

Sławomir KOCZUBIEJ*
Politechnika Świętokrzyska

MODELOWANIE SKOŃCZENIE ELEMENTOWE RZECZYWISTYCH WARUNKÓW BRZEGOWYCH W RAMACH CIENKOŚCIENNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiona została procedura rozwiązywania metodą elementów skończonych ram o prętach cienkościennych. Powszechnym sposobem jest modelowanie takich konstrukcji za pomocą belkowych elementów skończonych, z ewentualnym uwzględnieniem podatności węzła. W pracy wykorzystano fakt lokalności deformacji i odróżnienie w modelowanej konstrukcji geometrycznie przestrzennego charakteru obszarów węzłowych, od geometrycznie liniowego charakteru łączących ich belek. W ten sposób można było potraktować obszar węzła jako obiekt przestrzenny, modelowany elementami powłokowymi. Następnie w obiekcie tym dokonywana jest kondensacja statyczna prowadząca do przestrzennego elementu węzłowego z translacyjnymi stopniami swobody na każdej ze ścianek tego elementu łączącej węzeł ramy z prętami ramy.

FINITE ELEMENT MODELLING OF REAL BOUNDARY CONDITIONS IN THIN-WALLED FRAMES

Summary. In the paper, FEM procedure for analysis of thin-walled structures is presented. Thin-walled structures are usually discretized using beam finite elements with possible additional semi-rigid connections taken into account. Based on the assumption of the local deformation, the distinction between geometrically linear nature of bars and space nature of frame joints is considered. In such a way it was possible to discretize frame joints using the shell elements. The static condensation has been applied to get the space joint element with only the thin-walled beam degree of freedom on each wall of the space element, connected with the thin-walled beam elements.

1. Wstęp, sformułowanie problemu

Belki cienkościenne o otwartym przekroju poprzecznym są ciągle stosowane w konstrukcjach budowlanych, maszynowych, lotniczych i innych. Spowodowane jest

* Opiekun naukowy: Prof. zw. dr hab. inż. Czesław Cichoń.

to między innymi niskim kosztem ich produkcji i montażu oraz znaczną redukcją materiału i wagi. Problematyka dotycząca mechaniki pręta cienkościennego jest dobrze opracowana i posiada bogatą literaturę. Podstawowe założenia teorii pręta cienkościennego, będące uzupełnieniem założeń teorii zginania Eulera-Bernoulliego dla prętów litych, sformułowane zostały w monografii Własowa [10] i na tej podstawie budowane są rozwiązania dla statyki, dynamiki i stateczności początkowej. Ograniczając się tylko do literatury polskiej, można wymienić prace o charakterze teoretycznym [5, 7], numerycznym [11] lub eksperymentalnym [4]. Przedmiotem dużego zainteresowania badaczy jest również analiza powyboczeniowa pręta cienkościennego, np. [1]. Mniej prac dotyczy uwzględnienia w analizie własności sprężysto-plastycznych materiału, np. [3].

Problemem, który ciągle pozostaje otwarty, jest wykorzystanie rozwiązań dotyczących pręta cienkościennego do analizy układów takich prętów, np. ram o prętach cienkościennych. Wynika to z trudności opisanego ciągłości spaczenia pomiędzy rygłem a słupem, zależnej od rzeczywistej konstrukcji węzła. Problem zniknie, jeśli całą ramę będziemy traktowali jako konstrukcję powłokową, co jednakże nie jest rozwiązaniem racjonalnym z punktu widzenia późniejszych obliczeń numerycznych.

W pracy do analizy statycznej ram płaskich i przestrzennych wykorzystano metodę elementów skończonych (MES), budując model dyskretny z uwzględnieniem charakteru geometrycznej liniowości prętów cienkościennych (tworzących słupy i rygle) i przestrzennego charakteru łączących ich węzłów wewnętrznych oraz węzłów podporowych. Również w ten sam sposób traktowano obszar występowania obciążenia skupionego, które może być przyłożone w dowolnym punkcie cienkościennego przekroju poprzecznego. Taki model skończenie elementowy został nazwany modelem 1D/3D i opisany w [2].

