

Rafał DOMAGAŁA\*  
Politechnika Śląska

## STABILNOŚĆ ZESPOLONYCH PRĘTÓW OSIOWO ŚCISKANYCH

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono analizę lepko-sprężystych prętowych elementów zespolonych o stałym przekroju poprzecznym. Rozważono stan osiowego ściskania wywołanego obciążeniem statycznym. Zamieszczono równania problemu utraty stabilności pręta przy użyciu siły krytycznej.

## STABILITY OF AXIAL COMPRESSED COMPOSITED RODS

**Summary.** The analysis of viscoelastic composited rod with regular cross-section was introduced in the paper. Compressed axial statically strength was considered. The equation of problem of loss stability of rod with critical force was presented.

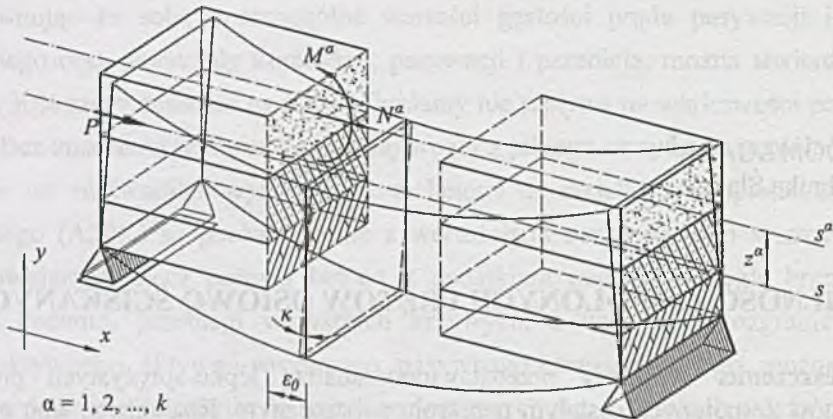
### 1. Założenia

Podejście do analizy stabilności pręta warstwowego jest procesem bardzo złożonym i zupełnie odmiennym od podejścia w klasycznej mechanice budowli.

W przedstawionej analizie przyjęto, że pręt w całości spełnia wszystkie założenia klasycznej, technicznej teorii zginania prętów prostych, tj. m.in. hipotezę płaskich przekrojów. Założono też, iż przekrój posiada jedną oś symetrii, prostopadłą do wektora momentu zginającego. Do analizy problemu posłużono się modelem warstwowego pręta statycznie wyznaczalnego, którego przekrój poprzeczny składa się z  $k$  warstw lepko-sprężystych idealnie zespolonych, bez możliwości poślizgów, obciążonego siłą  $P$  o stałej wartości.

---

\* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Jan Kubik.



Rys. 1. Schemat analizowanej konstrukcji warstwowej  
Fig. 1. Diagram of analyzed layered structure

## 2. Równania problemu

### 2.1. Geometria deformacji

Przyjęto, iż w wyniku działania obciążeń zewnętrznych w dowolnej warstwie  $\alpha$  powstaną odkształcenia wywołane zginaniem:

$$\varepsilon^\alpha(z^\alpha, t) = \kappa(t)z^\alpha, \quad \varepsilon_0^\alpha(z^\alpha, t) = \kappa_0 z^\alpha \quad (1)$$

natomiast przemieszczenia pręta będą sumą ugięć wstępnych  $w_0$  i ugięć wywołanych zginaniem  $\bar{w}$ :

$$w = w_0 + \bar{w}, \quad \kappa = \kappa_0 + \bar{\kappa} \quad (2)$$

gdzie:

- $\varepsilon^\alpha$  – odkształcenie warstwy  $\alpha$ ,
- $z^\alpha$  – odległość środka ciężkości warstwy  $\alpha$  do zmiennej w czasie osi obojętnej,
- $\kappa, \kappa_0, \bar{\kappa}$  – krzywizna całkowita, początkowa oraz krzywizna wywołana zginaniem,
- $w, w_0, \bar{w}$  – ugięcie całkowite pręta, ugięcie wstępne, ugięcie wywołane zginaniem.

