ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2008
Seria: BUDOWNICTWO z. 113 Nr kol. 1799

Michał MUSIAŁ*
Politechnika Wrocławska

METODA OBLICZANIA CZĘSTOTLIWOŚCI WŁASNYCH ZARYSOWANYCH BELEK ŻELBETOWYCH

Streszczenie. Praca dotyczy metody obliczania częstotliwości własnych zarysowanych belek żelbetowych. Prezentowane podejście bazuje na metodzie sztywnych elementów skończonych (dyskretyzacja fizyczna). Efekty związane z zarysowaniem wprowadzane są w sposób dyskretny. Pokazano przykład numeryczny. Obliczenia przeprowadzono autorskim programem.

METHOD OF CALCULATION OF EIGENFREQUNCIES OF CRACKED REINFORCED CONCRETE BEAMS

Summary. In the paper the method of calculation of eigenfrequency of cracked reinforced concrete beams is presented. The method is based on rigid finite elements method (physical discretisation). The effects associated with cracking are introduced in the discrete way. The numerical example was shown. Calculations were conducted with the own computational program.

1. Wstęp

Przeprowadzone doświadczenia [4, 5, 6, 10], dotyczące zagadnień dynamiki belek żelbetowych, dowodzą, że rysy powodują znaczne obniżenie częstotliwości własnych (nawet do około 50% w stosunku do belek niezarysowanych). Wpływają także w istotny sposób na inne podstawowe parametry dynamiczne (m.in. logarytmiczny dekrement tłumienia). Uzasadnione jest zatem uwzględnianie zarysowania w obliczeniach konstrukcji obciążanych dynamicznie.

Wielu badaczy proponuje podejście związane z zastępczą sztywnością dynamiczną belek [5, 6, 10]. Podejście to pozwala korzystać z rozwiązań zamkniętych dynamiki konstrukcji, a wartość zastępczej sztywności dynamicznej wynika przeważnie

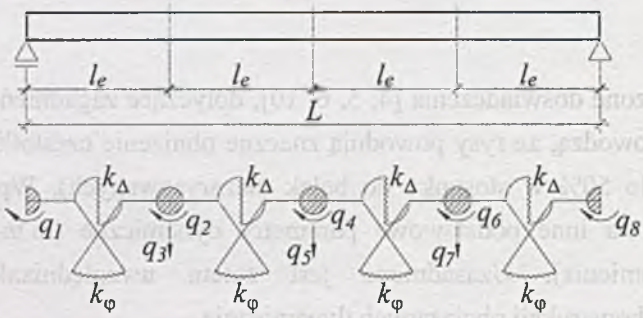
* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Andrzej Ubysz.

z przeprowadzonych doświadczeń. Prezentowana w pracy metoda jest podejściem alternatywnym, które wprowadza do obliczeń dyskretny model rysy, ale pozostawia sztywność taką jak w fazie niezarysowanej. Obliczenia bazują na metodzie sztywnych elementów skończonych. Efekty związane z zarysowaniem wprowadzane są w sposób dyskretny.

2. Opis metody

2.1. Metoda sztywnych elementów skończonych dla belek jednorodnych

Metoda sztywnych elementów skończonych miała swój początek w przemyśle okrętowym [7] i została zaadaptowana do obliczeń budowlanych konstrukcji prętowych przez J. Langera [8]. W odróżnieniu od klasycznej metody elementów skończonych, która wykorzystuje dyskretyzację matematyczną, metoda sztywnych elementów skończonych bazuje na dyskretyzacji fizycznej (granulacja mas). Model belki zbudowany jest ze sztywnych tarcz masowych, reprezentujących siły bezwładności. Tarcze połączone są sprężystymi więziami (jedną obrotową i dwoma translacyjnymi), odpowiedzialnymi za właściwości sprężyste ustroju. Ruch każdej z tarcz masowych opisany jest trzema współrzędnymi uogólnionymi. W przypadku drgań giętnych, bo do takich ograniczono się w pracy, więzi sprężyste oraz współrzędne uogólnione redukują się do dwóch. Przykładowy schemat i model obliczeniowy belki podzielonej na cztery elementy pokazano na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat i model numeryczny belki jednorodnej
Fig. 1. Scheme and numerical model of homogeneous beam

Sztywności więzi łączących tarcze masowe obliczamy ze wzorów (1), (2):

$$k_\varphi = \frac{EI}{l_e}, \tag{1}$$

$$k_{\Delta} = 12\frac{EI}{l_e^3} \tag{2}$$

gdzie:

EI – sztywność giętna belki, l_e – długość elementu skończonego.