2. Przestrzenny element węzłowy

Przyjęto hipotezę Własowa, że powierzchnia środkowa pręta cienkościennego o dowolnym profilu otwartym deformuje się tak, jakby w płaszczyźnie każdego przekroju poprzecznego rozpostarta była na linii środkowej sztywna tarcza, idealnie jednak wiotka dla deformacji w kierunku prostopadłym do tego przekroju [5]. Zgodnie z tą hipotezą, pole przemieszczeń punktów linii środkowej dowolnego przekroju można wyznaczyć przez złożenie przemieszczenia linii środkowej należącej do

nieodkształcalnej tarczy oraz jej spaczenia. Przesunięcie tarczy sztywnej możemy z kolei przedstawić jako sumę przemieszczenia translacyjnego środka zginania (nazywanego też środkiem ścinania) oraz przemieszczenia od obrotu wokół osi obrotu przechodzącej przez ten punkt.

Pole przemieszczeń dla niesymetrycznego, otwartego przekroju cienkościennego wyznaczmy w lokalnym układzie współrzędnych pręta (x, y, z) , przyjmując siedem parametrów przemieszczeń (zaznaczonych na rys. 1, na ścianie k_2), nazywanych dalej stopniami swobody, z którymi zwiążemy siły przekrojowe.

Oś x jest osią środków ciężkości pręta, a osie (y, z) są osiami głównymi centralnymi przekroju poprzecznego. Przesunięcia u , v i w opisują sztywną translację przekroju poprzecznego, natomiast φ_x , φ_y , φ_z są kątami sztywnych obrotów. Stosownie do teorii pręta cienkościennego, spaczenie jest definiowane przez iloczyn pochodnej kąta skręcenia $\theta = \frac{d\varphi_x}{dx}$ i współrzędnej wycinkowej ω .

W rezultacie współrzędne wektora przemieszczeń $\mathbf{u}_i^{kc}(y_i, z_i)$ dowolnego punktu i w przekroju poprzecznym pręta cienkościennego $x = x_k$ obliczane są ze wzorów:

$$\begin{aligned} u_i^{kc}(y_i, z_i) &= u^k - \varphi_z^k \cdot y_i + \varphi_y^k \cdot z_i + \theta^k \cdot \omega_i \\ v_i^{kc}(y_i, z_i) &= v^k + (e_z^k - z_i) \cdot \varphi_x^k \\ w_i^{kc}(y_i, z_i) &= w^k + (-e_y^k + y_i) \cdot \varphi_x^k \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie e_y^k i e_z^k są współrzędnymi środka zginania, a y_i oraz z_i są współrzędnymi punktu i .

Utożsamiając następnie $u_i^{kc}(y_i, z_i)$, $v_i^{kc}(y_i, z_i)$ i $w_i^{kc}(y_i, z_i)$ ze współrzędnymi wektora przemieszczeń $\mathbf{u}_i^{kp}(y_i, z_i)$ dla punktów $x = x_k$ powierzchni środkowej powłoki (przez powłokę rozumiemy powłokę przestrzennego elementu węzłowego) węzła, możemy napisać *układ równań więzów* wiążących przemieszczenia powłoki z przemieszczeniami belki cienkościennej we wspólnym przekroju poprzecznym, który w dalszym ciągu będziemy nazywać ścianką k , w postaci:

$$\mathbf{u}_i^{kp}(y_i, z_i) = \mathbf{u}_i^{kc}(y_i, z_i) \quad (2.2)$$

Wykorzystując (2.1) w (2.2), otrzymamy w każdym punkcie i układ trzech równań, który ma formę macierzową:

