ZESZYTY NAUKOWE
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

PRACE HABILITACYJNE
Nr 2

P. 3347/61

ELEKTRYKA

Nr 7

GLIWICE 1961

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA
P. 3347/61

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 27

Dr inż. ZYGMUNT J. NOWOMIEJSKI

MOC I ENERGIA ELEKTRYCZNA W UKŁADACH ELEKTRYCZNYCH O DOWOLNYCH USTALONYCH PRZERIEGACH

PRACA HABILITACYJNA

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 17. I. 1961 r.

GLIWICE 1961

REDAKTOR ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Prof. dr inż. Andrzej Grossman

PJ. 178/61

Oddano do wyk. 3. II. 1961 r. N-12 Nakład 300+30 egz.
Arkuszy druku 2¾ Pap. powielacz. kl. V 61×86, 70 g. Zamówienie nr 167

Zakład Produkcji Pomocy Naukowych Politechniki Śląskiej w Gliwicach

Spis treści

		str.
I.	Wstęp	1
	1. Funkcje ortonormalne	2
	2. Przestrzeń Hilberta	5
	3. Uogólniona funkcja symboliczna	5
II.	Układy jednofazowe	7
	1. Moc symboliczna, czynna i bierna w układach 1-fazowych	7
	2. Splot i jego interpretacja	8
	3. Rozkład ortogonalny funkcji symbolicznej	10
	4. Współczynniki mocy	13
	5. Kompensacja mocy biernej w układach 1-fazowych	15
	6. Uwagi krytyczne odnoszące się do niektórych teorii mocy	18
III.	Układy wielofazowe i wieloprzewodowe	19
	1. Moc w układach wielofazowych i wieloprzewodowych	19
	2. Kompensacja mocy biernej w układach wielofazowych	23
	3. Współczynniki mocy	28
IV.	Zasada Zachowania Mocy	29
	1. Przestrzeń wektorialna	29
	2. Rozkład ortogonalny wektorów przestrzeni(W)	32
	3. Zasada zachowania mocy	35
	4. Splot	39
V.	Spis literatury	41

I. Wstęp

W elektrotechnice teoretycznej jak i w praktyce energoelektrycznej brak dotychczas ustalonego poglądu co do tak podstawowych wielkości jak energia czynna i energia bierna układu. Istnieją różne interpretacje tych wielkości. W szczególności odnosi się to do energii biernej, co do której szereg autorów[1] uważa iż samo pojęcie energii biernej nie ma fizykalnego znaczenia. Wiąże się to także z tym, iż ogólne rozważania na temat różnego typu mocy układu nie były wystarczająco przekonywujące i ogólnie przyjęte. Z tych względów w nawiązaniu do wcześniejszych prac autora ([11],[12]) zostanie poniżej przedstawiona nowa, ogólna teoria mocy odnosząca się tak do dwu- jak i wieloprzewodowych układów elektrycznych i dowolnych, okresowych przebiegów, z której to teorii między innymi uzyskuje się jednoznaczną interpretację energii czynnej i biernej pola elektromagnetycznego układu.

Obecnie przedstawiona praca różni się od poprzednio opublikowanych prac autora z tej dziedziny pod dwoma względami:

1) Wprowadzono częściowo inne oznaczenia oraz inne definicje niektórych mocy.
2) Ściśle powiązano zagadnienie różnego typu mocy z energią układu.

W tej pracy wyprowadzono po raz pierwszy konsekwentną teorię kompensacji mocy biernej Q dla dowolnych przebiegów i układów nierównomiernie obciążonych przy czym uzyskane wyniki mają podstawowe znaczenie praktyczne. Wprowadzono także szereg nowych wielkości i pojęć nie mających swych odpowiedników ani w poprzednio opublikowanych pracach autora ani też w teoriach mocy przedstawionych przez innych autorów. Do tych wielkości należą przede wszystkim funkcje mocy przebiegów. Okazuje się - jak zostanie wykazane - że mają one głębokie znaczenie energetyczne.

1) Por. prace: [1] , [5] i [17]

Podstawowym narzędziem analizy matematycznej użytym w tej pracy jest przestrzeń Hilberta i uogólniona funkcja symbolicz na wprowadzona już wcześniej przez autora w pracy [12].

1. Funkcje ortonormalne.

Nieskończony ciąg funkcji rzeczywistych lub zespolonych zmiennej rzeczywistej t:

$$\varphi_1(t),\quad \varphi_2(t),\ \ldots\ \varphi_n(t),\ \ldots \qquad \ldots \text{ I - 1.01}$$

w którym każda z funkcji w domkniętym przedziale [a,b] jest całkowalna wraz z kwadratem, nazywamy układem ortonormalnym w tym przedziale, jeżeli dla każdego m i n zachodzi:

$$\int_a^b \varphi_m^* \varphi_n \, dt = \delta_{mn}, \qquad \ldots \text{ I - 1.02}$$

gdzie $\varphi^*(t)$ oznacza funkcję sprzężoną do funkcji $\varphi(t)$ a δ_{mn} jest deltą Kroneckera.

Podstawowymi układami ortonormalnymi mającymi zastosowanie w elektrotechnice są:

$$\frac{1}{\sqrt{T}},\ \frac{\sin\omega t}{\sqrt{T/2}},\ \frac{\cos\omega t}{\sqrt{T/2}};\ \ldots\ \frac{\sin n\omega t}{\sqrt{T/2}},\ \frac{\cos n\omega t}{\sqrt{T/2}}\ \ldots$$

oraz

$$\frac{1}{\sqrt{T}},\ \frac{e^{j\omega t}}{\sqrt{T}},\ \frac{e^{2j\omega t}}{\sqrt{T}},\ \ldots,\ \frac{e^{nj\omega t}}{\sqrt{T}},\ \ldots \qquad \ldots \text{ I - 1.03}$$

w przedziale: $0 \leqslant t \leqslant T$.

Gdy układ funkcji I - 1.01 jest ortogonalny lecz nie znormalizowany to zachodzi:

$$\int_a^b \varphi_m^* \varphi_n \, dt = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \neq m \\ N_m^2, & \text{gdy } n = m \end{cases} \qquad \ldots \text{ I - 1.04}$$

gdzie N_m nazywamy normą funkcji $\varphi_m(t)$.

Niech U(t) będzie dowolną funkcją całkowalną wraz z kwadratem w domkniętym przedziale [a,b] .

Całki:

$$u_h = \int_a^b U(t)\, \varphi_h^*(t)\, dt, \quad (h = 1,2 \ldots) \qquad \ldots \text{ I - 1.05}$$

istnieją i nazywamy je współczynnikami Fouriera funkcji U(t). Układ ortonormalny I - 1.01 nazywamy układem zupełnym, jeżeli dla każdej funkcji U(t) całkowalnej wraz z kwadratem w przedziale [a,b] i dla każdego $\delta > 0$ możemy dobrać takie $N = N(\delta)$, iż zachodzi:

$$\int_a^b \left| U(t) - \sum_{h=1}^{h=n} u_h \varphi_h(t) \right|^2 dt < \delta \qquad \ldots \text{ I - 1.06}$$

gdy tylko $n > N(\delta)$.

Mówimy wtedy, że funkcja $U(t)$ jest aproksymowalna przez szereg $\sum_h u_h \varphi_h(t)$ przeciętnie z kwadratem z dowolną dokładnością.

Gdy $n \to \infty$, otrzymamy:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \left| U(t) - \sum_{h=1}^{h=n} u_h \varphi_h(t) \right|^2 dt = 0 \qquad \ldots \text{ I - 1.07}$$

Mamy:

$$\int_a^b \left| U(t) - \sum_h u_h \varphi_h(t) \right|^2 dt = \int_a^b \left[U(t) - \sum_h u_h \varphi_h(t) \right] \left[U(t) - \right.$$

$$\left. - \sum u_h \varphi_h(t) \right]^* dt = \int_a^b |U(t)|^2 dt - \int_a^b [U(t)]^* \left[\sum u_h \varphi_h(t) \right] dt$$

$$- \int_a^b U(t) \left[\sum u_h^* \varphi_h^*(t) \right] dt + \int \left[\sum u_h \varphi_h(t) \right] \left[\sum u_h^* \varphi_h^*(t) \right] dt$$

$$= \int_a^b |U(t)|^2 dt - \sum_h u \int_a^b [U(t)]^* \varphi_h(t) dt - \sum u_h^* \int_a^b U(t) \varphi_h^*(t) dt +$$

$$+ \sum_{h,r} u_h u_r^* \int \varphi_h(t) \varphi_r^*(t) dt$$

$$= \int_a^b |U(t)|^2 dt - \sum_h u_h \left[\int_a^b U(t) \varphi_h^*(t) dt \right]^* -$$

$$- \sum_h u_h^* \int_a^b U(t) \varphi_h^*(t) dt + \sum_{h,r} u_h u_r^* \delta_{hr}$$

$$= \int_a^b |U(t)|^2 dt - \sum u_h u_h^* - \sum u_h u_h^* + \sum u_h u_h^*$$

Stąd:

$$\int_a^b |U(t)|^2 dt - \sum |u_h|^2 = 0$$

czyli:

$$\int_a^b |U(t)|^2 dt = \sum_{h=1}^{\infty} |u_h|^2 \qquad \ldots \text{ I - 1.08}$$

Szereg $\sum_h u_h \varphi_h(t)$ nazywamy szeregiem Fouriera funkcji $U(t)$ i mówimy, że jest on zbieżny przeciętnie z kwadratem do funkcji $U(t)$.

Piszemy:

$$U(t) \sim \sum_{h=1}^{\infty} u_h \varphi_h(t) \qquad \ldots \text{ I - 1.09}$$

Należy zauważyć, że zwykła zbieżność szeregu Fouriera do funkcji dla której został zbudowany nie zawsze ma miejsce, nawet gdy układ funkcji $\{\varphi_h(t)\}$ jest zupełny. Zachodzi jednak zawsze dla układów zupełnych zbieżność przeciętna z kwadratem. W dalszym ciągu tej pracy przez układ funkcji $\{\varphi_h(t)\}$ będziemy stale rozumieli układ zupełny funkcji ortonormalnych.
Niech I(t) będzie funkcją całkowalną wraz z kwadratem w przedziale [a,b] dla której zachodzi:

$$I(t) \sim \sum_{h=1}^{\infty} i_h \varphi_h(t) \qquad \ldots \text{ I - 1.10}$$

Suma i różnica dwóch funkcji z których każda jest całkowalna wraz z kwadratem jest funkcją całkowalną wraz z kwadratem.
Stąd, na podstawie I - 1.08 zachodzi:

$$\sum_h \int_a^b [U(t) + I(t)] \varphi_h^*(t)\, dt \cdot \int_a^b [U(t) + I(t)]^* \varphi_h(t)\, dt = \int_a^b [U + I][U + I]^* dt$$

oraz:

$$\sum_h \int_a^b [U(t) - I(t)] \varphi_h^*(t)\, dt \cdot \int_a^b [U(t) - I(t)]^* \varphi_h(t)\, dt = \int_a^b [U - I][U - I]^* dt$$

