

ZBIGNIEW BORTLICZEK  
Katedra Technologii Urządzeń Automatyki

OPIS MATEMATYCZNY  
DWUFAZOWEGO SILNIKA ASYNCHRONICZNEGO  
Z WIRNIKIEM KLATKOWYM LUB PUSZKOWYM

Streszczenie. Równania różniczkowe dwufazowej maszyny asynchronicznej, wyprowadzone w [1], przekształca się do postaci umożliwiającej obliczanie transmitancji operatorowej dwufazowego silnika asynchronicznego, wykorzystywanego w układach automatyki jako sterowany silnik wykonawczy. W pracy rozpatrywany jest ogólny przypadek sterowania amplitudowo-fazowego.

### 1. Równania wyjściowe

Właściwości statyczne i dynamiczne dwufazowej maszyny asynchronicznej, wykorzystywanej jako dwufazowy asynchroniczny silnik wykonawczy (dalej - DAS) opisują równania (52) i (53) [1], w ogólnym przypadku zmiennej prędkości kątowej - nieliniowe. Równania te - podobnie jak dla dwufazowej prądnicy asynchronicznej [2] - można zlinearyzować dla małych przyrostów wielkości wejściowej.

Zgodnie z rys. 1 przyrosty wielkości wyjściowych DAS, wywołane małym przyrostem wielkości wejściowej, zapisać można następująco<sup>x)</sup>:

- jeżeli:

$$v_q^s = v_{q0}^s + \Delta v_q^s$$

przy

$$v_d^s = v_{d0}^s = \text{const}$$

$$M = M_0 = \text{const} \quad (1)$$

to

$$v_d^s = v_{d0}^s + \Delta v_d^s \quad v_d^r = v_{d0}^r + \Delta v_d^r$$

$$v_q^s = v_{q0}^s + \Delta v_q^s \quad v_q^r = v_{q0}^r + \Delta v_q^r$$

oraz

$$\omega^r = \omega_0^r + \Delta \omega^r$$

<sup>x)</sup> Por. DODATEK do niniejszej pracy, zawierający wykaz ważniejszych oznaczeń.

Uwzględniając zależności (1) w równaniach (52) i (53) [1] uzyskuje się następujący podwójny układ równań wyjściowych DAS:

$$\begin{bmatrix} v_{do}^S \\ v_{qo}^S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/\sigma\tau^S)+D & 0 & -k_a^R/\sigma\tau^S & 0 \\ 0 & (1/\sigma\tau^S)+D & 0 & -k_b^R/\sigma\tau^S \\ -k_a^S/\sigma\tau^R & 0 & (1/\sigma\tau^R)+D & n\omega_o^R \\ 0 & -k_b^S/\sigma\tau^R & -n\omega_o^R & (1/\sigma\tau^R)+D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{do}^S \\ \psi_{qo}^S \\ \psi_{do}^R \\ \psi_{qo}^R \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$M_o = B \omega_o^R - \frac{n}{\sigma L^R} (k_b^S \psi_{do}^R \psi_{qo}^S - k_a^S \psi_{qo}^R \psi_{do}^S) \quad (3)$$

oraz:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v_q^S \\ -n\psi_{qo}^R \Delta\omega^R \\ n\psi_{do}^R \Delta\omega^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/\sigma\tau^S)+D & 0 & -k_a^R/\sigma\tau^S & 0 \\ 0 & (1/\sigma\tau^S)+D & 0 & -k_b^R/\sigma\tau^S \\ -k_a^S/\sigma\tau^R & 0 & (1/\sigma\tau^R)+D & n\omega_o^R \\ 0 & -k_b^S/\sigma\tau^R & -n\omega_o^R & (1/\sigma\tau^R)+D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\psi_d^S \\ \Delta\psi_q^S \\ \Delta\psi_d^R \\ \Delta\psi_q^R \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$0 = (JD + B) \Delta\omega^R - \frac{n}{\sigma L^R} \left[ k_b^S (\psi_{do}^R \Delta\psi_q^S + \psi_{qo}^S \Delta\psi_d^R) - k_a^S (\psi_{qo}^R \Delta\psi_d^S + \psi_{do}^S \Delta\psi_q^R) \right] \quad (5)$$

przy czym równania (2) i (3) opisują stan ustalony DAS, równania (4) i (5) - stan nieustalony wywołany małym przyrostem wielkości wejściowej.