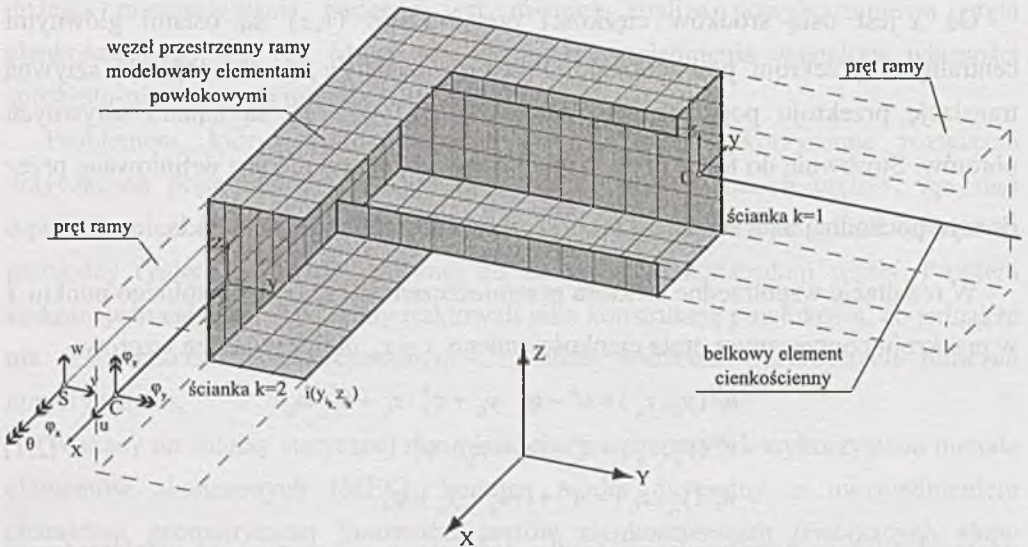
$$\mathbf{u}_i^{kp}(y_i, z_i) = \mathbf{B}_i^k(y_i, z_i, \omega_i) \cdot \mathbf{q}^{kc} \quad (2.3)$$

gdzie \mathbf{q}^{kc} jest wektorem lokalnych stopni swobody belkowego elementu cienkościennego:

$$\mathbf{q}^{kc} = \{u^k \quad v^k \quad w^k \quad \varphi_x^k \quad \varphi_y^k \quad \varphi_z^k \quad \theta^k\} \quad (2.4)$$

a macierz $\mathbf{B}_i^k(y_{i_k}, z_{i_k}, \omega_{i_k})$ definiuje prawo transformacji pomiędzy translacyjnymi stopniami swobody elementów powłokowych i stopniami swobody belkowego elementu cienkościennego na ściance k :

$$\mathbf{B}_i^k(y_{i_k}, z_{i_k}, \omega_{i_k}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{i_k} & -y_{i_k} & \omega_{i_k} \\ 0 & 1 & 0 & e_z^k - z_{i_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -e_y^k + y_{i_k} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$



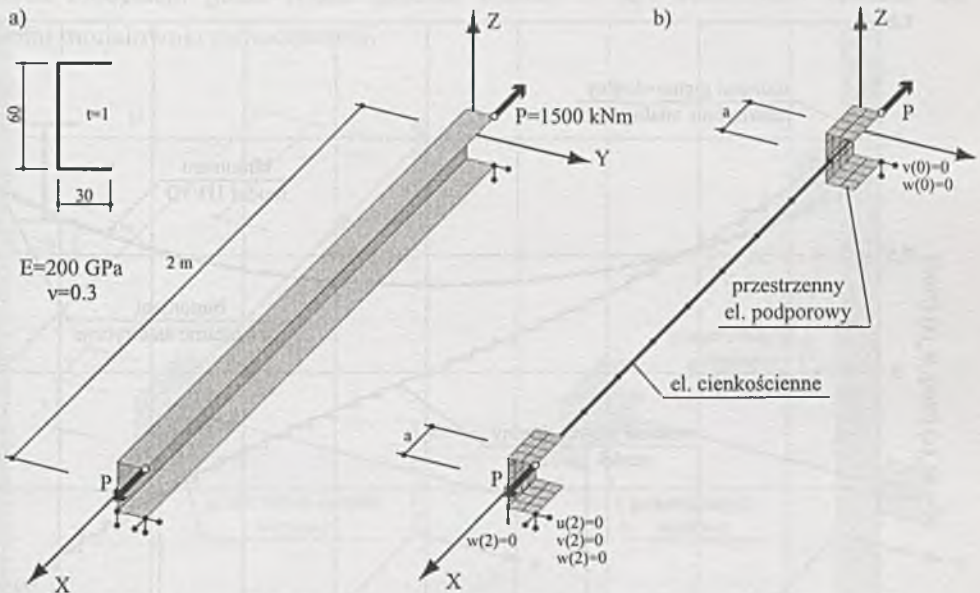
Rys. 1. Przestrzenny element węzłowy i parametry przemieszczeniowe
Fig. 1. Space joint element and displacement parameters