Odejmując stronami, otrzymamy:

$$\sum_h \Big[\int_a^b U(t)^* \varphi_h(t)\, dt \int_a^b [I(t)]^* \varphi_h(t)\, dt + \int_a^b [U(t)]^* \varphi_h(t)\, dt \cdot \int_a^b I(t)^* \varphi_h(t)\, dt\Big] = \int_a^b (U I^* + U^* I)\, dt$$

Wstawiając w miejsce U(t) funkcję jU(t), gdzie $j = \sqrt{-1}$, otrzymamy:

$$\sum_h \Big\{\int_a^b U(t)^* \varphi_h(t)\, dt \int_a^b [I(t)]^* \varphi_h(t)\, dt - \int_a^b [U(t)]^* \varphi_h(t)\, dt \cdot \int_a^b I(t)^* \varphi_h(t)\, dt\Big\} = \int_a^b (U I^* - U^* I)\, dt$$

Stąd, dodając stronami, otrzymamy:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \int_a^b U(t) \varphi_h^*(t)\, dt \int_a^b [I(t)]^* \varphi_h(t)\, dt = \int_a^b U(t) I^*(t)\, dt$$

czyli:

$$\int_a^b U(t) I^*(t)\, dt = \sum_{h=1}^{\infty} u_h \cdot i_h^* \qquad \ldots \text{ I - 1.11}$$

2. Przestrzeń Hilberta.

Gdy dany jest układ zupełny funkcji $\{\varphi_h(t)\}$ to rozwinięcie funkcji U(t) na szereg I - 1.09 jest jednoznaczne. Oznacza to, że każdą funkcję U(t) możemy przedstawić przez jeden i tylko jeden dla danego $\{\varphi_h(t)\}$ ciąg współczynników u_h danych przez zależność I - 1.05. Ciąg ten nazwiemy przedstawicielem[1] funkcji U(t) i oznaczymy symbolem $\bar{U}$.

Zachodzi twierdzenie (Fischer-Riesz'a) powiadające, że jeżeli dany jest dowolny nieskończony ciąg liczb zespolonych $\{u_h\}$, którego suma kwadratów modułów jest zbieżna, to istnieje taka funkcja U(t) dla której ciąg liczbowy $\{u_h\}$ stanowi zespół współczynników Fouriera, czyli:

$$\sum_{h=1}^{\infty} u_h \varphi_h(t) \sim U(t) \qquad \ldots \text{ I - 2.01}$$

Zbiór wszystkich ciągów liczb zespolonych $\{u_h\}$ takich, że szereg $\sum_h |u_h|^2$ jest zbieżny nazywamy przestrzenią Hilberta (H).

W przestrzeni H moduł przedstawiciela jest określony przez relację I - 1.08 a iloczyn skalarny dwóch przedstawicieli przez relację I - 1.11.

Mamy:

$$U(t) \mathrel{\hat{=}}^{2)} \bar{U} \overset{df}{=} \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Vmatrix} \qquad \ldots \text{ I - 2.02}$$

$$|\bar{U}|^2 \overset{df}{=} \int_a^b |U(t)|^2 dt = \sum_{h=1}^{\infty} |u_h|^2 \qquad \ldots \text{ I - 2.03}$$

$$\bar{U} \cdot \bar{J} \overset{df}{=} \int_a^b U(t)\, I^*(t)\, dt = \sum_{h=1}^{\infty} u_h\, i_h^* \qquad \ldots \text{ I - 2.04}$$

3. Uogólniona funkcja symboliczna.

Niech F(t) jest funkcją rzeczywistą i okresową, całkowalną wraz z kwadratem w domkniętym przedziale $[0,T]$, gdzie T jest okresem tej funkcji.

Zachodzi:

$$F(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_h e^{jh\omega t} = f_0 + \sum_{h=1}^{+\infty} \hat{f}_h e^{jh\omega t} + \sum_{h=1}^{+\infty} \check{f}_h e^{-jh\omega t} \qquad \ldots \text{ I - 3.01}$$

---

1) W.Rubinowicz - Kwantowa teoria atomu. PWN 1954, str.209 i następne.

2) Znak $\hat{=}$ znaczy: odpowiada.

gdzie:

$$\hat{f}_h = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\, e^{-jh\omega t}\, dt; \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{I - 3.02}$$

oraz:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_h|^2 = f_o^2 + 2\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_h| < \infty \quad \ldots \text{I - 3.03}$$

Kładziemy:

$$f_o + \sqrt{2}\sum_{h=1}^{+\infty} \hat{f}_h e^{jh\omega t} \sim \hat{F}(t) \quad \ldots \text{I - 3.04}$$

Na podstawie I - 3.03 oraz twierdzenia Fischer-Riesz'a (por. str. 5) funkcja $\hat{F}(t)$ jest funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej t, okresową o okresie T i całkowalną wraz z kwadratem w domkniętym przedziale $[0,T]$.

Nazwiemy ją funkcją symboliczną stowarzyszoną z funkcją rzeczywistą F(t) /por. [12] /.

Kładziemy:

$$F_o = f_o \; ; \quad \hat{F}_h = \sqrt{2}\; \hat{f}_h \quad \ldots \text{I - 3.05}$$

Stąd:

$$\hat{F}(t) \sim F_o + \sum_{h=1}^{\infty} \hat{F}_h\, e^{jh\omega t} \quad \ldots \text{I - 3.06}$$

Łatwo wykazać, iż:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\hat{F}(t)|^2\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T [F(t)]^2\, dt \quad \ldots \text{I - 3.07}$$

t.zn., że wartości skuteczne (normy) - funkcji rzeczywistej i stowarzyszonej z nią funkcji symbolicznej są sobie równe.

Z punktu widzenia praktyki elektrotechnicznej relacja I-3.07 oznacza, że funkcje przebiegu $\hat{F}(t)$ i F(t) są pomiarowo nierozróżnialne przy pomocy mierników elektrycznych rejestrujących wartości skuteczne.

II. Układy jednofazowe

1. Moc symboliczna, czynna i bierna w układach jednofazowych.

Niech dane są dwie funkcje rzeczywiste, okresowe $U(t)$ i $J(t)$ całkowalne wraz z kwadratem w wspólnym domkniętym przedziale $[0,T]$ reprezentujące odpowiednio przebieg napięcia i prądu w układzie 1-fazowym.

Zachodzi:

$$U(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_h e^{jh\omega t} \quad ; \quad J(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{i}_h e^{jh\omega t} \qquad \ldots \text{ II - 1.01}$$

Kładziemy:

$$V_0 = u_0 \; ; \quad \hat{V}_h = \sqrt{2}\,\hat{u} = V e^{j\beta_h}$$

$$I_0 = i_0 \; ; \quad \hat{I}_h = \sqrt{2}\,\hat{i}_h = I_h e^{j\alpha_h} \qquad \ldots \text{ II - 1.02}$$

Stąd, na podstawie I-1.11 oraz I-3.04, otrzymamy:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t)\,\check{J}(t)\,dt = V_0 I_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \hat{V}_h \check{I}_h \qquad \ldots \text{ II - 1.03}$$

$$= V_0 I_0 + \sum_{h=1}^{\infty} V_h I_h e^{j\psi_h}$$

gdzie:

$\psi_h = \beta_h - \alpha_h$, a $\check{I}_h$ jest wielkością sprzężoną do wielkości $\hat{I}_h$.

Moc:

$$\hat{P}_i \overset{df}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t)\,\check{J}(t)\,dt \qquad \ldots \text{ II - 1.04}$$

nazwiemy uogólnioną mocą symboliczną.

Zachodzi:

$$P = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t)\,\check{J}(t)\,dt\right\} \qquad \ldots \text{ II - 1.05}$$

$$= V_0 I_0 + \sum_{h=1}^{\infty} V_h I_h \cos\psi_h$$

$$Q = \mathrm{Jm}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t)\,\check{J}(t)\,dt\right\} \qquad \ldots \text{ II - 1.06}$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} V_h I_h \sin\psi_h$$

gdzie P jest mocą czynną a Q jest mocą bierną układu.

Tak jak dla przebiegów sinusoidalnych, otrzymamy:

$$\hat{P}_i = P + jQ \; ; \quad P_i = \sqrt{P^2 + Q^2} \qquad \ldots \text{ II - 1.07}$$

2. <u>Splot i jego interpretacja.</u>

Kładziemy:

$$\hat{S}(t) \overset{df}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t+\tau)\,\check{J}(\tau)\,d\tau \qquad \ldots \text{ II.- 2.01}$$

Prawa strona relacji II-2.01 jest splotem dwóch funkcji okresowych (o wspólnym okresie T), zespolonych i całkowalnych wraz z kwadratem w domkniętym przedziale $[0,T]$. Splot dla dowolnych dwóch funkcji tak określonych zawsze istnieje i jest funkcją okresową o okresie T, całkowalną wraz z kwadratem w przedziale $[0,T]$.

Łatwo wykazać, że:

$$\hat{S}(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \hat{V}_h \check{I}_h e^{jh\omega t} \qquad \ldots \text{ II - 2.02}$$

Stąd:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\hat{S}(t)|^2\,dt = \sum_{h=0}^{\infty} (V_h I_h)^2$$

Kładziemy:

$$S \overset{df}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |\hat{S}(t)|^2\,dt} \qquad \ldots \text{ II - 2.03}$$

czyli, że:

$$S = \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} (V_h I_h)^2} \qquad \ldots \text{ II - 2.04}$$

Wielkość S nazwiemy <u>mocą pozorną</u> układu 1-fazowego (dwuprzewodowego lub dwójnika).

Naturalnie, że tak przyjęta definicja mocy pozornej nie pokrywa się z ogólnie przyjętą definicją mocy pozornej za którą zwykło się przyjmować wyrażenie: U.J tj. iloczyn wartości skutecznych prądu i napięcia. Za nową definicją mocy pozornej przemawia jednak szereg względów o podstawowym znaczeniu. I tak, jak wykażemy, splot $\hat{S}(t)$ podobnie jak moce P, Q i $\hat{P}_i$ jest wielkością zachowawczą [1]. Zachowawcza własność splotu nadaje mu natychmiast głębokie znaczenie energetyczne wykazujące, iż $\hat{S}(t)$ jest funkcją całkowitej energii elektrycznej

1) Przez wielkości zachowawcze należy rozumieć te wielkości które spełniają tak zwaną zasadę zachowania mocy. Por. rozdział IV.

pulsującej w układzie,wyprowadzonej na zewnątrz układu lub dostarczonej do układu na jednostkę czasu. Aby bardziej uwypuklić własność o którą chodzi położymy:

$$\hat{S}_h \overset{df}{=} \hat{V}_h \check{I}_h \; ; \quad S_h \overset{df}{=} V_h I_h \qquad \ldots \text{ II - 2.05}$$

Stąd,wyrażenie II-2.02 przyjmie postać:

$$\hat{S}(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \hat{S}_h \, e^{jh\omega t} \qquad \ldots \text{ II - 2.06}$$

a wyrażenie II-2.04 postać:

$$S = \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} S_h^2} \qquad \ldots \text{ II - 2.07}$$

Jak widać,funkcja $\hat{S}(t)$ jest funkcją mocy symbolicznej dostarczonej do układu (lub pobieranej z układu) wspólnie przez wszystkie występujące w przebiegach harmoniczne. Moc S jest średnią kwadratową z wszystkich mocy pozornych dostarczonych (lub pobranych) przez poszczególne harmoniczne. Rozważając przebiegi prądu lub napięcia z punktu widzenia wpływu poszczególnych harmonicznych na układ,taka definicja mocy pozornej jest szczególnie cenna. Wydaje się,że moc S jest tą właśnie mocą,która powinna służyć za podstawę rozliczenia się między odbiorcą i wytwórcą energii elektrycznej.