## 2. Możliwości sterowania DAS

Sterowanie DAS polega - jak wiadomo - na zmianie stopnia asymetrii zasilania uzwojeń stojana maszyny. W praktyce zasadę tą realizuje się zmieniając - przy stałej wartości napięcia zasilającego uzwojenia wzbudzenia - amplitudę lub fazę napięcia sterującego. Mówi się w związku z tym o sterowaniu amplitudowym i fazowym DAS, co można sprecyzować zapisując zależność między napięciami wzbudzającymi i sterującymi w postaci:

$$V_S = \alpha \cdot \mathcal{X} \cdot V_W \cdot e^{-j\beta} \quad (6)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{|V_B|}{x|V_W|} \quad (7)$$

$\alpha$  - współczynnik sygnału,

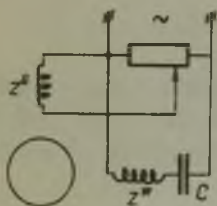
$\psi$  - kąt przesunięcia fazowego między napięciami

oraz

$$x = \frac{\xi_a \cdot z_B}{\xi_w \cdot z_W} \quad (8)$$

- współczynnik transformacji.

W przypadku sterowania amplitudowego  $\psi = \text{const}$  zaś zmianę stopnia asymetrii zasilania uzyskuje się przez zmianę współczynnika sygnału  $\alpha$  tj. przez zmianę amplitudy napięcia sterującego. Z kolei przy sterowaniu fazowym  $\alpha = \text{const}$ , zaś kąt  $\psi$  zmienia się w sposób ciągły w określonych granicach. Zakłada się przy tym, że przy sterowaniu amplitudowym zmiana  $\alpha$  nie wpływa na wartość  $\psi$ , przy sterowaniu fazowym zaś - zmiana  $\psi$  nie wpływa na wartość  $\alpha$ .



Rys. 2

Istnieje ponadto możliwość sterowania DAS przez równoczesną zmianę współczynnika sygnału  $\alpha$  i kąta fazowego  $\psi$ . Jest to tzw. sterowanie amplitudowo-fazowe, którego typowym przykładem jest układ zasilania uzwojeń DAS z kondensatorem włączonym w obwód uzwojenia wzbudzenia (rys. 2). Z drugiej strony sterowanie amplitudowo-fazowe stanowi sposób sterowania DAS wystarczająco ogólny, by sterowanie amplitudowe i fazowe móc rozpatrywać jako jego przypadki

szczególne. Z tego względu dalsza analiza dotyczyć będzie właściwości DAS sterowanego amplitudowo-fazowo.

### 3. Stan ustalony DAS

A. Stan ustalony w obwodach elektrycznych DAS opisuje układ równań różniczkowych liniowych (2), w których

$$\omega_0^* = \text{const} \quad (9)$$

Uwzględniając (14) i (15) [2] oraz zakładając, że:

$$\left. \begin{aligned} v_{a0}^s &= |V_{a0}^s| \cdot \cos \omega t = \text{Re} \left\{ |V_{a0}^s| \cdot e^{j\omega t} \right\} \\ v_{b0}^s &= |V_{b0}^s| \cdot \cos(\omega t - \psi_0) = \text{Re} \left\{ |V_{b0}^s| \cdot e^{j(\omega t - \psi_0)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

oznaczając dalej, że współczynnik sygnału:

$$\alpha_o = \frac{|v_{bo}^s|}{z \cdot |v_{ao}^s|} \quad (11)$$

układ równań (2) zapisać można następująco:

równanie (12) - patrz str. 77

Wobec spełnienia warunku (9) rozwiązania (12) poszukiwać można w postaci:

$$\begin{bmatrix} v_{do}^s \\ v_{qo}^s \\ v_{do}^r \\ v_{qo}^r \end{bmatrix} = \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} v_{do}^s \\ v_{qo}^s \\ v_{do}^r \\ v_{qo}^r \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} \quad (13)$$

gdzie:  $v_{do}^s, v_{qo}^s, v_{do}^r, v_{qo}^r$  - poszukiwane wielkości zespolone.

Podstawiając (13) do (12), wykonując następnie różniczkowanie określone operatorem  $D$  oraz wprowadzając parametry względne (21) i (22) [2] uzyskać można następujący układ równań algebraicznych liniowych, opisujących stan ustalony w obwodach elektrycznych DAS:

równanie (14) - patrz str. 77

B. Moment elektromagnetyczny rozwijany przez DAS w stanie ustalonym wyraża zależność (3), którą - po uwzględnieniu (13) - przekształcić można następująco:

$$\begin{aligned} m_e &= \frac{n}{\sigma L^2} \cdot \left[ k_b^s \cdot \operatorname{Re}(v_{do}^r \cdot e^{j\omega t}) \cdot \operatorname{Re}(v_{qo}^s \cdot e^{j\omega t}) - \right. \\ &\quad \left. - k_a^s \cdot \operatorname{Re}(v_{qo}^r \cdot e^{j\omega t}) \cdot \operatorname{Re}(v_{do}^s \cdot e^{j\omega t}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{\sigma L^2} \left\{ k_b^s \left[ \operatorname{Re}(v_{do}^r \cdot v_{qo}^s \cdot e^{j2\omega t}) + \operatorname{Re}(v_{do}^r \cdot v_{qo}^{s*}) \right] - \right. \\ &\quad \left. - k_a^s \cdot \left[ \operatorname{Re}(v_{qo}^r \cdot v_{do}^s \cdot e^{j2\omega t}) + \operatorname{Re}(v_{qo}^r \cdot v_{do}^{s*}) \right] \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c} |v_{ao}^s| \\ \alpha_0 x |v_{ao}^s| e^{-j\dot{\lambda}} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \cdot e^{j\omega t} = \left[ \begin{array}{c} (1/\sigma\tau^s) + D \\ 0 \\ -k_B^s/\sigma\tau^s \\ 0 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} -k_B^s/\sigma\tau^s \\ 0 \\ (1/\sigma\tau^s) + D \\ -n\omega_0^s \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -k_B^s/\sigma\tau^s \\ n\omega_0^s \\ (1/\sigma\tau^s) + D \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} v_{do}^s \\ v_{qo}^s \\ v_{do}^r \\ v_{qo}^r \end{array} \right] \quad (12)
 \end{aligned}$$

Re

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c} |v_{ao}^s| \\ \alpha_0 x |v_{ao}^s| e^{-j\dot{\lambda}} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] = \omega \cdot \left[ \begin{array}{c} (1/\sigma\tau^s) + j \\ 0 \\ -k_B^s/\sigma\tau^s \\ 0 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} -k_B^s/\sigma\tau^s \\ 0 \\ (1/\sigma\tau^s) + j \\ -\dot{\gamma}_0 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -k_B^s/\sigma\tau^s \\ \dot{\gamma}_0 \\ (1/\sigma\tau^s) + j \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} v_{do}^s \\ v_{qo}^s \\ v_{do}^r \\ v_{qo}^r \end{array} \right] \quad (14)
 \end{aligned}$$

Wartość średnia<sup>x)</sup> momentu elektromagnetycznego, odpowiadająca składowej stałej wyrażenia (15), wynosi więc:

$$M_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{\epsilon L^2} \left[ k_b^s \cdot \operatorname{Re}(V_{do}^r \cdot V_{qo}^{s*}) - k_a^s \cdot \operatorname{Re}(V_{qo}^r \cdot V_{do}^{s*}) \right] \quad (16)$$

gdzie:  $V_{do}^{s*}, V_{do}^{r*}, V_{qo}^{s*}, V_{qo}^{r*}$  - wielkości zespolone sprzężone, które można określić rozwiązując układ równań (14).

