osi z . Założymy, że wymuszone jest zasilanie prądowe rury na powierzchniach prostopadłych do osi y (zgodnie z jej kierunkiem i zwrotem), przy czym " j^y " jest na tych powierzchniach stałe. Następnie również wymuszone jest natężenie pola magnetycznego H^x na powierzchniach prostopadłych do osi x (zgodnie z jej kierunkiem, przeciwie do zwrotu); jest ono z kolei stałe na tych powierzchniach. Zakładamy stałość " j^y " i " H^x " względem czasu t . Podanie tego rodzaju warunków brzegowych ma za zadanie maksymalne uproszczenie modelu wraz z opuszczeniem sposobu jego konstrukcji na zewnątrz rury. Dlatego też został przyjęty jej przekrój jako prostokątny. Poszukamy teraz rozkładu pola o postaci:

$$\frac{H(x)}{(x)} = \frac{A}{(x)} x + \frac{B}{(x)}, \quad (86)$$

$$\frac{H(y)}{(y)} = \frac{A}{(y)} y + \frac{B}{(y)}, \quad (87)$$

$$\frac{H(z)}{(z)} = \frac{A}{(z)} z + \frac{B}{(z)}. \quad (88)$$

Uwaga: ponieważ operujemy teraz kartezjańskim układem współrzędnych, więc zanika różnica pomiędzy składowymi fizycznymi i współrzędnymi k^i i kontrawariantnymi wektorów. Stałe A, B , gdzie: ($\lambda \mathcal{E}(x, x, z)$), nie zależą od współrzędnych x, y, z, t i wyznaczmy je z pomocą warunków brzegowych (o ile naturalnie taka postać funkcji H będzie spełniała równania pola wew-
(λ))

ciągły rury). Na podstawie wzorów ((18), (19)), [1] oraz (86)-(88) i laminarności ruchu cieczy niściśliwej równania te mają formę:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = 0, \quad (89)$$

$$\frac{d^2 H}{dy^2} = 0, \quad (90)$$

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = -\mu \left\{ H \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\}, \quad (91)$$

$$\frac{dH}{dx} + \frac{dH}{dy} = 0. \quad (92)$$

Jeśli pominąć prawą stronę równania (91) (dyskusja tego kroku będzie przeprowadzona), to widać, że gdy zachodzi:

$$\frac{A}{(x)} + \frac{A}{(y)} = 0, \quad (93)$$

wzory (86)-(88) są faktycznie rozwiązaniami r.r.(89)-(92). Na podstawie r. (3), [1] widzimy, że:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{A}{(z)} = \frac{j}{(y)}. \quad (94)$$

Na podstawie omówionych warunków brzegowych (po dołączeniu do nich jeszcze jednego: $H(0) = 0$, wynikającego z symetrii zagadnienia), otrzymujemy dla wnętrza rury:

$$\frac{H}{(x)} = -\frac{H_0}{(x)}, \quad (95)$$

$$\frac{H}{(y)} = 0, \quad (96)$$

$$\frac{H}{(z)} = -\frac{j_0}{(y)} x, \quad (97)$$

gdzie:

$$H_0 = -\frac{H}{(x)} \left(\pm \frac{a}{2} \right), \quad (98)$$

$$\frac{j_0}{(y)} = \frac{j}{(y)} \left(y = \pm \frac{b}{2} \right). \quad (99)$$

Uwaga: zachodzą związki: $A = A=B = B = 0$, czyli r. (93) jest spełniona.

$$(x) \quad (y)(y) \quad (z)$$

Ze względu na zależność (96) drugi składnik prawej strony r.r. (91) jest równy zeru. Pierwszy można pominąć na podstawie rozumowania: całkujemy raz

r.r.(91), założywszy średnią wartość $\left| \frac{\partial v(z)}{\partial x} \right|$ dla przekroju rury oraz eli minując stałą całkowania na mocy warunków brzegowych, porównujemy składnik istniejący w całości dla równania jednorodnego z członem "zaburzającym" całości dla równania niejednorodnego. Żądamy wówczas oszacowania:

$$j_o \gg \frac{1}{2} \mu j_a H_o \left| \frac{\partial v(z)}{\partial x} \right|_{sr}$$