Sztywności więzi zgrupowane są w macierz diagonalną $\{k\}$, która w przypadku jak na rysunku 1 ma postać:

$$\{k\} = diag\{k_{\varphi}, k_{\Delta}, k_{\varphi}, k_{\Delta}, k_{\varphi}, k_{\Delta}, k_{\varphi}, k_{\Delta}\}. \tag{3}$$

Globalna macierz sztywności **K** obliczana jest ze wzoru:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_k^T\{k\}\mathbf{A}_k \tag{4}$$

gdzie: $\mathbf{A}_k$ – macierz transformacji.

Macierz transformacji $\mathbf{A}_k$, transformuje wektor współrzędnych uogólnionych **q** na wektor wzajemnych przemieszczeń **r**. Ma ona powtarzalny charakter, generowanie jej można łatwo zautomatyzować dla dowolnych warunków brzegowych.

Macierz bezwładności jest macierzą diagonalną. Współrzędnym translacyjnym odpowiadają masy poszczególnych tarcz m, współrzędnym rotacyjnym natomiast ich masowe momenty bezwładności J_m. Dla modelu jak na rysunku 1 macierz bezwładności ma postać:

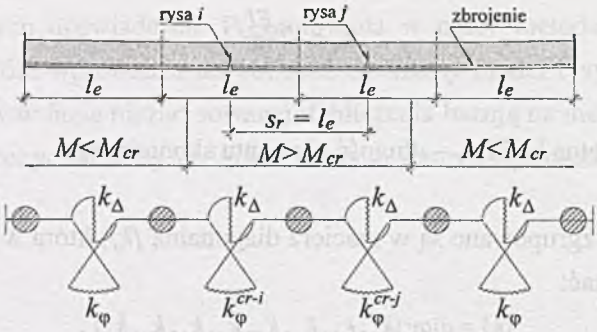
$$\mathbf{B} = diag\{J_{m1}, J_{m2}, m, J_{m2}, m, J_{m2}, m, J_{m1}\} \tag{5}$$

Wartości własne macierzy **A**, będącej iloczynem odwrotności macierzy **B** oraz macierzy **K**, są kwadratami częstości kołowych ω.

Podrozdział 2.1 opracowano na podstawie [8], gdzie znajduje się wyczerpujący opis metody.

2.2. Obliczanie zarysowanych belek żelbetowych

Prezentowane podejście pozwala uwzględnić lokalne nieciągłości (m.in. rysy) w sposób dyskretny. Odpowiedni podział na elementy skończone umożliwia wprowadzenie rys przez redukcję sztywności więzi rotacyjnych, przy czym obliczenia wstępne przeprowadzane są jak dla belki jednorodnej. Sztywności więzi k_{φ}, k_{Δ} są obliczane na podstawie sztywności elementu w fazie I – EI_I. W miejscu pojawienia się rys sztywność więzi obrotowych jest redukowana i ma wartość k_{φ}^{cr}. Schemat oraz model obliczeniowy belki żelbetowej z rysami pokazano na rysunku 2.



Rys. 2. Schemat i model numeryczny belki żelbetowej z rysami
Fig. 2. Scheme and numerical model of RC cracked beam

Obliczenia przeprowadzane są z wykorzystaniem badań i opracowań teoretycznych, opisujących pracę belki w fazie II, z wykorzystaniem dyskretnego modelu rysy [1]. Według wspomnianej teorii, sprężyste rozwarcie rysy oblicza się według zależności:

$$\varphi_i^e = r_i\, M(x_i) \tag{6}$$

gdzie: r_i – podatność rotacyjna wynikająca z i-tej rysy, $M(x_i)$ – moment zginający w miejscu i-tej rysy.