Kładziemy:

$$P_m = U.J \qquad \ldots \text{ II - 2.08}$$

Moc P_m nazwiemy mocą modułową. Z nierówności Schwarza, otrzymamy:

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t+\tau)\,\check{J}(\tau)\,d\tau\right|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{U}(t+\tau)|^2\,d\tau \cdot \frac{1}{T}\int_0^T |\check{J}(\tau)|^2 d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_t^{T+t} |\hat{U}(\tau)|^2\,d\tau \cdot \frac{1}{T}\int_0^T |\check{J}(\tau)|^2 d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{U}(\tau)|^2\,d\tau \cdot \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{J}(\tau)|^2 d\tau$$

czyli,że:

$$|\hat{S}(t)|^2 \leq P_m^2$$

Stąd,na podstawie własności całki Riemanna,otrzymujemy:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\hat{S}(t)|^2\,dt \leq P_m^2$$

$$S \leq P_m \qquad \ldots \text{ II - 2.09}$$

Nierówność II-2.09 powiada, że moc pozorna S jest co najwyżej równa mocy modułowej P_m . W rzeczywistości moc S jest równa mocy P_m w układach o przebiegach sinusoidalnych.

3. Rozkład ortogonalny funkcji symbolicznej.

Kładziemy:

$$\hat{J}(t) \overset{df}{=} \hat{J}_i(t) + \hat{J}_\psi(t)$$

$$\hat{J}_i(t) \overset{df}{=} \frac{\check{P}_i}{U^2} \cdot \hat{U}(t) \qquad \ldots \text{ II - 3.01}$$

Stąd:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{J}_i(t)\, \check{J}_\psi(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\check{P}_i}{U^2}\, \hat{U}(t)\left[\check{J}(t) - \frac{\hat{P}_i}{U^2}\, \check{U}(t)\right] dt$$

$$= \frac{\check{P}_i}{U^2}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t)\, \check{J}(t)dt - \frac{\hat{P}_i}{U^2} \cdot \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{U}(t)|^2 dt\right]$$

$$= \frac{\check{P}_i}{U^2}\left[\hat{P}_i - \hat{P}_i\right] = 0$$

Z powyższego wynika, że funkcja $\hat{J}_\psi(t)$ jest ortogonalna do funkcji $\hat{J}_i(t)$ i dlatego rozkład II-3.01 funkcji $\hat{J}(t)$ jest rozkładem ortogonalnym tej funkcji. Funkcję $\hat{J}_\psi(t)$ nazwiemy symboliczną funkcją prądu deformacji.

Zachodzi:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{J}(t)\, \check{J}_\psi(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{J}(t)\left[\check{J}(t) - \check{J}_i(t)\right] dt$$

$$= J^2 - \frac{P^2 + Q^2}{U^2}$$

Z drugiej strony otrzymamy:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{J}(t)\, \check{J}_\psi(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\hat{J}_i(t) + \hat{J}_\psi(t)\right] \check{J}_\psi(t)dt = J_\psi^2$$

Stąd:

$$J_\psi^2 = J^2 - \frac{P^2 + Q^2}{U^2}$$

Kładziemy:

$$K \overset{df}{=} U.J_\psi \qquad \ldots \text{ II - 3.02}$$

i otrzymujemy:

$$P_m^2 = P^2 + Q^2 + K^2 \qquad \ldots \text{ II - 3.03}$$

Moc K nazwiemy mocą deformacji.

Kładziemy:

$$g \overset{df}{=} \frac{P}{U^2}; \quad b \overset{df}{=} \frac{Q}{U^2}; \quad \hat{y} \overset{df}{=} g - jb \qquad \text{II - 3.04}$$

Wielkości g i b są rzeczywiste i posiadają wymiar w simensach. Nazwiemy je odpowiednio przewodnością czynną i przewodnością bierną układu 1-fazowego (dwójnika). $\hat{y}$ jest symboliczną admitancją tego układu. Na podstawie II-3.04 mamy:

$$\begin{aligned} \hat{J}_i(t) &= \hat{y}\,\hat{U}(t) \\ \hat{J}_\psi(t) &= \hat{J}(t) - \hat{y}\,\hat{U}(t) \end{aligned} \qquad \text{... II - 3.05}$$

Związki II-3.05 pozwalają na sprecyzowanie pojęcia deformacji.

<u>Definicja</u>: Funkcję symboliczną $\hat{J}(t)$ nazwiemy funkcją zdeformowaną od funkcji symbolicznej $\hat{U}(t)$, jeśli ma miejsce nierówność

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left|\hat{J}(t) - \hat{y}\,\hat{U}(t)\right|^2 dt > 0 \qquad \text{... II - 3.06}$$

Z powyższej definicji wynika, że wartość skuteczna J_ψ jest miarą deformacji funkcji symbolicznej przebiegu prądu $J(t)$ a moc K jest miarą dodatkowego obciążenia układu wynikłego z deformacji [1] przebiegu prądu względem przebiegu napięcia. Pełniejszą interpretację mocy K zajmiemy się później.

Kładziemy:

$$\begin{aligned} \hat{J}_w(t) &\overset{df}{=} g\,\hat{U}(t) \\ \hat{J}_q(t) &\overset{df}{=} b\,\hat{U}(t) \end{aligned} \qquad \text{... II - 3.07}$$

Funkcję $\hat{J}_w(t)$ nazwiemy symboliczną funkcją <u>prądu czynnego</u> a funkcję $\hat{J}_q(t)$ symboliczną funkcją <u>prądu biernego</u> rozpatrywanego układu.

Zachodzi:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t)\,\check{J}_w(t)\,dt \\ Q &= \frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}(t)\,\check{J}_q(t)\,dt \end{aligned} \qquad \text{... II - 3.08}$$

Obie funkcje podcałkowe w wyrażeniu II-3.08 są rzeczywiste i połóżmy:

---

1) W układach 1-fazowych lub przy rozpatrywaniu układu składającego się z jednego dwójnika pojęcie deformacji pokrywa się z pojęciem odkształcenia. W ogólności tak jednak nie jest.

$$P(t) \overset{df}{=} \hat{U}(t)\ \check{J}_{w}(t)$$

$$Q(t) \overset{df}{=} \hat{U}(t)\ \check{J}_{q}(t) \qquad \ldots \text{ II - 3.09}$$

Otrzymamy:

$$P = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} P(t)\ dt$$

$$Q = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} Q(t)\ dt \qquad \ldots \text{ II - 3.10}$$

Jak widać z relacji II-3.10 między mocą czynną P i mocą bierną Q nie istnieje żadna istotna różnica i co więcej: relacje II-3.10 możnaby przyjąć za definicje mocy czynnej P i mocy biernej Q po uprzednim przyjęciu definicji II-1.04 dla mocy symbolicznej $\hat{P}_i$. Nie można bowiem, jak to czyni szereg autorów (np. [17], [18]) definiować funkcji mocy czynnej lub biernej przy pomocy iloczynu funkcji przebiegów napięcia i prądu (tj. U(t). J(t)) uzależniając ich rozróżnienie od rodzaju zasilanych elementów w szczególności przez jak gdyby przeciwstawienie oporowi czynnemu cewki indukcyjnej lub pojemności kondensatora. Definicje II-3.09 są jedynymi prawidłowymi definicjami funkcji mocy czynnej i mocy biernej. Wynika z nich, że obie moce są miarami energii pola elektromagnetycznego układu na jednostkę czasu. Ściśle: wartość średnia za okres T z funkcji Q(t) jest równa mocy Q. Moc Q jest miarą energii pola elektromagnetycznego, która na jednostkę czasu pulsuje między układem cewek indukcyjnych i układem kondensatorów lub jest wymieniana między generatorem zasilającym a cewką indukcyjną podczas 1 jednostki czasu pracy układu itp. Moc czynna P jest miarą tej ilości energii elektromagnetycznej, która w jednostce czasu zostaje przemieniona na inny rodzaj energii i z układu zostaje wyprowadzona na zewnątrz lub do układu zostaje dostarczona.

Różnica więc między mocami P i Q polega nie na tym, że jedna jest miarą energii pola a druga nie lecz na tym, że mówią one o różnym sposobie wykorzystania energii elektromagnetycznej układu.

Kładziemy:

$$\hat{P}(t) \overset{df}{=} \hat{U}(t)\ \check{J}(t)$$

$$\hat{K}(t) \overset{df}{=} \hat{U}(t)\ \check{J}_{\psi}(t) \qquad \ldots \text{ II - 3.11}$$

Zachodzi:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{K}(t)\,dt = 0 \qquad \ldots \text{ II - 3.12}$$

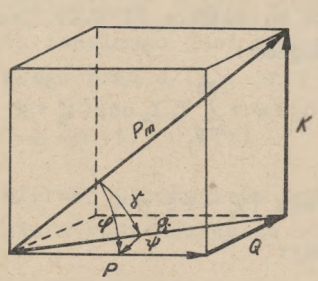
Z relacji II-3.12 wynika, że wystąpienie prądu deformacji $\hat{J}_{\psi}(t)$ nie powoduje dodatkowych przemian energetycznych w układzie. Nie oznacza to oczywiście, że nie powoduje on dodatkowego obciążenia układu. Na podstawie definicji II-3.09 oraz II-3.11, otrzymamy:

$$\hat{P}(t) = P(t) - jQ(t) + \hat{K}(t) \qquad \ldots \text{ II - 3.13}$$

Równanie II-3.13 określa w sposób jednoznaczny stan energetyczny układu. Funkcje P(t) i Q(t) określają przemiany energetyczne zachodzące w układzie a $\hat{K}(t)$ określa wpływ deformacji przebiegu prądu od przebiegu napięcia w tym układzie.

4. Współczynniki mocy[1].

Z przedstawionej teorii - a w szczególności z zależności II-3.03 - wynika, że związki zachodzące między poszczególnymi mocami dadzą się w prosty spoób przedstawić za pomocą prostopadłościanu (rys.1), który nazwiemy prostopadłościanem mocy.



Rys.1

Kładziemy:

$$\cos\varphi = \frac{P}{P_m}\ ; \quad \cos\psi = \frac{P}{P_i}\ ; \quad \cos\gamma = \frac{P_i}{P_m} \qquad \ldots \text{ II - 4.01}$$

Zachodzi:

$$\cos\varphi = \cos\psi \cdot \cos\gamma \qquad \ldots \text{ II - 4.02}$$

gdzie $\cos\varphi$ nazwiemy współczynnikiem mocy czynnej układu

1) Por. pracę autora [12] .

o przebiegach odkształconych; cos ψ możnaby zaś nazwać współczynnikiem reakcji obciążenia.