### 2.2. Równania fizyczne

Opis równań stanu określono, bazując na nieinwariantnej teorii dziedziczności [2]:

$$\sigma^\alpha(t) = \frac{1}{E^\alpha(t)(1-\omega^\alpha(t^*))} \left( \sigma^\alpha(t) + \int_0^t \sigma^\alpha(\tau) K^\alpha(t, \tau) d\tau \right) + \varepsilon_0^\alpha \quad (3)$$

gdzie:

$t, \tau, t^*$  – czas (obserwacji), czas (wiek materiału), czas uszkodzenia materiału,  
 $\omega^\alpha(t^*)$  – uszkodzenie materiału warstwy  $\alpha$ , które zmienia się zgodnie z równaniem:

$$\frac{d\omega}{dt^*} = f(t^*, |\sigma|, \dots), \quad \text{gdzie } \omega_0 = 0, \quad t^* \ll t \quad (4)$$

$K^\alpha(t, \tau)$  – jądro pełzania warstwy  $\alpha$ ,

$E^\alpha(t)$  – moduł sprężystości warstwy  $\alpha$ .

Wyrażenie (3), bazujące na nieinwariantnej teorii dziedziczności, zapisać można również w postaci równania typu spłotu:

$$\sigma^\alpha(t) = \left[ \psi^\alpha(t, \tau) (1 - \omega^\alpha(t^*)) \right] * d\varepsilon^\alpha(t), \quad \text{gdzie } d\varepsilon^\alpha(t) = d\kappa z^\alpha \quad (5)$$

gdzie:

$\psi^\alpha(t, \tau)$  – funkcja relaksacji warstwy  $\alpha$ ; przy czym  $\psi^\alpha(t, t) = E^\alpha(t)$ ,

\* – iloczyn spłotowy  $\left( f * df = \int_0^t f(t-\tau) df(\tau) \right)$ .

Szczegółowa postać jądra  $K^\alpha$  jest różna dla różnych materiałów i określa się ją, opierając się na danych z badań doświadczalnych. Jądro to dziedziczy wcześniejszą historię obciążenia lub odkształcenia.

### 2.3. Siły przekrojowe

Siły wewnętrzne poszczególnych warstw przekroju wyznaczono z definicji tych sił. Siłę osiową  $N$  oraz moment zginający  $M$  całego przekroju otrzymano przez zsumowanie wartości sił w poszczególnych warstwach:

$$N = \sum_\alpha S^\alpha (1 - \omega^\alpha) \psi^\alpha * d\kappa, \quad M = \sum_\alpha I^\alpha (1 - \omega^\alpha) \psi^\alpha * d\kappa \quad (6)$$

gdzie:

$S^\alpha$  – moment statyczny warstwy  $\alpha$ ,

$I^\alpha$  – moment bezwładności warstwy  $\alpha$  liczony względem osi obojętnej.

Eliminując ze wzorów (5) i (6) iloczyn spłotowy  $(1 - \omega^\alpha) \psi^\alpha * d\kappa$ , otrzymano równość na rozkład naprężeń w warstwie  $\alpha$ :

$$\frac{\sigma^\alpha}{z^\alpha} = \frac{M^\alpha}{I^\alpha} \rightarrow \sigma^\alpha = \frac{M^\alpha z^\alpha}{I^\alpha} \quad (7)$$

Nieznaną wielkością w powyższym wzorze pozostaje moment cząstkowy  $M^\alpha$ . Rozdział momentu zginającego na poszczególne warstwy pręta otrzymano po założeniu, że krzywizny poszczególnych warstw i całego pręta są takie same:

$$M^\alpha = I^\alpha (1 - \omega^\alpha) \psi^\alpha * \left[ \sum_\alpha \left( (I^\alpha)^{-1} * \left( (1 - \omega^\alpha) \psi^\alpha \right)^{-1} \right) \right] * M \quad (8)$$

### 3. Stabilność pręta ściskanego siłą o stałej wartości

#### 3.1. Równania stabilności

Po uwzględnieniu równań sił przekrojowych, strony geometrycznej i strony fizycznej otrzymano zależność opisującą krzywiznę wywołaną zginaniem:

$$\tilde{\kappa} = \left( \sum_\alpha \psi^\alpha (1 - \omega^\alpha) I^\alpha \right)^{-1} \left( -M - \sum_\alpha K^\alpha(t, \tau) * M^\alpha \right) \quad (9)$$

Następnie:

- oznaczając strzałkę ugięcia całkowitego jako  $f(t)$ , ugięcia wstępnego jako  $f_0$  oraz przyjmując linię ugięcia pręta w postaci:

$$w = f(t) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (10)$$

- uwzględniając, że:

$$M = Pw = Pf(t) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (11)$$

- przyjmując, że będziemy wyznaczać wartość maksymalnego ugięcia w połowie rozpiętości pręta, otrzymano:

$$-f(t) \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 + f_0 \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 = \left( \sum_\alpha \psi^\alpha (1 - \omega^\alpha) I^\alpha \right)^{-1} \quad (12)$$

$$\left\{ -Pf(t) - \sum_\alpha \left[ K^\alpha(t, \tau) * I^\alpha (1 - \omega^\alpha) \psi^\alpha * \left( \sum_\alpha \left( (I^\alpha)^{-1} \left[ (1 - \omega^\alpha) \psi^\alpha \right]^{-1} \right) \right) \right] * Pf(t) \right\}$$