Podatność obrotowa r_i obliczana jest według wzoru [1]:

$$r_i = d_\varphi^{cr-i} = \frac{\psi_z\, s_{rm}}{E_s A_s h^2 (1-\frac{\alpha_{II}}{3}-\frac{a}{h})(1-\alpha_{II}-\frac{a}{h})} \tag{7}$$

gdzie: ψ_z – współczynnik opisujący naruszenie współpracy stali i betonu, wg (8), s_{rm} – średni rozstaw rys, E_s – moduł Younga stali, A_s – pole przekroju zbrojenia, h – wysokość belki,
α_{II} – względna wysokość strefy ściskanej w fazie I I, a – otulina konstrukcyjna.

$$\psi_z = 1{,}3 - s\frac{M_{cr}}{M} \tag{8}$$

gdzie: s – 1,0 w przypadku obciążeń doraźnych i prętów gładkich, 1,1 w przypadku obciążeń doraźnych i prętów żebrowanych, 0,8 w przypadku obciążeń długotrwałych, M_{cr} – moment rysujący, M – maksymalny moment do jakiego przeciążony był przekrój.

Zakładając, że podatność połączenia elementów skończonych jest sumą podatności wynikającej z odkształcalności belki (dla fazy I) oraz podatności wynikającej z pojawienia się rysy, można zapisać zależność:

$$d_{\varphi}^{II-i} = (k_{\varphi}^{I})^{-1} + d_{\varphi}^{cr-i} \tag{9}$$

gdzie: k_{φ}^{I} – sztywność więzi rotacyjnej obliczona wg (1) dla fazy I (EI_I).

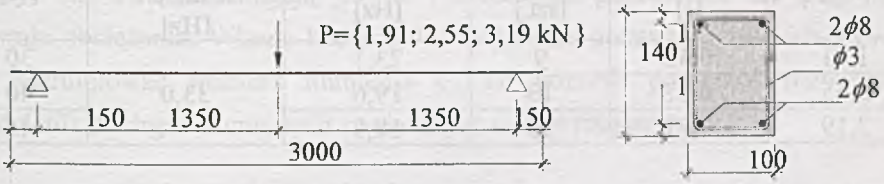
Znając podatność (9), można obliczyć sztywność więzi rotacyjnej przekroju zarysowanego:

$$k_{\varphi}^{cr-i} = (d_{\varphi}^{II-i})^{-1}. \tag{10}$$

3. Przykład numeryczny

3.1. Dane wejściowe

Analizie poddano element jak na rysunku 3.



Rys. 3. Schemat analizowanej belki (wymiary w mm)
Fig. 3. Scheme of analyzed beam (dimensions presented in mm)

Obliczenia przeprowadzono własnym programem zrealizowanym w środowisku obliczeniowym *Mathematica*®. Wyniki teoretyczne porównano z wynikami przeprowadzonego eksperymentu [10]. Badania doświadczalne przeprowadzone były dla trzech poziomów obciążenia 1,91, 2,55 oraz 3,19 kN. Większość danych wejściowych zaczerpnięto z [10]. Niestety niektóre z nich (głównie te związane z morfologią rys) nie były podane bądź zmierzone, dlatego przyjęto je arbitralnie. I tak na przykład rozstaw rys przyjęto równy rozstawowi strzemion. Pozostałe dane wejściowe zgrupowano w tabeli 1.

Tabela 1

Dane wejściowe

Wielkość	Wartość	Jednostka
Wymiary elementu l x b x h	2700 x 100 x140	mm
Gęstość ρ_m	2452	kg/m^3
Pole przkroju zbrojenia $A_{s1} = A_{s2}$	1,00	cm^2
Moduł Younga betonu E_c	29,8	GPa
Wytrzymałość betonu na rozciąganie f_{ct}	2,33	MPa
Moduł Younga stali E_s	200	GPa
Granica plastyczności stali f_y	272	MPa
Średni rozstaw rys s_{rm}	100	mm

Belkę podzielono na 27 elementów skończonych (długość elementu l_e = 100 mm).

3.2. Wyniki analiz numerycznych

Analizy numeryczne przeprowadzono dla trzech kroków obciążenia. Dla porównania obliczono także częstotliwość fizyczną belki niezarysowanej. Rezultaty zgrupowano w tabeli 2.