Skąd wykorzystując wzór (38), [1] otrzymujemy relację:

$$\left| \frac{\partial v(z)}{\partial x} \right| \ll \frac{2j_o^2}{a j_{(em)}(z)}$$

Wyłączając ewentualnie warstwę przyścienną, można dobrać w ten sposób j_o przy zadanej gęstości siły f oraz "a" i "j", że dla prędkości ruchu laminarnego nierówność ta będzie spełniona. Współrzędne gęstości siły Lorentza są następujące:

$$f_{(em)}(x) = j_{(y)} B_{(z)} = - \mu j_o^2 x_{(y)} \quad (100)$$

$$f_{(em)}(y) = 0, \quad (101)$$

$$f_{(em)}(z) = -j_{(y)} B_{(x)} = j_o B_o_{(y)}(x) \quad (102)$$

(Wzory ((38), (66), [1]),

Część hydrodynamiczna rozwiązania będzie bardzo podobna do występującej w modelu poprzednim. Pomijając człon lepkości w równaniu ruchu cieczy na mocy zamieszczonej już dyskusji, mamy:

$$\frac{\partial v(z)}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} j_o B_o - g \sin \beta, \quad (103)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \mu j_0^2 x - \rho g \cos \beta, \quad (104)$$

(y)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (105)$$

Stąd, podobnie jak poprzednio, zakładając dla ciśnienia $p(x, y, z)$ warunki brzegowe podające jego wartości w punktach $(0, y, -\frac{1}{2})$, $(0, y, \frac{1}{2})$ odpowiednio p_p, p_k ; mamy:

$$p(x, y, z) = - \frac{\mu}{2} j_0^2 x^2 - \rho g x \cos \beta - \frac{p_p - p_k}{1} z + \frac{p_p + p_k}{2}. \quad (106)$$

(y)

Rozwiązanie dla prędkości $v(x, y, t)$, przy warunkach początkowych $v_0(x, y) = v(x, y, t_0)$:

(z)

$$v(x, y, t) = v_0(x, y) + \left(\frac{p_p - p_k}{\rho l} + \frac{1}{2} j_0 B_0 - g \sin \theta \right) (t - t_0). \quad (107)$$

(z) (y)(x)

Ograniczenie stosowalności rozwiązań następuje jak poprzednio przez laminarność ruchu jeśli chodzi o prędkość v i wyłączenie warstwy przyściennej dla odpowiednich "x" i "y". W przypadku obu modeli charakterystyczne jest rozpędzanie cieczy na skutek tego, że siła tarcia w ruchu laminarnym może być pominięta (z wyjątkiem ww. warstwy) i cała siła napędzająca powoduje jej przyspieszenie. Ruch ustalony lub równowaga możliwe są w przypadku drugiego modelu i to jedynie wówczas, gdy wartość przyspieszenia (stała w całym przekroju rury), opisana w nawiasie wzoru (107), jest równa zeru. Odpowiada to warunkowi równowagi cieczy:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f_\lambda. \quad (108)$$

W drugim modelu równomierny rozkład gęstości siły w przekroju rury zostaje okupiony praktycznie niewygodnymi ładzeniami równomiernego doprowadzenia prądu i pola magnetycznego do cieczy, która w naszym przypadku ma temperaturę wyższą od temperatury topliwości transportowanego metalu.