#### 4. Stan nieustalony DAS

A. Stan równowagi dynamicznej w obwodach elektrycznych DAS opisuje układ równań różniczkowych liniowych (4), w których dalej

$$\omega_o^r = \text{const} \quad (17)$$

Sygnał wejściowy  $\Delta v_q^s$  w ogólnym przypadku sterowania amplitudowo-fazowego określić można wykorzystując zależności (1) i (10) oraz (15) i (25) [2]. Na tej podstawie będzie:

$$\begin{aligned} v_b^s &= v_{bo}^s + \Delta v_b^s = (|v_{bo}^s| + |\Delta v_b^s|) \cdot \cos[\omega t - (j_o + \Delta j)] = \\ &= (|v_{bo}^s| + |\Delta v_b^s|) [\cos(\omega t - j_o) \cdot \cos \Delta j + \sin(\omega t - j_o) \cdot \sin \Delta j] \end{aligned} \quad (18)$$

skąd, po uwzględnieniu, że

$$\begin{aligned} \cos \Delta j &\approx 1 \\ \sin \Delta j &\approx \Delta j \end{aligned} \quad (19)$$

i pominięciu iloczynów przyrostów:

$$\begin{aligned} \Delta v_b^s &= |\Delta v_b^s| \cdot \cos(\omega t - j_o) + \Delta j \cdot |v_{bo}^s| \cdot \sin(\omega t - j_o) = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ |\Delta v_b^s| \cdot e^{j(\omega t - j_o)} - j \Delta j \cdot |v_{bo}^s| \cdot e^{j(\omega t - j_o)} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ x |v_{bo}^s| \cdot (\Delta \alpha - j \alpha_o \cdot \Delta j) \cdot e^{j(\omega t - j_o)} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_o &= \frac{|v_{bo}^s|}{x |v_{ao}^s|} \\ \Delta \alpha &= \frac{|\Delta v_b^s|}{x |v_{ao}^s|} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

<sup>x)</sup> Z wyrażenia (15) wynika, że warunek (9) należałoby traktować bądź jako przybliżenie, bądź odnosić go do wartości średniej prędkości kątowej.



Uwzględniając (20) oraz (21) układ równań (4) przepisać można następująco:

równanie (22) - patrz str. 81

Wobec spełnienia warunku (17) rozwiązania układu (22) poszukiwać można w postaci:

$$\begin{bmatrix} \Delta \Psi_d^s \\ \Delta \Psi_q^s \\ \Delta \Psi_d^r \\ \Delta \Psi_q^r \end{bmatrix} = \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \Delta \Psi_d^s(t) \\ \Delta \Psi_q^s(t) \\ \Delta \Psi_d^r(t) \\ \Delta \Psi_q^r(t) \end{bmatrix} \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad (23)$$

gdzie:  $\Delta \Psi_d^s(t)$ ,  $\Delta \Psi_q^s(t)$ ,  $\Delta \Psi_d^r(t)$ ,  $\Delta \Psi_q^r(t)$  - niewiadome obwiednie przebiegów sinusoidalnych  $\Delta \Psi$  w postaci zespolonej.