Przyjmując dalej:

- że w pręcie nie występują wstępne trwałe ugięcia pręta, czyli  $f_0 = 0$ ,
- zależność na siłę krytyczną dla pręta w postaci:

$$P_e = \pi^2 \sum_\alpha \left( \psi^\alpha (1 - \omega^\alpha) I^\alpha \right) \cdot l^{-2} \quad (13)$$

otrzymano:

$$f(t) \left( \frac{P_e}{P} - 1 \right) = \int_0^t \sum_{\alpha} \left\{ K^{\alpha}(t, \tau) * I^{\alpha} (1 - \omega^{\alpha}) \psi^{\alpha} * \left[ \sum_{\alpha} \left( (I^{\alpha})^{-1} [(1 - \omega^{\alpha}) \psi^{\alpha}]^{-1} \right) \right] \right\} f(\tau) d\tau \quad (14)$$

Dalej przyjęto, iż warstwy opisane zostaną modelem inwariantnej teorii dziedziczności. W modelu takim miara pełzania jest funkcją różnicy  $\theta = t - \tau$ . W klasie takich materiałów mieści się model standardowy oraz Kelvina. W tak przyjętym modelu wyrażenie (3) można przekształcić do równania różniczkowego o stałych współczynnikach zależnych od różnicy argumentów.

Uwzględniając powyższe założenia, równanie (14) przyjmie postać:

$$f(t) \left( \frac{P_e}{P} - 1 \right) = \int_0^{\infty} f(\tau) \sum_{\alpha} \left[ K^{\alpha}(\theta) I^{\alpha} E^{\alpha} (1 - \omega^{\alpha}) \left( \sum_{\alpha} I^{\alpha} E^{\alpha} (1 - \omega^{\alpha}) \right)^{-1} \right] d\theta \quad (15)$$

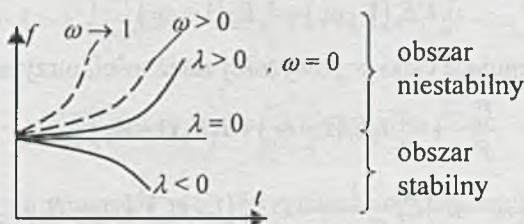
Przyjmując, że poszukiwać będziemy rozwiązania w postaci:

$$f(t) = f^* e^{\lambda t} \quad (16)$$

równanie (15) po odpowiednich przekształceniach przyjmie postać:

$$\frac{P_e}{P} - 1 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \theta} \sum_{\alpha} \left[ K^{\alpha}(\theta) I^{\alpha} E^{\alpha} (1 - \omega^{\alpha}) \left( \sum_{\alpha} I^{\alpha} E^{\alpha} (1 - \omega^{\alpha}) \right)^{-1} \right] d\theta \quad (17)$$

Z powyższej równości, dla znanej wartości stosunku  $P_e/P$ , można będzie, po określeniu liczby warstw oraz przyjęciu szczegółowej postaci jądra całkowania  $K(\theta)$ , wyznaczyć wartość parametru  $\lambda$ . Jeżeli  $\lambda > 0$ , to deformacje rosną (dochodzi do wyboczenia) ściśle do niestabilności przemieszczeń. Dla  $\lambda = 0$  układ jest stateczny, a dla  $\lambda < 0$  naprężenia w układzie ulegają relaksacji i powraca on do stanu trwałej równowagi.



Rys. 2. Obszary stabilności deformacji  
 Fig. 2. Ranges of stability of deformation

### 3.2. Analiza stabilności

Chcąc przeprowadzić analizę stabilności, przyjęto, że jądro pełzania  $K^\alpha(\theta)$  dla materiału inwariantnego dane jest zależnością:

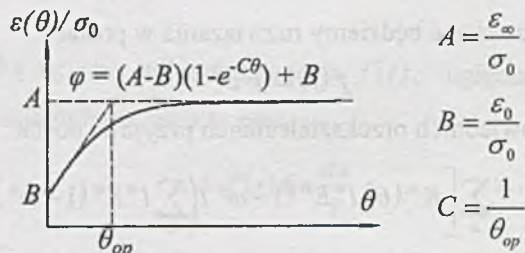
$$K^\alpha(\theta) = -E^\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha(\theta)}{\partial \tau} \quad (18)$$

a funkcja pełzania  $\varphi^\alpha(\theta)$  opisana zostanie równaniem:

$$\varphi^\alpha(\theta) = (A^\alpha - B^\alpha)(1 - e^{-C^\alpha \theta}) + B^\alpha \quad (19)$$