Przestrzenny charakter węzła ramy uwzględniono, dyskretyzując węzeł elementami skończonymi powłokowymi (rys. 1). Następnie w tak otrzymanym obiekcie dokonywana jest kondensacja statyczna, prowadząca do *przestrzennego elementu węzłowego* z translacyjnymi stopniami swobody na każdej ze ścianek tego elementu łączącej węzeł z prętami ramy. Na końcu, wykorzystując równania więzów (2.2), dokonywana jest na każdej ze ścianek transformacja translacyjnych stopni swobody do siedmiu stopni swobody w węzłach belkowych elementów cienkościennych. W efekcie otrzymujemy macierz sztywności i wektor sił dla przestrzennego elementu węzłowego (o wymiarze: siedem razy liczba prętów schodzących się w węzle ramy), zgodnego z belkowymi elementami cienkościennymi. Inny sposób budowania macierzy sztywności, właściwy dla metody przemieszczeń, przedstawiono w [8, 9].

3. Przykłady

3.1. Belka

Skuteczność i efektywność analizy statycznej konstrukcji o prętach cienkościennych według zaproponowanego w pracy modelu obliczeniowego 1D/3D sprawdzono na przykładzie belki o przekroju ceowym. Na rys. 2a pokazano rozważaną belkę wraz z obciążeniem i warunkami brzegowymi. Przykład ten wybrano, ponieważ posiada on rozwiązanie analityczne [5].



Rys. 2. a) Belka ceowa, b) model z przestrzennymi elementami podporowymi
Fig. 2. a) U-beam, b) model with space support elements

Niezerowe funkcje sił przekrojowych mają postać:

$$\begin{aligned} F_x(x) &= 1500 \text{ N}; & M_y(x) &= 45 \text{ Nm}; & M_z(x) &= -33,75 \text{ Nm} \\ B_{\omega}(x) &= -0,759 \cdot \sinh(1,47 \cdot x) + 0,8437 \cdot \cosh(1,47 \cdot x) \text{ Nm}^2 \\ M_{\omega}(x) &= 1.1157 \cdot \cosh(1,47 \cdot x) - 1,2402 \cdot \sinh(1,47 \cdot x) \text{ Nm} \end{aligned} \quad (3.1)$$

W powyższych wzorach $B_{\omega}(x)$ jest bimomentem, $M_{\omega}(x)$ jest momentem giętno-skrętnym od naprężeń stycznych równomiernie rozłożonych.

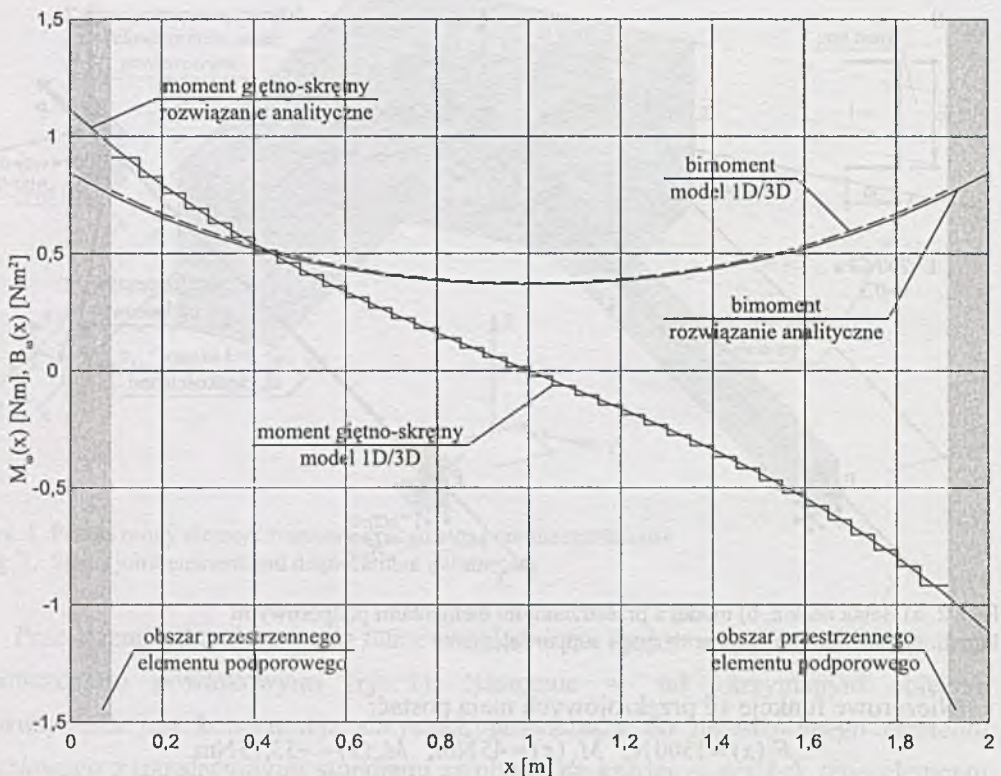
Rozwiązanie skończenie elementowe otrzymano, przyjmując dwa przestrzenne elementy podporowe o długości $a = 0,09 \text{ m}$ oraz 36 belkowych elementów cienkościennych, co pokazano na rys. 2b. Przestrzenne elementy podporowe zdyskretyzowano 32 elementami płytowymi z wprowadzonym dodatkowo szóstym stopniem swobody [6]. Na rys. 3 zestawiono wykresy bimomentu i momentu giętno-