6. Transport ciepła

Podstawą do rozwiązywania tego zagadnienia jest r.r. (50), [1]. Będzie ono zmodyfikowane, ponieważ dla uproszczenia rynnę z metalem będziemy teraz traktować jednowymiarowo; ale należy jednocześnie w wymienionym równaniu

dołączyć składnik uwzględniający promieniowanie termiczne, jeśli rzeczywistość rynna byłaby otwarta. Z tego punktu widzenia obojętnym będzie wybór jednego z omawianych modeli transportu cieczy. Odpowiednik r.r. (50), [1] przyjmuje postać:

$$q_0 C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) = x_0 (T_0 - T) + a_{(SB)o} T_0^4 - a_{(SB)m} T^4 + P_0 \quad (109)$$

gdzie zastosowano oznaczenia:

"T" - temperatura bezwzględna cieczy,

"T₀" - " " " otoczenia,

"a_{SB}" - stała promieniowana Stefana-Boltzmana,

$$a_{SB} = 5,77 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 (^\circ)^4}, \quad a_{SBo} = d_1 a_{SB}$$

"d₁" - szerokość cieczy w rynnie odkrytej,

"T_c" - współczynnik przewodzenia ciepła warstwy izolacyjnej,

$$x_0 = \frac{2\pi R_1}{R_2 - R_1} x_c$$

"q₀" - współczynnik liniowej gęstości właściwej, q₀ = S q,

"S" - powierzchnia przekroju cieczy (prostopadłego do długości rynny),

"P₀" - liniowa gęstość mocy,

$$P_0 = \int_1^2 (j^2(r)) dr$$

(Chodzi tu o średnią dla przekroju rynny).

W równaniu (109) został pominięty składnik spowodowany tarcie lepkiem

$v q S v \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2$, ponieważ: ($q \approx 8 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$), "Sv" - powierzchnia przekroju warstwy przyściennej, ($Sv \approx 10^{-3} m^2$, $v \approx 0,2 \frac{m}{sec}$), stąd cytowany składnik jest rzędu $1 \frac{W}{m}$. Pominięte zostało również przewodzenie ciepłe ($1 S \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$). Dla:

($x \approx 1,5 \cdot 10^{-2} \frac{kcal}{m \text{ sec} (^\circ)}$, $S \approx 0,1 m^2$, $l \approx 5m$, $T_p - T_k \approx 50^\circ$), składnik ten

jest rzędu $-10 \frac{W}{m}$. Rzędy wielkości składników, zamieszczonych po prawej stronie r. (109), są następujące: ($x_0 (T - T_0) \approx 10^4 \frac{W}{m}$), dla: ($x_c = 2 \cdot 10^{-4} \frac{kcal}{m \text{ sec} (^\circ)}$)

$R_1 \approx 0,2 m$, $R_2 \approx 0,3 m$, $T \approx 1700^\circ K$, $T_0 \approx 500^\circ K$.

Uwaga: aby nie zachodziła potrzeba szukania rozkładu temperatur otoczenia rynny, temperatura jej sąsiedztwa, np. warstwy magnetycznej, czy powietrza, została uznana za stałą i ciepło przewodzenia na zewnątrz jest opisane w przybliżeniu przytoczonym składnikiem. Włączamy do niego umownie ciepło odprowadzone przez powietrze w przypadku rynny odkrytej. Pojemność cieplna i przewodzenie wzdłużne warstwy izolacyjnej są pominięte. Składnik:

$$(a_{(SBo)_m} T^4 - a_{(SBo)_o} T_o^4 \approx 2 \cdot 10^5 \frac{W}{m}).$$

Uwaga o temperaturze otoczenia jest tu podobna, poza tym stałą promieniowania a_{SBo} należy pomniejszyć, ponieważ nie mamy do czynienia z ciałami doskonale czarnymi ([4], t. I, cz. 2, F, R.VII) i używać stałych $a_{(SBo)_m}$ i $a_{(SBo)_o}$ dla metalu i dla otoczenia.

Wreszcie dla: $((j(r))_{\text{sr}} \approx 2 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2})$ (wartość tę można otrzymać korzystając ze wzorów (8), (62), (68) dla modelu pierwszego), $(P_o \approx 5 \cdot 10^5 \frac{W}{m})$.