Podstawiając wyrażenie (19) do (18) oraz uwzględniając, że  $\theta = t - \tau$ , otrzymamy ostateczną formę jądra pełzania:

$$K^\alpha(\theta) = E^\alpha (A^\alpha - B^\alpha) C^\alpha e^{-C^\alpha \theta} \quad (20)$$



Rys. 3. Kształt przyjętej funkcji pełzania

Fig. 3. Character of received function of crawling

Następnie, przyjmując, że element składa się z dwóch różnych materiałów lepkosprężystych, równanie (17) przyjmie postać:

$$\frac{P_e}{P} - 1 = \left( I_1 E_1 (1 - \omega_1) \int_0^{\infty} e^{-\lambda \theta} K_1(\theta) d\theta + I_2 E_2 (1 - \omega_2) \int_0^{\infty} e^{-\lambda \theta} K_2(\theta) d\theta \right) [I_1 E_1 (1 - \omega_1) + I_2 E_2 (1 - \omega_2)]^{-1} \quad (21)$$

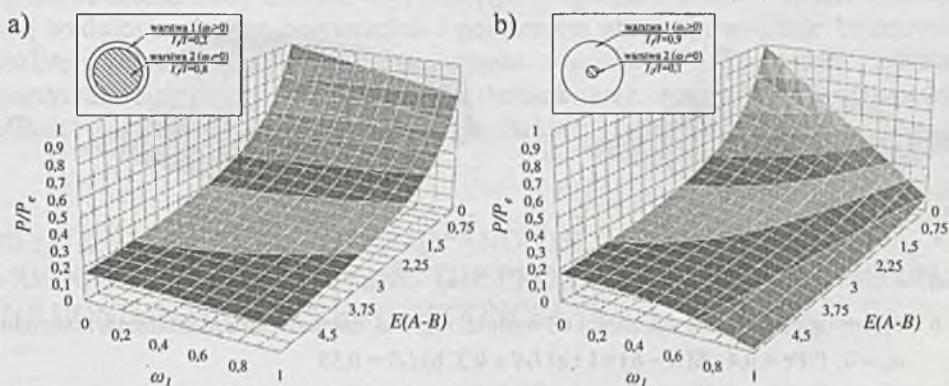
Rozwiązując występujące całki w powyższej zależności, otrzymano:

$$\frac{P_e}{P} - 1 = [I_1 E_1 (1 - \omega_1) + I_2 E_2 (1 - \omega_2)]^{-1} \left( I_1 E_1^2 (1 - \omega_1)^2 (A_1 - B_1) C_1 \frac{1}{C_1 + \lambda} + I_2 E_2^2 (1 - \omega_2)^2 (A_2 - B_2) C_2 \frac{1}{C_2 + \lambda} \right), \quad (22)$$

$$\text{gdzie } P_e = \frac{\pi^2}{\lambda^2} [I_1 E_1 (1 - \omega_1) + I_2 E_2 (1 - \omega_2)]$$

Dalej przyjęto, że materiały rozważanego elementu charakteryzują się takimi samymi wartościami parametrów materiałowych oraz różnymi współczynnikami zniszczenia  $\omega^\alpha$ . Analizować więc będziemy tzw. pręt pseudowarstwowy. Przykładem takiego pręta może być słup betonowy, którego warstwa przypowierzchniowa będzie charakteryzować się zarysowaniem, a więc współczynnik  $\omega_1 > 0$ , natomiast rdzeń tego słupa nie będzie posiadał żadnych oznak zniszczenia ( $\omega_2 = 0$ ).

Analizując obszary stabilności deformacji, można stwierdzić, iż aby układ znajdował się w stanie równowagi, czyli  $f(t)/f^* = \text{const.}$ , to  $\lambda = 0$ . W takim przypadku otrzymamy z równania (22) wykres powierzchni  $P/P_e$  dla stanu stabilnego konstrukcji w zależności od stałych materiałowych i parametru uszkodzenia materiału, w postaci jak na rysunku 4.