skrętnego dla rozwiązania analitycznego i dla modelu 1D/3D. Moment giętno-skrętny został obliczony z zależności [5]:

$$M_{\omega}(x) = \tilde{E} \cdot I_{\omega} \cdot \varphi_x''(x) \quad (3.2)$$

gdzie \tilde{E} jest zastępczym modułem Younga, I_{ω} jest wycinkowym momentem bezwładności, a $\varphi_x(x)$ jest kątem skręcenia.

W elementach belkowych cienkościennych została zastosowana interpolacja *Hermite-a*, stąd stała wartość momentu giętno-skrętnego w elemencie (nieciągłości na wykresie).



Rys. 3. Wykres bimomentu i momentu giętno-skrętnego

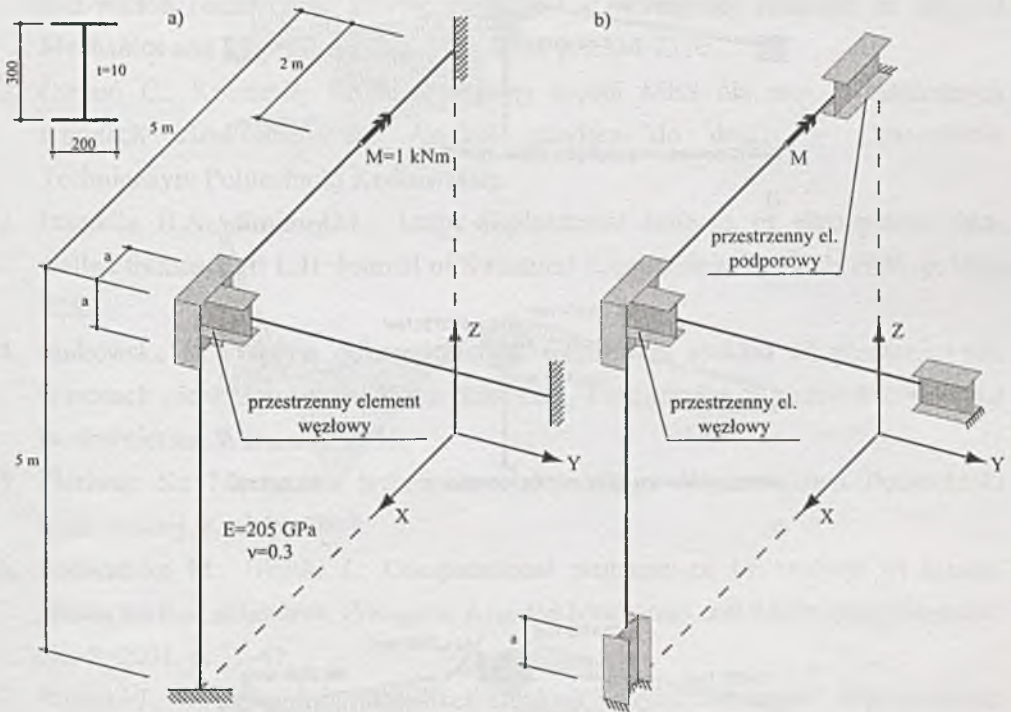
Fig. 3. Diagrams of bimoment and flexural-torsional moment

3.2. Rama przestrzenna

Drugi przykład dotyczy rama trójprętowej modelowanej za pomocą belkowych elementów cienkościennych i przestrzennego elementu węzłowego (rys. 4a) oraz dodatkowo z przestrzennymi elementami podporowymi (rys. 4b).