W rzeczywistości moc jest opisana również składnikiem o podwojonej częstotliwości ω , ale porównując go z wyrażeniem $\rho_o C_p \frac{\partial T}{\partial t}$ wzoru (109) ($C_p \approx 0,15 \frac{kcal}{kg(^{\circ})}$), otrzymujemy amplitudę zmian temperatury rzędu $10^{-3} (^{\circ})$, co moż na zaniedbać. Pominięcie ciepła wydzielonego na skutek lepkości oraz przewodzenia ciepła wzdłuż rynny jest więc uzasadnione. Korzystając z definicji pochodnej substancjalnej przekształcamy teraz r.r. (109):

$$\frac{dT}{dt} + A T + B T^4 = C, \quad (110)$$

gdzie:

$$A = \frac{x_o}{\rho_o C_p}, \quad (111)$$

$$B = \frac{a_{(SBo)_m}}{\rho_o C_p}, \quad (112)$$

$$C = \frac{P_o + x_o T_o + a_{(SBo)_o} T_o^4}{\rho_o C_p} \quad (113)$$

Aby nie komplikować rozwiązania r.r. (110) będziemy rozpatrywać bądź wyłącznie przewodzenie ciepła na zewnątrz (rynna zakryta), bądź wyłącznie promieniowanie (rynna odkryta). Postępowanie to ma uzasadnienie w przytoczonych rządach wielkości.

Dzięki wprowadzeniu pochodnej substancjalnej zmiennej T mamy teraz do czynienia z r.r. zwyczajnym (110), ale rozwiązując go, będziemy śledzili

temperaturę cząstki poruszającej się wzdłuż rynny z prędkością $v(t)$.
 O wyborze cząstki decydują będą warunki początkowe, bądź brzegowe. Później będziemy mogli uzyskać z powrotem polowy opis temperatury $T(z, t)$ wykorzystując znany już ruch cząstek. Rozważmy najpierw przypadek czystego przewodzenia ciepła do otoczenia. Równanie (110) przybierze postać:

$$\frac{dT}{dt} + A T = D, \quad (114)$$

gdzie:

$$D = \frac{P_o + \alpha_o T_o}{\rho_o c_p}. \quad (115)$$

Uwaga: jeśli chodzi o promieniowanie, to warstwa izolacyjna jest tu w przybliżeniu od wewnątrz w równowadze z metalem i na zewnątrz z otoczeniem; w bilansie ciepła dołączamy ją do metalu, stąd wzory (114), (115). Ta sama uwaga dotyczy wzoru (109). Rozwiążemy teraz r.r. (114). Jeśli cząstka w chwili t_o znajdowała się w miejscu z_{czo} ($-\frac{1}{2} < z_{czo} < \frac{1}{2}$), to zadajemy dla temperatury T warunek początkowy " $T_{t_o}(z_{czo})$ "; jeśli zaś cząstka w chwili t_p ($t_p > t_{kr}$), (rys. 3), znajdowała się w miejscu $-\frac{1}{2}$ - zadajemy warunek brzegowy " $T_{-\frac{1}{2}}(t_p)$ " lub dla: ($t_o < t_p \leq t_{kr}$) i ($z_{czo} = \frac{1}{2}$) - " $T_{\frac{1}{2}}(t_p)$ " (rys. 3). Wówczas otrzymujemy rozwiązanie r.r. (114):

$$T(t) = T_{t_o}(z_{czo}) e^{-A(t-t_o)} + (T_o + \frac{P_o}{\alpha_o}) (1 - e^{-A(t-t_o)}), \quad (116)$$

$$T(t) = T_{-\frac{1}{2}}(t_p) e^{-A(t-t_p)} + (T_o + \frac{P_o}{\alpha_o}) (1 - e^{-A(t-t_p)}). \quad (117)$$