Zachodzi:

$$\hat{J}_\psi(t) = \hat{J}(t) - \hat{y}\hat{U}(t)$$

Stąd:

$$\hat{J}_\psi(t) = I_o + \sum_{h=1}^{\infty} \hat{I}_h e^{jh\omega t} - \hat{y}(V_o + \sum_{h=1}^{\infty} \hat{V}_h e^{jh\omega t})$$

$$= (I_o - \hat{y}V_o) + \sum_{h=1}^{\infty} (\hat{I}_h - \hat{y}\hat{V}_h) e^{jh\omega t} \quad \ldots \text{ II - 4.03}$$

Kładziemy (rys.1):

$$\cos\psi = \frac{P}{P_i} \; ; \quad \sin\psi = \frac{Q}{P_i} \quad \ldots \text{ II - 4.04}$$

Stąd:

$$\hat{y} = y\, e^{-j\psi} \quad , \text{ gdzie: } y = |\hat{y}| \quad \ldots \text{ II - 4.05}$$

Mamy:

$$J^2_\psi = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{J}_\psi(t)\, \check{J}(t)\, dt$$

Przeto:

$$J^2_\psi = (I_o - \hat{y}\, V_o)\cdot I_o + \sum_{h=1}^{\infty} (\hat{I}_h - \hat{y}\, \hat{V}_h)\, \check{I}_h$$

$$= J^2 - y\left[V_o I_o e^{-j\psi} + \sum_{h=1}^{\infty} V_h I_h e^{j(\psi_h - \psi)}\right] \quad \ldots \text{ II - 4.06}$$

Ponieważ lewa strona wyrażenia II-4.06 jest wielkością rzeczywistą, przeto otrzymujemy:

$$J^2_\psi = J^2 - y\left[V_o I_o \cos\psi + \sum_{h=1}^{\infty} V_h I_h \cos(\psi_h - \psi)\right] \quad \ldots \text{ II - 4.07}$$

oraz:

$$\sum_{h=0}^{\infty} V_h I_h \sin(\psi_h - \psi) = 0 \quad \ldots \text{ II - 4.08}$$

Ze wzoru II-4.07 mamy:

$$K^2 = P_m^2 - P_i\left[V_o I_o \cos\psi + \sum_{h=1}^{\infty} V_h I_h \cos(\psi_h - \psi)\right].$$

Stąd

$$P_i = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sum_{h=0}^{\infty} V_h I_h \cos(\psi_h - \psi); (\psi_o = 0) \quad \text{III - 4.09}$$

Związek II-4.08 może stać się podstawą do określenia dokładności z jaką została przeprowadzona analiza układu o przebiegach odkształconych w zależności od przyjętych w rachunku ilości wyższych harmonicznych zawartych w przebiegach.

Według rys.1 otrzymujemy:

$$\cos\gamma = \frac{P_i}{P_m} = \frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{U \cdot J} = \frac{\sum_{h=0}^{\infty} V_h I_h \cos(\psi_h - \psi)}{\sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} V_h^2}\ \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} I_h^2}} \quad \ldots \text{ II - 4.10}$$

Wielkość $\cos\gamma$ nazwiemy w s p ó ł c z y n n i k i e m d e f o r m a c j i.

Relacja II-4.10 pozwala na wyliczenie współczynnika deformacji w zależności od zawartości wyższych harmonicznych w przebiegach prądu i napięcia.

5. Kompensacja mocy biernej w układach 1-fazowych.

W tym paragrafie zadanie, które sobie stawiamy polega na kompensacji mocy biernej Q i w związku z tym na wyjaśnieniu roli mocy deformacji K w układzie. Ponieważ samo zagadnienie kompensacji mocy Q w układach o przebiegach odkształconych ma duże znaczenie praktyczne rozumowanie ograniczymy do układów mających znaczenie praktyczne. Z praktyki wiemy, że moc Q pobierana przez układ ma charakter indukcyjny (t.zn., że jest dodatnia) i że elementem kompensującym jest kondensator o odpowiednio dobranej pojemności.

Z powyżej przedstawionej teorii wynika, że wprowadzenie do układu kondensatora idealnego jest równoważne wprowadzeniu elementu pobierającego prąd $J_c(t)$, przy czym:

$$\hat{J}_c(t) = -j\,\hat{J}_{qc}(t) + \hat{J}_{\psi c}(t) \quad \ldots \text{ II - 5.01}$$

Kompensacja mocy biernej Q polega na tym aby dobrać tak pojemność C kondensatora kompensującego aby zachodziło:

$$\hat{J}_{qc}(t) = -\hat{J}_q(t) \quad \ldots \text{ II - 5.02}$$

W myśl definicji pojemności C dowolnego kondensatora zachodzi:

$$Q_e(t) = C\,U(t) \quad \ldots \text{ II - 5.03}$$

gdzie $Q_e(t)$ jest funkcją zmiennego naboju elektrycznego rozmieszczającego się na okładce kondensatora o pojemności C. Stąd:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left[Q_e(t)\right]^2 dt = C^2 \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \left[U(t)\right]^2 dt$$

czyli:

$$Q_e = CU \quad \ldots \text{ II - 5.04}$$

gdzie Q_e i U są odpowiednio wartościami skutecznymi funkcji naboju elektrycznego rozmieszczającego się na okładce kondensatora oraz funkcji napięcia przyłożonego między okładki kondensatora. Z relacji II-5.04 w y n i k a następująca d e f i n i c j a wartości skutecznej funkcji naboju elektrycznego: Wartość skuteczna funkcji naboju elektrycznego jest równa wartości takiego równoważnego naboju statycznego, który rozmieszczony na okładce tego samego kondensatora co nabój zmienny wywoła między okładkami danego kondensatora różnicę potencjałów równą wartości skutecznej napięcia przyłożonego. Funkcją stowarzyszoną z funkcją $Q_e(t)$ jest funkcja symboliczna:

$$\hat{Q}_e(t) = C\hat{U}(t) \qquad \ldots \text{ II - 5.05}$$

i przy jej pomocy tak samo możemy obliczyć szukaną pojemność kondensatora kompensującego.

Załóżmy że przez kondensator płynie jedynie prąd $\hat{J}_{qc}(t)$. Otrzymamy:

$$\hat{Q}_e(t) = \int \hat{J}_{qc}(t)\, dt$$

$$= -\int \hat{J}_q(t)\, dt \qquad \ldots \text{ II - 5.06}$$

gdzie $\hat{J}_q(t)$ jest prądem, który należy skompensować.
Wykonując zaznaczone działanie i kładąc $V_0 = 0$ (wypadek jedynie w praktyce występujący), otrzymamy:

$$\int \hat{J}_q(t)\, dt = \frac{Q}{U^2} \int \hat{U}(t)\, dt = \frac{Q}{U^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\hat{V}_h}{j\omega h} \cdot e^{jh\omega t}$$

Stąd wartość skuteczna:

$$\frac{1}{T} \int^{T} \hat{Q}_e(t)\, \check{Q}_e(t)\, dt = \left(\frac{Q}{U^2}\right)^2 \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\hat{V}_h \cdot \check{V}_h}{h^2\omega^2}$$

czyli:

$$Q_e = \frac{Q}{U^2\omega} \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \cdot V_h^2} \qquad \ldots \text{ II - 5.07}$$

S z u k a n a p o j e m n o ś ć: $C = \frac{Q_e}{U}$, wynosi:

$$C = \frac{Q}{U^2\omega} \cdot \left(\frac{V_1}{U}\right) \cdot \sqrt{1 + \sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left(\frac{V_h}{V_1}\right)^2} \qquad \ldots \text{ II - 5.08}$$

W zależności tej moc bierna Q jest mocą pobieraną przez układ kompensowany przed wprowadzeniem kondensatora.
Jak widać, ze względu na mały wpływ wyższych harmonicznych

na wielkość wyrażenia II-5.08 możemy z dobrym przybliżeniem położyć:

$$C \cong \frac{Q}{U^2\omega} \cdot \left(\frac{V_1}{U}\right) \qquad \ldots \text{ II - 5.09}$$

lub nawet:

$$C \cong \frac{Q}{U^2\omega} \qquad \ldots \text{ II - 5.10}$$

co jest zgodne z przyjętą praktyką obliczania pojemności baterii kompensującej.

Prąd $\hat{J}_{qc}(t)$ jest prądem płynącym przez kondensator, potrzebnym do całkowitej kompensacji mocy biernej Q. W rzeczywistości jednak przez kondensator płynie $\hat{J}_c(t)$, gdzie:

$$\hat{J}_c(t) = +j\,\hat{J}_q(t) + \hat{J}_{\psi c}(t)$$

$$= C\,\frac{d\,\hat{U}(t)}{dt} = j\,C\omega \cdot \sum_{h=1}^{\infty} h\,\hat{V}_h\,e^{jh\omega t}$$

Stąd zakładając że pojemność C została obliczona z wzoru przybliżonego II-5.10, otrzymamy:

$$J_{\psi c} = \frac{Q}{J^2} \cdot \sqrt{\sum_{h=2}^{\infty} V_h^2\,(h-1)^2} \qquad \ldots \text{ II - 5.11}$$

Prąd $J_{\psi c}$ jest prądem przeciążającym kondensator. Przeciążenie to jest wynikiem wystąpienia wyższych harmonicznych w napięciu zasilania. Jak widać, pierwsza harmoniczna nie wpływa na przeciążenie kondensatora kompensującego, jeśli do obliczenia pojemności C posłużymy się wzorem II-5.10. Stąd wniosek, że wzór ten nie należy traktować jako pewne przybliżenie bardziej ogólnego wzoru II-5.08 lecz jako wzór ścisły, stanowiący podstawę obliczania pojemności C. Moc deformacji K_c pobierana przez kondensator tak obliczony wynosi:

$$K_c = U^2 C\omega \cdot \sqrt{\sum_{h=2}^{\infty} (h-1)^2 \left(\frac{V_h}{U}\right)^2} \qquad \ldots \text{ II - 5.12}$$

Moc K_c jest miarą przeciążenia kondensatora i powoduje dodatkowe obciążenie sieci. Dlatego jej obliczenie jest konieczne. Z zależności II-5.12 wynika bowiem, że wyższe harmoniczne napięcia powinny być eliminowane nawet w wypadku sztywnego napięcia zasilania, jeśli wpływ ich na moc K_c jest duży.
Jak wiadomo możemy to uzyskać przez zastosowanie cewek indukcyjnych o małej indukcyjności połączonych szeregowo z pojem-

BIBLIOTEKA

nością C kondensatora kompensującego ([8] i [9])

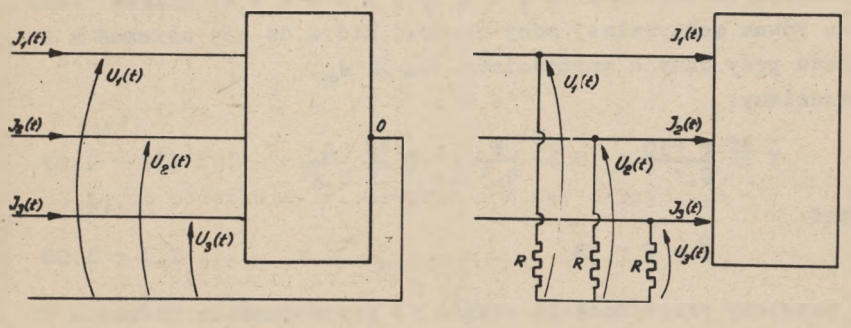
6. Uwagi krytyczne odnoszące się do niektórych teorii mocy.