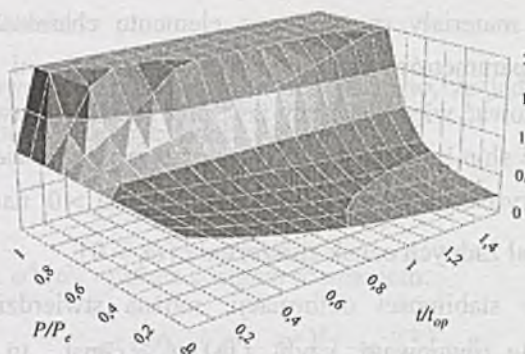
Rys. 4. Wykres  $P/P_e$  w stanie równowagi pręta w zależności od wartości parametrów materiałowych i parametru uszkodzenia materiału 1 dla  $\omega_2 = 0$  oraz a)  $I_1/I = 0,2$ , b)  $I_1/I = 0,9$

Fig. 4. The graph of  $P/P_e$  in state of equilibrium of rod in dependence from value of material parameters and the parameter of damage 1st material for  $\omega_2 = 0$  and a)  $I_1/I = 0,2$ , b)  $I_1/I = 0,9$

Wyznaczając z wyrażenia (22) parametr  $\lambda$  :

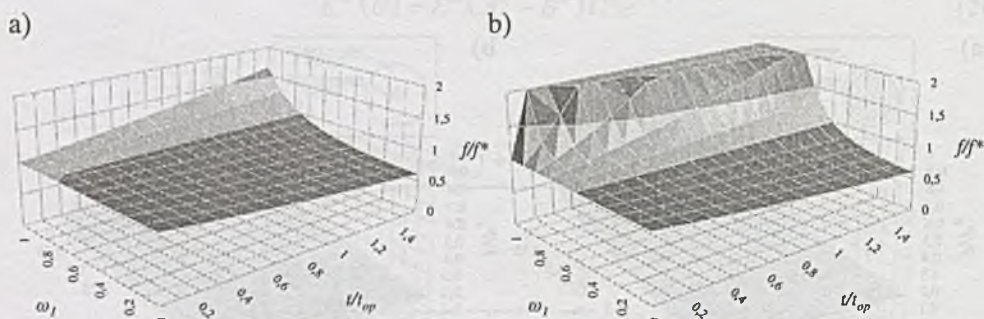
$$\lambda = C \left\{ \frac{P}{P_e} E(A-B) \left( \frac{I_1}{I} (1-\omega_1)^2 + \frac{I_2}{I} (1-\omega_2)^2 \right) \left[ \left( \frac{I_1}{I} (1-\omega_1) + \frac{I_2}{I} (1-\omega_2) \right)^2 - \frac{P}{P_e} \left( \frac{I_1}{I} (1-\omega_1) + \frac{I_2}{I} (1-\omega_2) \right) \right]^{-1} \right\} - 1 \quad (23)$$

i podstawiając go do równania (16), otrzymano wykresy opisujące wartość ugięcia pręta  $f/f^*$  w zależności od stałych materiałowych, wartości  $P/P_e$  oraz parametrów uszkodzenia materiału.



Rys. 5. Wykres ugięcia pręta w zależności od wartości  $t/t_{op}$  i  $P/P_e$  dla parametru uszkodzenia materiału  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  oraz wartości parametrów materiałowych  $E(A-B)=1,0$

Fig. 5. The graph of rods deflection in dependence from value  $t/t_{op}$  and  $P/P_e$  for parameter of material damages  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  and value of material parameters  $E(A-B)=1,0$



Rys. 6. Wykres ugięcia pręta w zależności od wartości  $t/t_{op}$  i  $\omega_1$  dla parametru uszkodzenia materiału  $\omega_2 = 0$ ,  $P/P_e = 0,4$ ,  $E(A-B) = 1$  i a)  $I_1/I = 0,3$ , b)  $I_1/I = 0,55$

Fig. 6. The graph of rods deflection in dependence from value  $t/t_{op}$  and  $\omega_1$  for parameter of material damages  $\omega_2 = 0$ ,  $P/P_e = 0,4$ ,  $E(A-B) = 1,0$  and a)  $I_1/I = 0,3$ , b)  $I_1/I = 0,55$

## BIBLIOGRAFIA

1. Bodnar A., Chrzanowski M., Latus P.: Reologia konstrukcji prętowych. Podręcznik dla studentów wyższych szkół technicznych. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2006.
2. Chrzanowski M.: Reologia ciał stałych. Skrypt dla studentów wyższych szkół technicznych. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 1995.
3. Gawęcki A.: Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2003.
4. Kubik J.: Mechanika konstrukcji warstwowych. Wydawnictwo TiT, Opole 1993.