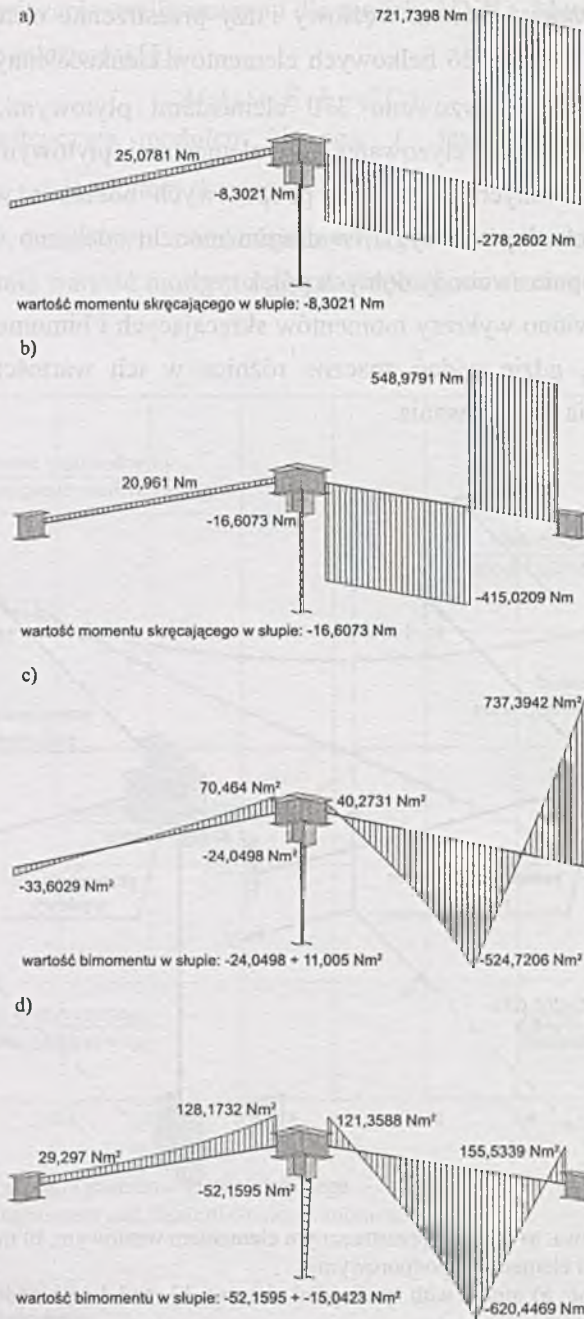
Przyjęto przestrzenne element węzłowy i trzy przestrzenne elementy podporowe o długości $a = 0,45\text{m}$ oraz 126 belkowych elementów cienkościennych. Przestrzenne element węzłowy zdyskretyzowano 370 elementami płytowymi, a przestrzenne elementy podporowe zdyskretyzowano 126 elementami płytowymi. W przypadku modelu bez przestrzennych elementów podporowych odebrano wszystkie stopnie swobody na końcach słupów i rygla, w drugim modelu odebrano wszystkie stopnie swobody słupa i stopnie swobody dolnych półek rygla.

Na rys. 5 zestawiono wykresy momentów skręcających i bimomentów w poszczególnych modelach, gdzie widać znaczne różnice w ich wartościach zależnie od sposobu modelowania zamocowania.



Rys. 4. Rama trójprętowa: a) model z przestrzennym elementem węzłowym, b) model z dodatkowymi przestrzennymi elementami podporowymi

Fig. 4. Three-bar frame: a) model with space joint element, b) model with additional space support elements



Rys. 5. Wykresy momentów skręcających: a) model z przestrzennym elementem węzłowym, b) model z przestrzennymi elementami podporowymi. Wykresy bimomentów: c) model z przestrzennym elementem węzłowym, d) model z przestrzennymi elementami podporowymi.