Zakres ważności tych rozwiązań pokazany jest na rys. 3. Korzystamy teraz ze wzorów określających ruch cząstek, otrzymanych z zależności (106) lub (107) (pamiętając, że rynnę traktujemy jako pręt, operujemy średnimi wartościami przyspieszenia: " a_{cz} " i prędkości początkowej: " v_{czo} " dla przekroju rynny (wartości te są dla wszystkich przekrojów wspólne). Ze względu na składnik $v \frac{\partial T}{\partial z}$ wzoru (109) jest to słuszne w przybliżeniu dla rozkładu prędkości $v(z)$ niewiele różniącego się od jej wartości średniej).

$$z_{cz}(t, z_{czo}) = \frac{a_{cz}}{2} t^2 + (v_{czo} - a_{cz} t_o) t + \frac{a_{cz}}{2} t_o^2 - v_{czo} t_o + z_{czo}. \quad (118)$$

Z równania (118) wyliczamy " $z_{czo}(z_{cz}, t)$ " podstawiając wynik do r. (116).
 Na skutek dowolności wyboru " z_{cz} " możemy pisać " z ", stąd:

$$T(z, t) = T_{t_0} \left(z - \frac{a_{cz}}{2} t^2 - (v_{czo} - a_{cz} t_0) t - \frac{a_{cz}}{2} t_0^2 + v_{czo} t_0 \right) e^{-A(t-t_0)} + \left(T_0 + \frac{P_0}{x_0} \right) (1 - e^{-A(t-t_0)}), \quad (119)$$

dla:

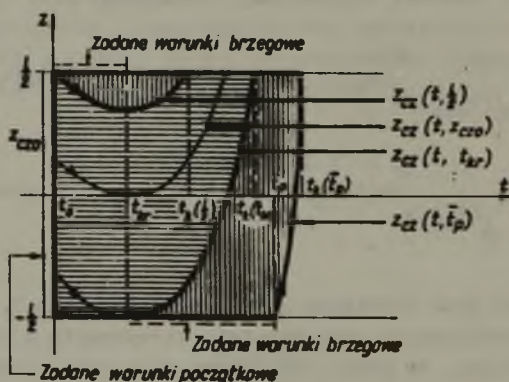
$$t_0 \leq t < t_{kr}, \quad -\frac{1}{2} \leq z \leq z_{cz}(t, \frac{1}{2})$$

oraz:

$$t_{kr} \leq t < t_k(\frac{1}{2}), \quad z_{cz}(t, t_{kr}) \leq z \leq z_{cz}(t, \frac{1}{2}) \quad (120)$$

oraz:

$$t_k(\frac{1}{2}) \leq t < t_k(t_{kr}), \quad z_{cz}(t, t_{kr}) \leq z < \frac{1}{2}, \quad (\text{rys. 3}).$$



Rys. 3

Uwaga: rys. 3 i wzory (120) skonstruowane są dla przypadku:

$$(v_{czo} < 0, a_{cz} > 0, z_{cz}(t, \frac{1}{2}) \geq -\frac{1}{2}),$$

przypadki pozostałe można podobnie zanalizować.

Można teraz przejść do polowego opisu rozkładu temperatury dla r. (117). Ruch cząstek określony jest teraz wzorem:

$$z_{cz}(t, t_p) = \frac{a_{cz}}{2} t^2 + (v_{czp} - a_{cz} t_p) t + \frac{a_{cz}}{2} t_p^2 + v_{czp} t_p - \frac{1}{2}, \quad (121)$$

gdzie:

$$v_{czp} = v_{czo} + a_{cz}(t_p - t_o). \quad (122)$$

Oznaczając:

$$b_{cz} = v_{czp} - a_{cz} t_p = v_{czo} - a_{cz} t_o, \quad (123)$$

po podstawieniu wzorów (122), (123) do wzoru (121) otrzymujemy:

$$t_p(z, t) = -\frac{b_{cz}}{a_{cz}} + \sqrt{-\frac{2}{a_{cz}} z + t^2 + 2 \frac{b_{cz}}{a_{cz}} t + \frac{b_{cz}^2}{a_{cz}^2} - \frac{1}{a_{cz}}}. \quad (124)$$