Tabela 2

Wyniki analiz numerycznych

Obciążenie [kN]	M/M_R [-]	Liczba rys [szt.]	Częstotliwość fizyczna [Hz]	Częstotliwość fizyczna w fazie I [Hz]	Różnica [%]
1,91	0,42	9	23,1	33,0	30
2,55	0,57	13	19,6		40
3,19	0,71	15	18,0		45

3.3. Porównanie wyników analiz teoretycznych z eksperymentem

Obliczenia przeprowadzono pod kątem eksperymentów R. Wlazło [10]. Elementy obciążane były w sposób statyczny jak na rys. 3. Nagłe usunięcie obciążenia wprawiało belkę w drgania swobodne. Rejestrowana była częstość tych drgań, która w konstrukcjach budowlanych jest zbliżona do częstości własnej. Wyniki analiz porównawczych zestawiono w tabeli 3.

Tabela 3

Wyniki analizy porównawczej

Stopień zaawansowania obciążenia [-]	Obliczona częstotliwość fizyczna [Hz]	Pomierzona częstotliwość fizyczna [Hz]	Różnica [%]
0,42	23,1	26,0	11,3
0,57	19,6	21,5	8,6
0,71	18,0	19,0	5,0

4. Wnioski

Jak stwierdzono na początku, zjawisko zarysowania nie pozostaje bez wpływu na podstawowe charakterystyki dynamiczne belek żelbetowych. Przeprowadzone eksperymenty oraz analizy teoretyczne potwierdzają ten fakt. Wykazano w punkcie 3.2, iż spadek częstości własnej może sięgać nawet 45% przy stopniu zaawansowania obciążenia równemu 70%.

Metody obliczeń prezentowane w literaturze przeważnie bazują na pojęciu zastępczej sztywności dynamicznej. Według niektórych badaczy [5, 6] jest ona większa niż sztywność efektywna przyjmowana do obliczania ugięć, według innych jest taka sama lub mniejsza niż sztywność efektywna [10]. Prezentowana w pracy metoda jest podejściem alternatywnym i w sposób szczegółowy umożliwia śledzenie procesów zachodzących w drgających belkach żelbetowych. Metoda zakłada pracę elementu jak w fazie I, efekt zarysowania wprowadzany jest natomiast w sposób dyskretny.

Na obecnym etapie trwają prace nad udoskonaleniem metody. Planowane jest przeprowadzenie własnych eksperymentów. Wstępne porównanie z istniejącymi wynikami doświadczeń (w punkcie 3.3) pozwala jedynie sądzić o poprawności metody. Na uwagę zasługują pewne rozbieżności pojawiające się przy niskim poziomie obciążenia. Własne badania doświadczalne pozwolą ustalić ich przyczynę oraz sformułować macierz tłumienia **C**, co pozwoli poszerzyć rozwiązywane zagadnienia do drgań tłumionych swobodnych oraz wymuszonych.

BIBLIOGRAFIA

1. Borcz A.: Teoria konstrukcji żelbetowych – wybrane zagadnienia. Cz. I. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1973.
2. Chmielewski T., Zembaty Z.: Podstawy Dynamiki budowli. Arkady, Warszawa 1998.
3. Glabisz W.: Mathematica® w zagadnieniach mechaniki konstrukcji. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2003.
4. Goszczyński S., Mucha J., Wójcicki A.: Ocena zmian sztywności belek żelbetowych na podstawie pomiaru niektórych parametrów dynamicznych. XLI Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Kraków – Krynica 1995, s. 77-84.

5. Jerath S., Shibani M.: Dynamic Stiffness and Vibration of Reinforced Concrete Beams. ACI Journal, Vol. 82, 1985, p. 196-202.
6. Johns K., Belanger M.: Dynamic Stiffness of Concrete Beams. ACI Journal, Vol. 78, 1981, p. 201-205.
7. Kruszewski J., Gawroński W., Wittbrodt E., Najbar F., Grabowski S.: Metoda sztywnych elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1975.
8. Langer J.: Dynamika budowli. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1980.
9. Wittig W.: Steifgkeitsmethode zur einfachen Ermittlung der Eigenfrequenzen von Tragern. Bauplannung – Bautechnik, Nr. 12, 1977, s. 554-557.
10. Wlazło R.: Sztywność dynamiczna belek żelbetowych. XXXIII Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Krynica – Gliwice 1987, s. 213-218.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Tadeusz Tatara