Od szeregu lat, a w szczególności w ostatnim dziesięcioleciu, zagadnienie teorii mocy w układach o przebiegach odkształconych odgrywa dużą rolę. Wielu autorów, (por. spis literatury) zajmujących się tym zagadnieniem, podało niezależnie od siebie lub powiązane z sobą teorie wprowadzające często w sposób dowolny wielkości określone przez nich jako moce, takiego lub innego typu. Ta dowolność naturalnie nigdy nie jest całkowita. Jest ona ograniczona z jednej strony tradycyjnymi definicjami wielkości stosowanymi niekiedy w praktyce a z drugiej strony pewnymi formalnymi związkami (prawie zawsze kwadratowymi), które dany autor chce zachować lub uzyskać. Odnosi się to w szczególności do ważnego związku II-3.03, który po raz pierwszy został podany przez C.I.Budeanu ([3]). Jednak w pracach Budeanu moc deformacji K (oznaczona tam symbolem P_d) i jego następców (np. [1], [5], [13], [14]) jest zdefiniowana w sposób formalny przy pomocy związków zachodzących między poszczególnymi harmonicznymi, które: a) nie zawsze są uzasadnione matematycznie, b) nie posiadają fizykalnej interpretacji. Zdaniem autora tej pracy w poprawnej, ogólnej teorii mocy związek między poszczególnymi harmonicznymi przebiegów nie może posłużyć do definicji określonych wielkości fizykalnych, jeżeli nie wynika on z określonego działania matematycznego zachodzącego (dozwolonego) w przestrzeni Hilberta. Co więcej: wymagamy aby wszystkie zdefiniowane moce były wielkościami niezmiennymi ze względu na transformację unitarną symbolicznych funkcji przebiegów. Wynika to stąd, że wraz z transformacją bazy (w przestrzeni Hilberta), której dobór z fizykalnego punktu widzenia jest przypadkowy, nie może ulec zmianie wartość wielkości fizykalnej. Pod wpływem transformacji unitarnej nie ulegają zmianie jedynie wartości skuteczne funkcji przebiegów, ich iloczyny skalarne i sploty. Stąd, wszystkie moce mające sens fizykalny mogą być zdefiniowane tylko przy pomocy wartości skutecznych, iloczynów skalarnych lub splotów funkcji przebiegów.

III. Układy wielofazowe i wieloprzewodowe.

1. Moc w układach wielofazowych i wieloprzewodowych.

Dla k-tej fazy lub k-tego przewodu wprowadzamy oznaczenia (rys.2):



Rys.2

$\hat{U}_k(t)$ = symboliczna funkcja przebiegu napięcia zasadniczego.

$\hat{J}_k(t)$ = symboliczna funkcja przebiegu prądu zasadniczego.

Ogólnie: wskaźnik „k" odnosi się stale do k-tej fazy lub k-tego przewodu,

wskaźnik „h" odnosi się stale do h-tej harmonicznej.

Kładziemy:

$$\hat{P}_i \overset{df}{=} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t)\, \check{J}_k(t)\, dt$$

$$\hat{S}(t) \overset{df}{=} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t+\tau)\, \check{J}_k(\tau)\, d\tau \qquad \text{... III - 1.01}$$

Stąd:

$$P = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t)\, \check{J}_k(t)\, dt \right\} \qquad \text{... III - 1.02}$$

$$Q = J_m \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t)\, \check{J}_k(t)\, dt \right\} \qquad \ldots \text{ III - 1.03}$$

Zachodzi:

$$\hat{P} = P + j\,Q \;; \quad P_i = \sqrt{P^2 + Q^2} \qquad \ldots \text{ III - 1.04}$$

Kładziemy:

$$U_m \overset{df}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} U_k^2} \;; \quad J_m \overset{df}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} J_k^2} \qquad \ldots \text{ III - 1.05}$$

oraz:

$$P_m \overset{df}{=} U_m \cdot J_m \qquad \ldots \text{ III - 1.06}$$

Wielkość P_m nazwiemy **mocą modułową** układu. Jest ona równa maksymalnej mocy czynnej, którą da się uzyskać z układu przy danych wartościach U_m i J_m.

Kładziemy:

$$\hat{Y} \overset{df}{=} \frac{P - jQ}{U_m^2} \;; \quad G \overset{df}{=} \frac{P}{U_m^2} \;; \quad B \overset{df}{=} \frac{Q}{U_m^2} \qquad \ldots \text{ III - 1.07}$$

Stąd:

$$\hat{Y} = G - jB \qquad \ldots \text{ III - 1.08}$$

G nazwiemy przewodnością czynną, B przewodnością bierną a $\hat{Y}$ symboliczną admitancją układu.

Kładziemy:

$$\hat{J}_{ik}(t) \overset{df}{=} \hat{Y}\, \hat{U}_k(t)$$

$$\hat{J}_{\psi k}(t) \overset{df}{=} \hat{J}_k(t) - \hat{J}_{ik}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, n \qquad \ldots \text{ III - 1.09}$$

Zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{J}_{\psi k}(t)\, \check{J}_{ik}(t)\, dt = \check{Y} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{J}_{\psi k}(t)\, \check{U}_k(t)\, dt$$

$$= \check{Y} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\hat{J}_k(t) - \hat{Y}\, \hat{U}_k(t) \right] \check{U}_k(t)\, dt$$

$$= \check{Y} \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} \check{P}_{ik} - \hat{Y} \sum_{k=1}^{k=n} U_k^2 \right\} = \check{Y} \left(\check{P}_i - \check{P}_i \right) = 0$$

Stąd:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{J}_{\psi k}(t)\, \check{J}_k(t)\, dt = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{J}_{\psi k}(t) \cdot \left[\check{J}_{ik}(t) + \check{J}_{\psi k}(t) \right] dt$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{J}_{\psi k}(t) \cdot \check{J}_{\psi k}(t)\, dt = \sum_{k=1}^{k=n} J_{\psi k}^2$$

Kładziemy:

$$J_{\psi m} \overset{df}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} J_{\psi k}^2}$$

Stąd:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{J}_{\psi k}(t)\, \check{J}_k(t)\, dt = J_{\psi m}^2$$

Z drugiej strony:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{J}_{\psi k}(t) \check{J}_k(t) dt = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\hat{J}_k(t) - \hat{Y}\hat{U}_k(t)\right] \cdot \check{J}_k(t) dt$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \left|\hat{J}_k(t)\right|^2 dt - \hat{Y} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t) \cdot \check{J}_k(t)\, dt$$

$$= J_m^2 - \hat{Y}\, \hat{P}_i$$

Czyli:

$$J_{\psi m}^2 = J_m^2 - \frac{P^2 + Q^2}{U_m^2}$$

Stąd:

$$P_m^2 = P^2 + Q^2 + K^2 \qquad \text{... III - 1.10}$$

gdzie:

$$K \overset{df}{=} U_m\, J_{\psi m} \qquad \text{... III - 1.11}$$

Moc K nazwiemy m o c ą d e f o r m a c j i. Jest ona zależna tak od zawartości wyższych harmonicznych w funkcjach przebiegów jak i od n i e r ó w n o m i e r n o ś c i poboru lub wydatku mocy czynnej i biernej przez poszczególne fazy. Bardziej szczegółowo jej znaczeniem zajmiemy się później.

Kładziemy:

$$\hat{J}_{wk}(t) \overset{df}{=} G\, \hat{U}_k(t) \;;\; \hat{J}_{qk}(t) \overset{df}{=} B\, \hat{U}_k(t) \qquad \text{... III - 1.12}$$

$$P_k(t) \overset{df}{=} \hat{U}_k(t)\, \check{J}_{wk}(t) \;;\; Q_k(t) \overset{df}{=} \hat{U}_k(t)\, \check{J}_{qk}(t) \qquad \text{... III - 1.13}$$

$$P = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T P_k(t)\, dt$$

$$Q = \sum_{k=n}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T Q_k(t)\, dt \qquad \text{... III - 1.14}$$

Podobnie jak dla układów 1-fazowych z zależności III-1.14 wynika jednoznaczna interpretacja energetyczna mocy czynnej P i mocy biernej Q. Obie moce są miarami energii pola elektromagnetycznego na jednostkę czasu. Różnica między nimi polega

na tym, iż mówią one o różnym sposobie wykorzystania tej energii.

Kładziemy:

$$J_{wm} \overset{df}{=} \pm\sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} J_{wk}^2} \quad ; \quad J_{qm} \overset{df}{=} \pm\sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} J_{qk}^2} \qquad \ldots \text{ III - 1.15}$$

W definicjach III-1.15 znak „ + " lub „ - " obieramy w zależności od tego jaki znak mają moce P i Q [1].

Na podstawie III-1.14, otrzymamy:

$$P = U_m J_{wm} \quad ; \quad Q = U_m J_{qm} \qquad \ldots \text{ III - 1.16}$$

Stąd, na podstawie III-1.10 zachodzi:

$$J_m^2 = J_{wm}^2 + J_{qm}^2 + J_{\psi m}^2 \qquad \ldots \text{ III - 1.17}$$

Kładziemy:

$$P(t) = \sum_{k=1}^{k=n} P_k(t) \quad ; \quad Q(t) = \sum_{k=1}^{k=n} Q_k(t)$$

$$\hat{P}(t) = \sum_{k=1}^{k=n} \hat{U}_k(t)\, \check{J}_k(t)$$

$$\hat{P}_i(t) = \sum_{k=1}^{k=n} \hat{U}_k(t)\, \check{J}_{ik}(t) \qquad \ldots \text{ III - 1.18}$$

$$\hat{K}(t) \overset{df}{=} \hat{P}(t) - \hat{P}_i(t) \qquad \ldots \text{ III - 1.19}$$

Otrzymamy:

$$\hat{P}(t) = P(t) - j\, Q(t) + \hat{K}(t) \qquad \ldots \text{ III - 1.20}$$

oraz:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \hat{K}(t)\, dt = 0 \qquad \ldots \text{ III - 1.21}$$

Funkcje mocy P(t), Q(t) i $\hat{K}(t)$ określają w sposób jednoznaczny i zupełny stan energetyczny każdego układu elektrycznego w stanie ustalonym.

Przechodzimy do omówienia mocy pozornej S. Z definicji III-1.01 otrzymamy:

$$S = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} S_k^2 + \sum_{k \neq l} (\hat{S}_k, \check{S}_l)} \qquad \ldots \text{ III - 1.22}$$

gdzie:

$$(\hat{S}_k, \check{S}_l) \overset{df}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \hat{S}_k(t)\, \check{S}_l(t)\, dt$$

---

1) znak „ + " obieramy dla dodatnich a znak „ - " dla ujemnych wartości odpowiednio mocy P i Q.