Spośród dwu znaków przed pierwiastkiem występującym we wzorze (124) wybieramy "+", ponieważ wówczas dla wartości pod pierwiastkiem większych od zera mamy: ($t_p > t_{kr}$). Następnie podstawiając wzór (124) do wzoru (117) otrzymujemy:

$$T(z, t) = T - \frac{1}{2}(t_p(z, t))^2 e^{-A(t-t_p(z, t))} + (T_o + \frac{P_o}{x_o}) (1 - e^{-A(t-t_p(z, t))}), \quad (125)$$

dla:

$$t_{kr} < t \leq t_k(t_{kr}), \quad -\frac{1}{2} \leq z < z_{cz}(t, t_{kr})$$

oraz:

$$t_k(t_{kr}) < t < \bar{t}_p, \quad -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2} \quad (126)$$

craz:

$$\bar{t}_p \leq t \leq t_k(\bar{t}_p), \quad z_{cz}(t, \bar{t}_p) \leq z \leq \frac{1}{2}, \quad (\text{rys. 3}).$$

Zbiór " t, z ", w którym o przebiegu rozwiązania decydują warunki początkowe pokazany jest na rys. 3 przez zakreskowanie poziome; dla warunków brzegowych użyte jest kreskowanie pionowe. Pominęliśmy rozpatrzenie warunków brzegowych dla: ($z_{cz} = \frac{1}{2}$), bowiem można się tu wzorować na poprzednich wynikach. Wyprowadzone wzory pozostają ważne dla: ($T > T_{krz}$) (oraz dla lepkości przytaczanego rzędu), ponieważ ciecz porusza się. Poza tym odnoszą się one do przypadku ryny jednowymiarowej: ($2R_1 \ll 1$), więc tym lepiej opisują rzeczywisty układ, im rozkład prędkości cieczy w przekroju ryny jest bardziej równomierny.

Znaczne niedokładności wystąpią więc np. w modelu pierwszym, gdy średnia wartość prędkości cząstek po przekroju jest równa zero, a jednocześnie występują cyrkulacje cieczy wzdłuż rury doprowadzające do wymiany ciepła ze zbiornikiem. Również podczas ruchu burzliwego cząstek, nie jest on opisany wzorami (118), względnie (121). Stała czasowa $\frac{1}{K}$ jest rzędu 15 godzin, więc o temperaturze cząstki, dla małych w porównaniu z nią czasów, decydują praktycznie warunki początkowe lub brzegowe (jest ona równa w przybliżeniu temperaturom $T_{to}(z_{czo})$ lub $T - \frac{1}{2}(t_p)$).

Przypadek czystego promieniowania.

Z r.r. (110) otrzymujemy:

$$\frac{dT}{dt} + B T^4 = E, \quad (127)$$

gdzie:

$$E = \frac{P_0 + a(SB_0) \circ T_0^4}{\epsilon_0 \sigma_B} \quad (128)$$

Rozwiązanie r.r. (127) podamy w postaci rozwikłanej względem " t ":

$$t = t_a + \frac{1}{2B T_u^3} \left(\ln \sqrt{\left| \frac{T_a - T_u}{T - T_u} \right| \left| \frac{T + T_u}{T_a + T_u} \right|} + \right. \\ \left. + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{T_u} \frac{T - T_a}{1 + \frac{a}{T_u^2}} \right), \quad (129)$$

gdzie:

$$T_u = \sqrt[4]{\frac{E}{B}} \quad (130)$$

oraz zmienne t_a , T_a oznaczają bądź " t_0 ", " $T_{to}(z_{czo})$ ", bądź " t_p ",

" $T - \frac{1}{2}(t_p)$ ".