Podstawiając (23) do (22) i wykonując różniczkowanie określone operatorem D uzyskać można wynik następujący:

równanie (24) - patrz str. 81

Zakładając z kolei, że transformaty Laplace'a wszystkich zmiennych po lewej i prawej stronie równania (24) istnieją, podstawiając  $D \hat{=} p$  oraz wprowadzając parametry względne (21), (22), (30) i (31) [2], uzyskuje się następującą postać operatorową równań różniczkowych DAS:

równanie (25) - patrz str. 81

B. Wyrażenia (13) i (23) należy z kolei uwzględnić w równaniu na moment elektromagnetyczny DAS rozwijany w stanie nieustalonym. Zgodnie z (5) będzie:

$$\begin{aligned} \Delta m_e &= \frac{n}{\sigma L^r} \left[ k_b^s (\Psi_{do}^r \cdot \Delta \Psi_q^s + \Psi_{qo}^s \cdot \Delta \Psi_d^r) - k_a^s (\Psi_{qo}^r \cdot \Delta \Psi_q^s + \Psi_{do}^s \cdot \Delta \Psi_q^r) \right] = \\ &= \frac{n}{\sigma L^r} \left\{ k_b^s \left[ \text{Re}(\Psi_{do}^r \cdot e^{j\omega t}) \cdot \text{Re}[\Delta \Psi_q^s(t) \cdot e^{j\omega t}] \right] + \right. \\ &\quad \left. + \text{Re}(\Psi_{qo}^s \cdot e^{j\omega t}) \cdot \text{Re}[\Delta \Psi_d^r(t) \cdot e^{j\omega t}] \right\} - \\ &\quad - k_a^s \left\{ \text{Re}(\Psi_{qo}^r \cdot e^{j\omega t}) \cdot \text{Re}[\Delta \Psi_q^s(t) \cdot e^{j\omega t}] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{do}^s \cdot e^{j\omega t} \cdot \operatorname{Re} \left[ \Delta \mathbf{v}_d^s(t) \cdot e^{j\omega t} \right] \right] = \\
& = \frac{n}{2\sigma L^2} \left\{ k_b^s \left[ \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{do}^r \cdot \Delta \mathbf{v}_q^s(t) \cdot e^{j2\omega t} \right] + \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{do}^{r*} \cdot \Delta \mathbf{v}_q^s(t) \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{qo}^s \cdot \Delta \mathbf{v}_d^r(t) \cdot e^{j2\omega t} \right] + \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{qo}^{s*} \cdot \Delta \mathbf{v}_d^r(t) \right] \right\} - \\
& - k_a^s \left\{ \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{qo}^r \cdot \Delta \mathbf{v}_d^s(t) \cdot e^{j2\omega t} \right] + \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{qo}^{r*} \cdot \Delta \mathbf{v}_d^s(t) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{do}^s \cdot \Delta \mathbf{v}_q^r(t) \cdot e^{j2\omega t} \right] + \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{do}^{s*} \cdot \Delta \mathbf{v}_q^r(t) \right] \right\} \quad (26)
\end{aligned}$$

Wartość średnia momentu elektromagnetycznego:

$$\begin{aligned}
\Delta M_e &= \frac{n}{2\sigma L^2} \left\{ k_b^s \left[ \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{do}^{r*} \cdot \Delta \mathbf{v}_q^s(t) \right] + \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{qo}^{s*} \cdot \Delta \mathbf{v}_d^r(t) \right] \right\} - \\
& - k_a^s \left\{ \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{qo}^{r*} \cdot \Delta \mathbf{v}_d^s(t) \right] + \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{do}^{s*} \cdot \Delta \mathbf{v}_q^r(t) \right] \right\} = \\
& = \frac{n}{2\sigma L^2} \left\{ k_b^s \cdot \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{do}^{r*} \cdot \Delta \mathbf{v}_q^s(t) + \mathbf{v}_{qo}^{s*} \cdot \Delta \mathbf{v}_d^r(t) \right] - \right. \\
& \quad \left. - k_a^s \cdot \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{qo}^{r*} \cdot \Delta \mathbf{v}_d^s(t) + \mathbf{v}_{do}^{s*} \cdot \Delta \mathbf{v}_q^r(t) \right] \right\} \quad (27)
\end{aligned}$$

lub w postaci operatorowej:

$$\begin{aligned}
\Delta M_e(s) &= \frac{n}{2\sigma L^2} \left\{ k_b^s \cdot \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{do}^{r*} \cdot \Delta \mathbf{v}_q^s(s) + \mathbf{v}_{qo}^{s*} \cdot \Delta \mathbf{v}_d^r(s) \right] - \right. \\
& \quad \left. - k_a^s \cdot \operatorname{Re} \left[ \mathbf{v}_{qo}^{r*} \cdot \Delta \mathbf{v}_d^s(s) + \mathbf{v}_{do}^{s*} \cdot \Delta \mathbf{v}_q^r(s) \right] \right\} \quad (28)
\end{aligned}$$

gdzie:  $\mathbf{v}_{do}^{s*}$ ,  $\mathbf{v}_{qo}^{s*}$ ,  $\mathbf{v}_{do}^{r*}$ ,  $\mathbf{v}_{qo}^{r*}$  - jak w równaniach (14) ale wartości sprzężone, zaś  $\Delta \mathbf{v}_d^s(s)$ ,  $\Delta \mathbf{v}_q^s(s)$ ,  $\Delta \mathbf{v}_d^r(s)$ ,  $\Delta \mathbf{v}_q^r(s)$  - wielkości zespolone w postaci operatorowej, które można obliczyć rozwiązując układ równań (25).



$$\text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x \left| \begin{matrix} V_{g0}^B \\ V_{g0}^B \end{matrix} \right. (\Delta\alpha - j\alpha_0 \Delta\beta) e^{-j\beta_0} \\ -nV_{q0}^B \Delta\omega^T \\ nV_{d0}^B \Delta\omega^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} (1/\sigma\tau^B) + D & 0 & -k_B^T/\sigma\tau^B & 0 \\ 0 & (1/\sigma\tau^B) + D & 0 & -k_B^T/\sigma\tau^B \\ -k_B^B/\sigma\tau^T & 0 & (1/\sigma\tau^T) + D & n\omega_0^T \\ 0 & -k_B^B/\sigma\tau^T & -n\omega_0^T & (1/\sigma\tau^T) + D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_{d0}^B \\ \Delta V_{q0}^B \\ \Delta V_{d0}^T \\ \Delta V_{q0}^T \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x \left| \begin{matrix} V_{g0}^B \\ V_{g0}^B \end{matrix} \right. (\Delta\alpha - j\alpha_0 \Delta\beta) e^{-j\beta_0} \\ -nV_{q0}^B \Delta\omega^T \\ nV_{d0}^B \Delta\omega^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/\sigma\tau^B) + D + j\omega & 0 & -k_B^T/\sigma\tau^B & 0 \\ 0 & (1/\sigma\tau^B) + D + j\omega & 0 & -k_B^T/\sigma\tau^B \\ -k_B^B/\sigma\tau^T & 0 & (1/\sigma\tau^T) + D + j\omega & n\omega_0^T \\ 0 & -k_B^B/\sigma\tau^T & -n\omega_0^T & (1/\sigma\tau^T) + D + j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_{d0}^B(t) \\ \Delta V_{q0}^B(t) \\ \Delta V_{d0}^T(t) \\ \Delta V_{q0}^T(t) \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x \left| \begin{matrix} V_{g0}^B \\ V_{g0}^B \end{matrix} \right. (\Delta\alpha - j\alpha_0 \Delta\beta) e^{-j\beta_0} \\ -nV_{q0}^B \Delta v(s) \\ nV_{d0}^B \Delta v(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/\sigma\tau^B) + s + j & 0 & -k_B^T/\sigma\tau^B & 0 \\ 0 & (1/\sigma\tau^B) + s + j & 0 & -k_B^T/\sigma\tau^B \\ -k_B^B/\sigma\tau^T & 0 & (1/\sigma\tau^T) + s + j & v_0 \\ 0 & -k_B^B/\sigma\tau^T & -v_0 & (1/\sigma\tau^T) + s + j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_{d0}^B(s) \\ \Delta V_{q0}^B(s) \\ \Delta V_{d0}^T(s) \\ \Delta V_{q0}^T(s) \end{bmatrix} \quad (25)$$

## 5. Zakończenie

W pracy wyprowadzono równania wyjściowe dla analizy właściwości statycznych [równania (14) i (16)] i dynamicznych [równania (25) i (28)] dwufazowego silnika asynchronicznego w ogólnym przypadku sterowania amplitudowo-fazowego.