Załóżmy,że w danym układzie zachodzi:

$$\hat{S}_k(t) = \hat{S}_l(t) \qquad \text{... III - 1.23}$$

dla każdego k i l, gdzie k,l = 1, 2, 3, ... , n.
W tym przypadku:

$$S = n.S_k \qquad \text{... III - 1.24}$$

t.zn.,że w układach wielofazowych (lub wieloprzewodowych) w których wszystkie fazy pobierają tę samą funkcję mocy symbolicznej $\hat{S}_k(t)$ całkowita moc pozorna S jest równa sumie mocy pozornych pobieranych przez poszczególne fazy. Należy zauważyć,że nie wystarczy założyć ab, wszystkie moce pozorne w poszczególnych fazach były sobie równe. Z takiego założenia nie uzyska się na ogół zależności III-1.24.
Na podstawie II-2.09 oraz definicji III-1.01, III-1.06 i zależności III-1.22 można łatwo wykazać,że:

$$S \leqslant P_m \qquad \text{... III - 1.25}$$

co oznacza,że moc pozorna S jest co najwyżej równa mocy modułowej P_m. W układach o przebiegach sinusoidalnych r ó w n o m i e r n i e o b c i ą ż o n y c h (t.j. takich dla których jest spełniona relacja III-1.23) moc pozorna jest równa mocy modułowej.

2. <u>Kompensacja mocy biernej w układach wielofazowych.</u>

Przez układ równomiernie obciążony rozumieć będziemy układ dla którego spełniona jest relacja III-1.23. W takich układach zachodzi:

$$P_k = P_l \;;\; Q_k = Q_l \;;\; \hat{y}_k = \hat{y}_l \qquad \text{... III - 2.01}$$

dla każdego k i l, gdzie k,l = 1, 2, 3, ... , n.
Kompensacja mocy biernej w tych układach sprowadza się do zagadnienia tego samego typu co w układach 1-fazowych. Układ taki należy kompensować przy pomocy kondensatora (lub filtru) składającego się z identycznych elementów połączonych w gwiazdę i gdzie pojemność C jednej fazy tego kondensatora obliczamy przy pomocy wzoru II-5.10.
W układach wielofazowych istotną rolę odgrywa jednak zjawisko n i e r ó w n o m i e r n o ś c i obciążenia.

Aby uwypuklić wpływ nierównomierności obciążenia na roz-

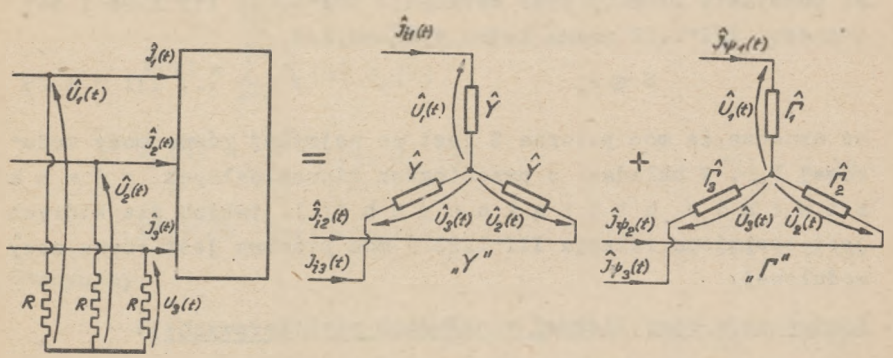
kład mocy niezależnie od odkształcenia przebiegów rozpatrzymy najpierw dowolny n-fazowy układ o przebiegach sinusoidalnych. Do układów o przebiegach sinusoidalnych możemy zastosować bezpośrednie klasyczną metodę symboliczną i otrzymujemy:

$$\hat{P}_i = \sum_{k=1}^{k=n} \hat{U}_k \check{J}_k \qquad \text{... III - 2.02}$$

$$P = \mathrm{Re}\left\{\hat{P}_i\right\}; \quad Q = \mathrm{Jm}\left\{\hat{P}_i\right\} \qquad \text{... III - 2.03}$$

$$\hat{J}_{ik} = \hat{Y}\,\hat{U}_k, \hat{J}_{\psi k} = \hat{J}_k - \hat{J}_{ik}, \; k = 1,2,\ldots,n. \qquad \text{... III - 2.04}$$

Z zależności III-2.04 widać, że każdy dowolny układ n-fazowy da się rozłożyć na dwa układy połączone w gwiazdę (rys.3)



Rys.3

Pierwszy z tych układów który nazwiemy układem „Y" jest układem symetrycznym i pobiera w y ł ą c z n i e moc czynną P i moc bierną Q. Drugi układ, który nazwiemy układem „Γ" jest układem niesymetrycznym i pobiera wyłącznie moc deformacji K. Przewodność deformacji $\hat{\Gamma}_k$ obliczamy z relacji (por.rys.3):

$$\hat{\Gamma}_k = \frac{\hat{J}_{\psi k}}{\hat{U}_k} \qquad \text{... III - 2.05}$$

Jak widać, kompensowanie mocy biernej $Q = \sum_{k=1}^{k=n} Q_k$ uzyskamy po przez kompensowanie układu „Y". Całkowity prąd bierny J_{qm}

(por.III-1.15), który należy w układzie „Y" kompensować wynosi:

$$J_{qm} = \frac{Q}{U_m} \qquad \text{... III - 2.06}$$

Dla symbolicznej wartości funkcji naboju elektrycznego rozmieszczającego się na okładkach kondensatorów w poszczególnych fazach baterii kompensującej, otrzymamy:

$$\hat{Q}_{ek} = \frac{1}{j\omega}\hat{J}_{qk}$$

$$Q_{ek}^2 = \left(\frac{1}{\omega}\right)^2 \cdot J_{qk}^2$$

Stąd:

$$\sum_{k=1}^{k=n} Q_{ek}^2 = \left(\frac{1}{\omega}\right)^2 \cdot \sum_{k=1}^{k=n} J_{qk}^2$$

Czyli:

$$J_{qm} = \omega Q_{em} \qquad \text{... III - 2.07}$$

gdzie:

$$Q_{em} = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} Q_{ek}^2} \qquad \text{... III - 2.08}$$

Kładziemy:

$$C_m \overset{df}{=} \frac{Q_{em}}{U_m} \qquad \text{... III - 2.09}$$

Stąd (na podstawie relacji III-2.06 i III-2.07) s z u k a n a p o j e m n o ś ć j e d n e j f a z y s y m e t r y c z n e j b a t e r i i k o m p e n s u j ą c e j:

$$C_m = \frac{Q}{U_m^2 \omega} \qquad \text{... III - 2.10}$$

Naturalnie można było przyjąć relację III-2.10 jako definicję pojemności C_m co formalnie jest prostsze lecz nie daje wglądu w głębsze znaczenie fizykalne wprowadzonych wielkości.
Moc K_c pobierana przez symetryczną baterię kompensującą obliczoną przy pomocy relacji III-2.10 jest równa zeru.
Czyli: ż e t a k o b l i c z o n a b a t e r i a n i e w p r o w a d z a p r z y p r z e b i e g a c h n i e o d k s z t a ł c o n y c h d o d a t k o w e g o o b c i ą ż e n i a s i e c i a r ó w n o c z e ś n i e c a ł k o w i c i e k o m p e n s u j e m c o b i e r n ą Q p o b i e r a n ą p r z e z u k ł a d.
Przechodzimy do omówienia układów wielofazowych o przebiegach

odkształconych.

Mamy: $$\hat{P}_i = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t) \cdot \check{J}_k(t)\, dt$$

oraz:

$$\hat{J}_{ik}(t) = \hat{Y}\, \hat{U}_k(t) \; ; \quad \hat{J}_{\psi k}(t) = \hat{J}_k(t) - \hat{J}_{ik}(t)$$

gdzie admitancja symboliczna $\hat{Y}$ jest zdefiniowana przy pomocy relacji III-1.07.

Zauważmy, że tak samo jak poprzednio dany układ da się rozłożyć na dwa układy i to - na układ symetryczny „Y" pobierający wyłącznie moc czynną P i moc bierną Q oraz na układ „Γ", który jest niesymetryczny i pobiera wyłącznie moc deformacji K.

Z powyższego rozkładu wynika, że kompensacja mocy biernej Q polega na skompensowaniu układu „Y", t.zn. na takim dobraniu baterii kompensującej aby całkowity prąd bierny przez nią pobierany był równy - J_{qm}, gdzie:

$$J_{qm} = \frac{Q}{U_m}$$

Wprowadzając baterię kondensatorów do układu i zakładając, że pobiera ona jedynie prąd bierny, otrzymamy:

$$\hat{Q}_{ek}(t) = -\int \hat{J}_{qk}(t)\, dt$$

$$= -\frac{Q}{U_m^2} \int \hat{U}_k(t)\, dt$$

Stąd:

$$Q_{ek} = \frac{Q}{U_m^2} \sqrt{\sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{1}{h^2\omega^2}\, V_{hk}^2}$$

$$= \frac{Q}{U_m^2\omega} \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \cdot V_{hk}^2}$$

Czyli:

$$Q_{em} = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} Q_{ek}^2} = \frac{Q}{U_m^2\omega} \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left(\sum_{k=1}^{k=n} V_{hk}^2 \right)}$$

Kładziemy:

$$V_{hm}^2 \stackrel{df}{=} \sum_{k=1}^{k=n} V_{hk}^2 \qquad \ldots \text{ III - 2.11}$$

Stąd:

$$Q_{em} = \frac{Q}{U_m^2\omega} \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^{k=n} \frac{1}{h^2}\, V_{hm}^2} \qquad \ldots \text{ III - 2.12}$$

Na podstawie definicji III-2.09 otrzymamy:

$$C_m = \frac{Q}{U_m^2\omega} \cdot \left(\frac{V_{1m}}{U_m}\right) \cdot \sqrt{1 + \sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left(\frac{V_{hm}}{V_{1m}}\right)^2} \quad \ldots \text{ III - 2.13}$$

W przybliżeniu możemy położyć:

$$C_m = \frac{Q}{U_m^2\omega} \quad \ldots \text{ III - 2.14}$$

C_m jest pojemnością jednej fazy symetrycznej baterii kondensatorów, którą należy włączyć do układu w celu całkowitej kompensacji mocy biernej Q. Rzeczywiście pobierany prąd przez jedną fazę baterii kompensującej wynosi:

$$\hat{J}_{ck}(t) = +j\hat{J}_{qk}(t) + \hat{J}_{\psi_k}(t)$$

$$= C_m \frac{d\hat{U}_k(t)}{dt}$$

Stąd, zakładając iż pojemność C_m obliczono na podstawie relacji III - 2.14, otrzymamy:

$$J_{\psi_k}^2 = \left(\frac{Q}{U_m^2}\right)^2 \cdot \sum_{h=2}^{\infty} (h-1)^2 \; V_{hk}^2 \quad \ldots \text{ III - 2.15}$$

Czyli:

$$J_{\psi m} = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} J_{\psi_k}^2} = \frac{Q}{U_m^2} \cdot \sqrt{\sum_{h=2}^{\infty} (h-1)^2 \; V_{hm}^2} \quad \ldots \text{ III - 2.16}$$

Stąd:

$$K_c = U_m \cdot J_{\psi m} = U_m^2 C_m \omega \sqrt{\sum_{h=2}^{\infty} (h-1)^2 \left(\frac{V_{hm}}{U_m}\right)^2} \ldots \text{ III - 2.17}$$

M o c d e f o r m a c j i K_c pobierana przez baterię kompensującą j e s t m i a r ą p r z e c i ą ż e n i a tej baterii spowodowanego wystąpieniem wyższych harmonicznych w napięciu zasilania układu. Zauważamy, że podobnie jak w układach jednofazowych harmoniczne podstawowe napięcia zasilania nie mają wpływu na moc K_c. Innymi słowy: harmoniczne podstawowe składowych biernych prądu zostają całkowicie skompensowane przez baterię kondensatorów, jeżeli jej pojemność obliczamy na podstawie relacji III-2.14.