Wzór (129) opisuje temperaturę poruszającej się cząstki, przejście do polowego jej opisu odbywa się jak poprzednio. Zakres stosowalności wzoru (129) również jest podobny do poprzedniego; ale jeśli zlinearyzować składnik $B T^4$ r.r. (127) w otoczeniu temperatury pracy, to stała czasowa będzie już rzędu pół godziny.

Uwaga: wzór (129) dla danego " T_a ", ($T_a \neq T_u$) opisuje temperaturę tylko w przedziałach: $T_a \leq T < T_u$ lub: $T_u < T \leq T_a$. Dla: ($T_a = T_u$), prosta: $T = T_u$ jest również krzywą całkową r.r. (127).

LITERATURA

- [1] Brodzki M.: Pewne zagadnienia teoretyczne związane z transportem cieczy za pomocą pola elektromagnetycznego. Równania magnetohydrodynamiki. "Elektryka" z. 30. 1971.
- [2] Mc Lachlan N.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. Warszawa 1964.
- [3] Cole G.H.A.: Dynamika płynów. Warszawa 1964.
- [4] Weizel W.: Fizyka teoretyczna. Warszawa 1958.
- [5] Praca zbiorowa: Teoria procesów technologicznych w odlewnictwie metalu. Warszawa 1965.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ТРАНСПОРТОМ ЖИДКОСТИ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. РЕШЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ КОНКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Резюме

В статье решено вопрос определения распределения магнитного поля, а также скорости и давления жидкости проводящей ток для двух моделей: трубы с круглым сечением с "поступательным" вращающимся полем возбужденным при помощи поверхностной линейной нагрузки, а также трубы с прямоугольным сечением с постоянным полем (по врежени).

В одном и другом случае они наполнены несжимаемой жидкостью и находятся в однородном гравитационном поле. Это осуществлено для малых скоростей движения жидкости (по сравнению со скоростью вращающегося поля в первом случае), а также добавочно ограниченных ламинарностью движения. Не рассматривался слой пристенный с большим градиентом скорости, в котором необходимо учесть вязкость жидкости.

Кроме того, рассматривалась проблема теплового транспорта, при предположении одномерного направляющего желоба, где учитывалась проводимость или излучение тепла снаружи, а не учетно слабой проводимости вдоль желоба. (Учетно конвекцию тепла и джоулево тепло). Благодаря этим сокращениям уравнения магнетогидродинамики, которые надо было решать являлись линейными (кроме части относящийся к излучению) а проблему можна разделить на три части: электромагнитную, гидродинамическую и тепловую, которые можна решать в этой же очереди.

ON SOME THEORETICAL PROBLEMS JOINED WITH FLUID TRANSPORT BY
MEANS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD,
SOLUTION OF EQUATION OF CONCRETE MODELS

S u m m a r y

In this article there is solved the problem of reckoning the electro-magnetic field distribution and speed and pressure of a fluid conducting electric current for two models: a tube of a round section with a "progressive" rotating field excited by the surface "electric loading" and a tube of a rectangular section with a constant field (referring to time).

In both cases they are completely filled with an incompressible fluid and placed in a homogeneous field of gravity. This is carried out for low fluid speeds (in comparison with the rotating field speed in the first case) and additionally limited by the motion laminarity.

There has been out of consideration the close-to the wall layer with great speed gradients where there is necessary to take into consideration the fluid's viscosity. Moreover there is considered the problem of heat transport by assumption the one dimensional guidance gutter where was taken into consideration the conductivity in a radiation of heat outwards and where was left the small conduction along the gutter (there has been taken into consideration the convection heat and Joule's heat).

Thanks to these simplifications the magnetohydrodynamic equations which were to be solved are linear (except this part which concerns radiation) and this problem can be divided into three parts: electromagnetic, hydrodynamic and heat part which can be solved in the mentioned sequence.