Fig. 5. Diagrams of torsional moments: a) model with space joint element, b) model with space support elements. Diagrams of bimoments: c) model with space joint element, d) model with space support elements

4. Uwagi

W pracy zaproponowano mieszany model skończenie elementowy 1D/3D do analizy statycznej ram o prętach cienkościennych i dowolnym zamocowaniu podpór. Ograniczenie dyskretyzacji za pomocą powłokowych elementów skończonych do węzłów znacznie upraszcza obliczenia w porównaniu z pełną analizą trójwymiarową, zapewniając jednocześnie dobrą jakość rozwiązania.

BIBLIOGRAFIA

1. Chen H.H., Lin W.Y., Hsiao K.M.: Co-rotational finite element formulation for thin-walled beams with generic open section. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, No. 195, 2006, p. 2334-2370.
2. Cichoń C., Koczubiej S.: Konsystenty model MES dla ram przestrzennych o prętach cienkościennych. Artykuł przyjęty do druku w *Czasopiśmie Technicznym Politechniki Krakowskiej*.
3. Izzuddin B.A., Smith D.L.: Large-displacement analysis of elastoplastic thin-walled frames. Part I, II. *Journal of Structural Engineering*, No. 122, 1996, p. 905-925.
4. Jankowska N.: Wpływ odkształcalności węzłów na rozkład sił przekrojowych w ramach cienkościennych. Praca doktorska, Politechnika Warszawska, Wydział Budownictwa, Warszawa 2006.
5. Piechnik S.: *Mechanika techniczna ciała stałego*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2007.
6. Radwańska M., Bielski J.: Computational problems of FE-analysis of elastic-plastic surface structures. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, No. 8, 2001, p. 17-42.
7. Rutecki J.: *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1957.
8. Szymczak C., Kreja I., Mikulski T., Kujawa M.: *Sensitivity Analysis of Beam and Frames Made of Thin-Walled Members*. Gdańsk University of Technology Publishers, Gdańsk 2003.
9. Tews R., Rachowicz W.: Numerical Analysis of Thin-Walled Frames with Flexible Joints. *Archives of Civil Engineering*, No. 51, 2005, p. 343-369.
10. Vlasov V.Z.: *The Walled Elastic Beams*. 2nd edition, Israel Program for Scientific Transactions, Jerusalem 2000.

11. Waszczyszyn Z., Cichoń C., Radwańska M.: Stability of Structures by Finite Element Methods. Elsevier 1996.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Skrzypczyk, prof. w Politechnice Śląskiej

BIBLIOGRAFIA

1. Eben H.H., Lin W.Y., Hsiao K.M.: Co-rotational finite element formulation for thin-walled beams with general cross-section. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, No. 152, 1997, p. 2334-2370.
2. Cichoń C., Koczubiej S.: Konwergencyjny model MES dla ram przestwornych o przekroju cienkościennym. *Archiwum Prace Inżynierskie w Opatoku* Technicznym Politechniki Katowickiej.
3. Isacovich B.A., Smith D.L.: Large-displacement analysis of elastic thin-walled frames. *Int. J. Journal of Structural Engineering*, No. 122, 1996, p. 902-922.
4. Janowska K.: Wzrost odkształceń w systemach kratowych z przestworowymi w osiach cienkościennymi. *Prace doktorskie Politechniki Warszawskiej. Wydział Inżynierii Budowlanej Warszawa 2000.*
5. Fiedoruk S.: Mechanika techniczna: część statyka. *Wydawnictwo Politechniki Katowickiej, Katowice 2007.*
6. Radwańska M., Bielski J.: Computational problems of FE-analysis of elastic-plastic surface structures. *Computer Aided Mechanics and Engineering Science*, No. 8, 2001, p. 17-42.
7. Rucinski J.: *Wytrzymałość konstrukcji stalowych*. Instytut Wydawniczy *Technica*, Warszawa 1977.
8. Koczubiej S., Kwieciński T., Kozłowski M.: Secondary Analysis of Beam and Frame Made of Thin-Walled Members. *Global University of Technology Publishers, Gdańsk 2002.*
9. Laws R., Koczubiej S.: Buckling Analysis of Thin-Walled Frames with Plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, No. 7, 2002, p. 344-349.
10. Mielow M.: *Thin-Walled Elastic Beams*. *Springer, Berlin 1999*.