Z relacji III-2.17 widać, że wpływ wyższych harmonicznych na przeciążenie kondensatora w poszczególnych wypadkach może być

duży i że przeciążenie to wpływa na zwiększenie mocy modułowej pobieranej przez układ po jego skompensowaniu. Dlatego należy obliczyć moc K_c i w wypadku stwierdzenia jej znacznego wpływu na pobór mocy P_m zastosować do kompensacji filtry t.zn. układy szeregowe L_m C_m tworzące symetryczną gwiazdę.

3. Współczynniki mocy.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że całość teorii mocy w układach wielofazowych lub wieloprzewodowych da się - podobnie jak dla układów 1-fazowych - przedstawić za pomocą prostopadłościanu podanego na rys.1. Wobec tego obowiązują również tutaj wzory II-4.01 oraz II-4.02. Podobnie jak uprzednio, dla układu jednofazowego mamy:

$$\hat{J}_{\psi k} = \hat{J}_k(t) - \hat{Y}\,\hat{U}_k(t) = \hat{I}_{\psi ok} + \sum_{h=1}^{\infty} \hat{I}_{\psi hk}$$

$$\hat{J}_{\psi k} = (I_{ok} - \hat{Y}V_{ok}) + \sum_{h=1}^{\infty} (\hat{I}_{hk} - \hat{Y}\hat{V}_{hk})\, e^{jh\omega t} \qquad \text{... III - 3.01}$$

Stąd (por.II-4.07 i II-4.08):

$$J^2_{\psi k} = J^2_k - Y\left\{ V_{ok}\, I_{ok} \cos\psi + \sum_{h=1}^{\infty} V_{hk}\, I_{hk} \cos(\psi_{hk} - \psi) \right\} \qquad \text{... III - 3.02}$$

oraz:

$$\sum_{h=0}^{\infty} V_{hk}\, I_{hk} \sin(\psi_{hk} - \psi) = 0; \quad (\psi_{ok} = 0) \qquad \text{... III - 3.03}$$

Na podstawie III-3.02, otrzymamy:

$$\sum_{k=1}^{k=n} J^2_{\psi k} = \sum_{k=1}^{k=n} J^2_k - \frac{P_i}{U^2_m} \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{h=0}^{\infty} V_{hk}\, I_{hk} \cos(\psi_{hk} - \psi) \right\}$$

czyli:

$$P_i = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{h=0}^{\infty} V_{hk}\, I_{hk} \cos(\psi_{hk} - \psi) \qquad \text{... III - 3.04}$$

Uwzględniając rys.1 otrzymujemy o g ó l n y w s p ó ł c z y n n i k d e f o r m a c j i u k ł a d u:

$$\cos\gamma = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \sum_{h=0}^{\infty} V_{hk}\, I_{hk} \cos(\psi_{hk} - \psi)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} \sum_{h=0}^{\infty} V^2_{hk}} \quad \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} \sum_{h=0}^{\infty} I^2_{hk}}} \qquad \text{... III - 3.05}$$

Wzór ten pozwala na obliczenie współczynnika deformacji mając dane poszczególne harmoniczne przebiegu.

IV. Zasada Zachowania Mocy.

Nim przystąpimy do właściwego zagadnienia t.j.do wykazania które z mocy są mocami zachowawczymi a które takimi nie są, zajmiemy się s y m t e t y c z n y m u j ę c i e m całości rozważań na temat mocy przedstawionej w tej pracy. W tym celu posłużymy się wektorialną przestrzenią Hilberta.

1. Przestrzeń wektorialna.

Niech X oznacza jakiś zbiór niepusty. Przypuśćmy,że każdej parze uporządkowanej $\bar{x}$ i $\bar{y}$ elementów tego zbioru przyporządkowany jest pewien element $\bar{x}+\bar{y}$ należący do niego - nazywamy go sumą elementów $\bar{x}$ i $\bar{y}$; załóżmy dalej,że dla każdej liczby zespolonej λ oraz każdego elementu $\bar{x}$ zbioru X określony jest pewien element $\lambda\bar{x}$ tego zbioru, nazywamy go iloczynem liczby λ oraz elementu $\bar{x}$.
Niech dla tych działań spełnione są następujące warunki:

I. $\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x}$

II. $\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})=(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}$

III. $\bar{x}+\bar{y}=\bar{x}+\bar{z}$ pociąga: $\bar{x}=\bar{z}$

IV. $\lambda(\bar{x}+\bar{y})=\lambda\bar{x}+\lambda\bar{y}$

V. $(\lambda+a)\bar{x}=\lambda\bar{x}+a\bar{x}$

VI. $\lambda(a\bar{x})=(\lambda a)\bar{x}$

VII. $1\,\bar{x}=\bar{x}$

Przy tych założeniach powiadamy,że zbiór X stanowi przestrzeń wektorialną [x].
W punkcie 2 (str. 5) określona przestrzeń Hilberta jest przestrzenią wektorialną,zmetryzowaną (jej metryka jest metryką w sensie odległościowym). Przedstawiciel funkcji tej przestrzeni jest wektorem,którego moduł jest równy normie tej funkcji.

x) A.Mostowski i M.Stark - Algebra Wyższa,tom I.PWN 1954 str.170

Oznaczmy przez W(g) zbiór macierzy jednokolumnowych g-wymiarowych:

$$\mathfrak{W} \overset{df}{=} \begin{Vmatrix} \overline{W}_1 \\ \overline{W}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{W}_g \end{Vmatrix} \qquad \ldots \text{ IV - 1.01}$$

których elementy należą do H(a,b) xx).

Sumę dwóch elementów zbioru W(g) określimy wzorem:

$$\begin{Vmatrix} \overline{W}_1 \\ \overline{W}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{W}_g \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{V}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{V}_g \end{Vmatrix} \overset{df}{=} \begin{Vmatrix} \overline{W}_1 + \overline{V}_1 \\ \overline{W}_2 + \overline{V}_2 \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \overline{W}_g + \overline{V}_g \end{Vmatrix} = \mathfrak{M} \qquad \ldots \text{ IV - 1.02}$$

Każdy element macierzy $\mathfrak{M}$ należy do H(a,b). A zatem, jeżeli $\mathfrak{W} \in W(g)$ i $\mathfrak{V} \in W(g)$ to $(\mathfrak{M} = \mathfrak{W} + \mathfrak{V}) \in W(g)$.

Iloczyn liczby zespolonej λ oraz elementu $\mathfrak{W}$ określimy wzorem:

$$\lambda \mathfrak{W} \overset{df}{=} \begin{Vmatrix} \lambda \overline{W}_1 \\ \lambda \overline{W}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda \overline{W}_g \end{Vmatrix} \qquad \ldots \text{ IV - 1.03}$$

Każdy element macierzy $\| \lambda \overline{W}_i \|$ należy do H(a,b). Stąd $\lambda \mathfrak{W}$ jest elementem zbioru W(g). Łatwo zauważyć, że postulaty I - VII są wypełnione dla zbioru (W(g). Wynika stąd, że zbiór W(g) stanowi przestrzeń wektorialną.

Kładziemy:

$$\mathfrak{W}' \overset{df}{=} \| \overline{W}'_1, \overline{W}'_2, \ldots, \overline{W}'_g \| \qquad \ldots \text{ IV - 1.04}$$

gdzie: $\overline{W}'_i \overset{df}{=} \| u_{1i} \; u_{2i} \; \ldots, u_{hi} \ldots \| \qquad \ldots \text{ IV - 1.05}$

xx) H(a,b) oznacza, że każda funkcja $W_1(t)$, $W_2(t)$, ... $W_g(t)$ jest całkowalna wraz z kwadratem w przedziale [a,b] .

<u>Definicja:</u> Iloczyn skalarny dwóch wektorów $\mathfrak{W}$ i $\mathfrak{V}$ określimy wzorem

$$\mathfrak{W}'.\mathfrak{V}^* \overset{df}{=} \| \overline{W}_1', \overline{W}_2', \ldots, \overline{W}_g' \| \left\| \begin{matrix} \overline{V}_1^* \\ \overline{V}_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{V}_g^* \end{matrix} \right\| \qquad \ldots \text{ IV - 1.06}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=g} \overline{W}_k' \cdot \overline{V}_k^* \qquad \ldots \text{ IV - 1.07}$$

$$\mathfrak{W}'.\mathfrak{V}^* = \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{\infty} w_{jk} \; v_{jk}^*$$

$$= \sum_{k=1}^{k=g} \int_a^b W_k(t) \; V_k^*(t)dt \qquad \ldots \text{ IV - 1.08}$$

W myśl tej relacji kwadrat modułu wektora $\mathfrak{W}$ definiujemy przez zależność

$$|\mathfrak{W}|^2 \overset{df}{=} \sum_{k=1}^{k=g} \overline{W}_k' \cdot \overline{W}_k^*$$

$$= \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{\infty} |w_{jk}|^2 = \sum_{k=1}^{k=g} \int_a^b |W_k(t)|^2 \, dt \qquad \ldots \text{ IV - 1.09}$$

Przestrzeń W(g) z przyjętą definicją iloczynu skalarnego (IV-1.06) jest przestrzenią metryczną wyposażoną w metrykę odległościową. Dla dwóch wektorów tej przestrzeni zachodzi nierówność:

$$|\mathfrak{U}| \, |\mathfrak{I}| \geqslant |\mathfrak{U}'.\mathfrak{I}^*| \qquad \ldots \text{ IV - 1.10}$$

Istotnie zachodzi:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{k=g} \int_a^b |U_k(t)|^2 \, dt \right\} \left\{ \sum_{k=1}^{k=g} \int_a^b |I_k(t)|^2 \, dt \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \left| \sum_{k=1}^{k=g} \int_a^b U_k(t) \; I_k^*(t) \, dt \right|^2 \qquad \ldots \text{ IV - 1.11}$$

2. <u>Rozkład ortogonalny wektorów przestrzeni</u> W(n).

Kładziemy: x)

$$\hat{\bar{U}}_k \overset{df}{=} \left\| \begin{matrix} V_{ok} \\ \hat{V}_{1k} \\ \hat{V}_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right\| ; \quad \hat{\bar{U}}'_k \overset{df}{=} \left\| V_{ok} , \hat{V}_{1k} , \hat{V}_{2k} \ \ldots\ldots \right\|$$

... IV - 2.01

$$\hat{\bar{J}}_k \overset{df}{=} \left\| \begin{matrix} I_{ok} \\ \hat{I}_{1k} \\ \hat{I}_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right\| ; \quad \hat{\bar{J}}'_k \overset{df}{=} \left\| I_{ok} , \hat{I}_{1k} , \hat{I}_{2k} \ \ldots\ldots \right\|$$

oraz analogiczne definicje dla wektorów sprzężonych $\check{\bar{U}}_k$, $\check{\bar{U}}'_k$, $\check{\bar{J}}_k$ i $\check{\bar{J}}'_k$.

$$\hat{\mathfrak{U}} \overset{df}{=} \left\| \begin{matrix} \hat{\bar{U}}_1 \\ \hat{\bar{U}}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\bar{U}}_n \end{matrix} \right\| ; \quad \hat{\mathfrak{U}}' \overset{df}{=} \left\| \hat{\bar{U}}'_1 , \hat{\bar{U}}'_2 , \ldots \hat{\bar{U}}'_n \right\|$$

... IV - 2.02

$$\hat{\mathfrak{J}} \overset{df}{=} \left\| \begin{matrix} \hat{\bar{J}}_1 \\ \hat{\bar{J}}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\bar{J}}_n \end{matrix} \right\| ; \quad \hat{\mathfrak{J}}' \overset{df}{=} \left\| \hat{\bar{J}}'_1 , \hat{\bar{J}}'_2 , \ldots \hat{\bar{J}}'_m \right\|$$

oraz analogiczne definicje dla wektorów $\check{\mathfrak{U}}$, $\check{\mathfrak{U}}'$, $\check{\mathfrak{J}}$ i $\check{\mathfrak{J}}'$

x) Por. rozdział I.