Równania opisujące stan ustalony i nieustalony DAS w szczególnych przypadkach sterowania amplitudowego i fazowego można uzyskać, kładąc w wymienionych równaniach bądź  $\Delta\beta = 0$  (sterowanie amplitudowe), bądź  $\Delta\alpha = 0$  (sterowanie fazowe).

## LITERATURA

- [1] Bortliczek Z.: Opis matematyczny dwufazowej maszyny asynchronicznej z wirnikiem klatkowym lub puszkowym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka, 1971, z. 17.
- [2] Bortliczek Z.: Opis matematyczny dwufazowej prądnicy asynchronicznej z wirnikiem klatkowym lub puszkowym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka, z. 29, 1971.

## DODATEK

### Wykaz ważniejszych oznaczeń

$a$	- wartość chwilowa,
$A =  A  \cdot e^{j\alpha}$	- liczba zespolona,
$A^*$	- liczba zespolona sprzężona z $A$ ,
$t$	- czas,
$D = d/dt$	- operator Heaviside'a,
$v$	- napięcie elektryczne,
$i$	- prąd elektryczny,
$\Psi$	- liniozwoje,
$f$	- częstotliwość,
$\omega = 2\pi f$	- pulsacja,
$n$	- liczba par biegunów fazy DAS,
$z$	- liczba zwojów fazy DAS,
$\xi$	- współczynnik uzwojenia,
$\chi$	- współczynnik transformacji,
$R$	- rezystancja,
$L$	- indukcyjność,
$k$	- współczynnik sprzężenia magnetycznego,
$\sigma$	- współczynnik rozproszenia magnetycznego,
$\tau$	- stała czasowa,
$T = \omega\tau$	- względna stała czasowa,

- $\theta$  - kąt obrotu wirnika DAS,  
 $\omega^r = D\theta$  - prędkość kątowna wirnika DAS,  
 $\dot{\nu} = n\omega^r/\omega$  - względna prędkość kątowna wirnika DAS,  
 $M$  - moment obrotowy doprowadzony z zewnątrz,  
 $M_e$  - moment elektromagnetyczny DAS,  
 $J$  - moment bezwładności wirnika DAS,  
 $B$  - oporność mechaniczna.

Indeksy przy wielkościach dotyczą:

górne: s - stojana,  
 r - wirnika,

dolne: a - uzwojenie DAS rzeczywistego w osi a,  
 b - uzwojenia DAS rzeczywistego w osi b,  
 d - uzwojenia DAS w osi a po transformacji,  
 q - uzwojenia DAS w osi b po transformacji,  
 o - stanu ustalonego.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХФАЗНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ  
 С КОРОТКОЗАМКНУТЫМ ИЛИ ПОЛЕМ РОТОРА

### Резюме

Дифференциальные уравнения двухфазной асинхронной машины, даны в (1), преобразуются к форме удобной для расчета передаточной функции двухфазного асинхронного двигателя, используемого в системах автоматического регулирования как управляемый серводвигатель. В работе анализируется общий случай амплитудно-фазного управления.

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF TWO-PHASE ASYNCHRONOUS MOTOR  
 WITH SQUIRREL-CAGE OR DRAG-CUP ROTOR

### Summary

Differential equations of two-phase asynchronous machine introduced in [1] are transformed into the form which allows to compute transfer function of the two-phase asynchronous motor used in automatic control systems as servomotor. In the paper a general case of amplitude-phase control is considered.