Zachodzi:

$$\hat{\mathfrak{U}}'.\check{\mathfrak{J}} = \sum_{k=1}^{k=n} \hat{\mathfrak{U}}_k'.\check{\mathfrak{J}}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}_k(t)\,\check{J}_k(t)\,dt$$

Stąd:

$$\boxed{\hat{P}_i = \hat{\mathfrak{U}}'.\check{\mathfrak{J}}}, \qquad \ldots \text{ IV - 2.03}$$

W myśl definicji III-1.02 i III-1.03otrzymamy:

$$\boxed{\begin{aligned} P &= \mathrm{Re}\left\{\hat{\mathfrak{U}}'.\check{\mathfrak{J}}\right\} \\ Q &= \mathrm{Jm}\left\{\hat{\mathfrak{U}}'.\check{\mathfrak{J}}\right\} \end{aligned}} \qquad \ldots \text{ IV - 2.04}$$

oraz:

$$\hat{P}_i = P + j\,Q \qquad \ldots \text{ IV - 2.05}$$

Na podstawie twierdzenia o rzucie prostopadłym x), kładziemy:

$$\hat{\mathfrak{J}} \overset{df}{=} \hat{\mathfrak{J}}_i + \hat{\mathfrak{J}}_\psi$$

$\hat{\mathfrak{J}}_i \overset{df}{=} \hat{Y}\,\hat{\mathfrak{U}}$, (gdzie $\hat{Y}$ jest liczbą dobraną tak, aby:)

$$\hat{\mathfrak{J}}_\psi \overset{df}{\perp} \hat{\mathfrak{J}}_i \qquad \ldots \text{ IV - 2.06}$$

Otrzymamy:

$$\hat{\mathfrak{U}}'.\check{\mathfrak{J}} = \hat{\mathfrak{U}}'.(\check{\mathfrak{J}}_i + \check{\mathfrak{J}}_\psi)$$

$$= \hat{\mathfrak{U}}'.\check{\mathfrak{J}}_i = \hat{\mathfrak{U}}'.\check{Y}\,\check{\mathfrak{U}}$$

$$= \check{Y}\,(\hat{\mathfrak{U}}'.\check{\mathfrak{U}})$$

Stąd:

$$\hat{P}_i = \check{Y}\,|\hat{\mathfrak{U}}|^2 \qquad \ldots \text{ IV - 2.07}$$

$$\check{Y} = \frac{\hat{P}_i}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2} = \frac{P + jQ}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2}$$

$$\check{Y} = \frac{P}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2} + j\,\frac{Q}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2} \qquad \ldots \text{ IV - 2.08}$$

---

x) Teoria operatorów rzutowych i ich interpretacja jest świetnie przedstawiona w książce L.A.Lusternika i W.J.Sobolewa: Elementy Analizy Funkcjonalnej str.209 i nast. PWN 1959.

Kładziemy:

$$G \overset{df}{=} \frac{P}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2} \quad ; \quad B \overset{df}{=} \frac{Q}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2} \qquad \ldots \text{ IV - 2.09}$$

Czyli:

$$\boxed{\hat{Y} = G - j\,B} \qquad \ldots \text{ IV - 2.10}$$

Zachodzi:

$$\hat{\mathfrak{J}}_i = \hat{Y}\,\hat{\mathfrak{U}} = (G\hat{\mathfrak{U}} - jB\hat{\mathfrak{U}})$$

$$= G\hat{\mathfrak{U}} - jB\hat{\mathfrak{U}} \qquad \ldots \text{ IV - 2.11}$$

Kładziemy:

$$\hat{\mathfrak{J}}_w \overset{df}{=} G\hat{\mathfrak{U}} \qquad \ldots \text{ IV - 2.12}$$

$$\hat{\mathfrak{J}}_q \overset{df}{=} B\hat{\mathfrak{U}}$$

Stąd:

$$\hat{\mathfrak{J}}_i = \hat{\mathfrak{J}}_w - j\,\hat{\mathfrak{J}}_q \qquad \ldots \text{ IV - 2.13}$$

Zachodzi:

$$\hat{\mathfrak{J}}'.\check{\mathfrak{J}} = (\hat{\mathfrak{J}}'_i + \hat{\mathfrak{J}}'_\psi).(\check{\mathfrak{J}}_i + \check{\mathfrak{J}}_\psi)$$

$$= \hat{\mathfrak{J}}'_i.\check{\mathfrak{J}}_i + \hat{\mathfrak{J}}'_\psi.\check{\mathfrak{J}}_\psi \text{ (na podstawie IV- 2.06)}$$

Stąd:

$$|\hat{\mathfrak{J}}|^2 = |\hat{\mathfrak{J}}_i|^2 + |\hat{\mathfrak{J}}_\psi|^2 \qquad \ldots \text{ IV - 2.14}$$

Lecz:

$$|\hat{\mathfrak{J}}_i|^2 = \hat{\mathfrak{J}}'_i.\check{\mathfrak{J}}_i$$

$$= \hat{Y}\hat{\mathfrak{U}}'.\check{Y}\check{\mathfrak{U}} = |\hat{Y}|^2(\hat{\mathfrak{U}}'.\check{\mathfrak{U}})$$

$$|\hat{\mathfrak{J}}_i|^2 = |\hat{Y}|^2|\hat{\mathfrak{U}}|^2 ; |\hat{\mathfrak{J}}_i| = |\hat{Y}||\overset{*}{\mathfrak{U}}| \qquad \ldots \text{ IV - 2.15}$$

$$|\hat{Y}|^2 = \left|\frac{P - j\,Q}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2}\right|^2 = \frac{P^2 + Q^2}{|\hat{\mathfrak{U}}|^4} = \frac{P_i^2}{|\hat{\mathfrak{U}}|^4}$$

Stąd:

$$|\hat{\mathfrak{J}}_i|^2 = \frac{P^2 + Q^2}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2} = \frac{P_i^2}{|\hat{\mathfrak{U}}|^2} \qquad \ldots \text{ IV - 2.16}$$

Wstawiając do IV-2.14, otrzymamy:

$$|\hat{\mathfrak{U}}|^2 |\hat{\mathfrak{J}}|^2 = P^2 + Q^2 + |\hat{\mathfrak{U}}|^2 |\hat{\mathfrak{J}}_\psi|^2$$

Na podstawie III-1.06 :

$$|\hat{\mathfrak{U}}| \, |\hat{\mathfrak{J}}| = P_m$$

Stąd:

$$P_m^2 = P^2 + Q^2 + |\hat{\mathfrak{U}}|^2 |\hat{\mathfrak{J}}_\psi|^2 \qquad \text{... IV - 2.17}$$

Kładziemy:

$$K \overset{df}{=} |\hat{\mathfrak{U}}| \, |\hat{\mathfrak{J}}_\psi| \qquad \text{... IV - 2.18}$$

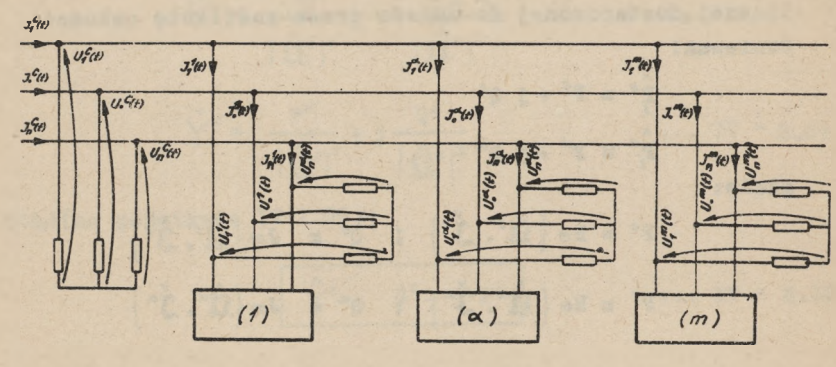
Stąd:

$$\boxed{P_m^2 = P^2 + Q^2 + K^2} \qquad \text{... IV - 2.19}$$

Teoria przedstawiona w tym paragrafie, opierająca się na rozkładzie ortogonalnym wektorów w przestrzeni W(m) nie wprowadza do uprzednio przedstawionej teorii nowej treści fizykalnej. Jej znaczenie polega na tym iż ujmuje ona syntetycznie całość zagadnienia a wprowadzone wektory mogą być bezpośrednio wprowadzone do syntetycznej analizy układów wieloprzewodowych o dowolnych ustalonych przebiegach.

3. <u>Zasada zachowania mocy.</u>

Niech dana jest sieć n-fazowa zasilająca m n-fazowych odbiorów podłączonych równolegle (rys.4). Założymy, że straty na przewodach łączących są pomijalnie małe.



Rys.4

Wskaźnikiem „o" oznaczać będziemy wielkości odnoszące się do zasilania całości. Stąd, na podstawie założeń otrzymamy:

$$\hat{U}_k^c(t) = \hat{U}_k^1(t) = \hat{U}_k^2(t) = \ldots = \hat{U}_k^\alpha(t) = \ldots \hat{U}_k^m(t)$$

$$\hat{J}_k^c(t) = \hat{J}_k^1(t) + \hat{J}_k^2(t) + \ldots + \hat{J}_k^\alpha(t) + \ldots + \hat{J}_k^m(t) \quad \ldots \text{ IV - 3.01}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Na podstawie definicji i własności wektorów $\hat{\mathfrak{U}}$ i $\hat{\mathfrak{J}}$ zachodzi:

$$\hat{\mathfrak{U}}^c = \hat{\mathfrak{U}}^1 = \hat{\mathfrak{U}}^2 = \ldots = \hat{\mathfrak{U}}^\alpha = \ldots = \hat{\mathfrak{U}}^m$$

$$\hat{\mathfrak{J}}^c = \hat{\mathfrak{J}}^1 + \hat{\mathfrak{J}}^2 + \ldots\ldots + \hat{\mathfrak{J}}^\alpha + \ldots + \hat{\mathfrak{J}}^m \quad \ldots \text{ IV - 3.02}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \hat{\mathfrak{J}}^\alpha \quad \ldots \text{ IV - 3.03}$$

Zachodzi:

$$\hat{\mathfrak{U}}^{c'} . \check{\mathfrak{J}}^c = \hat{\mathfrak{U}}^{c'} . \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \check{\mathfrak{J}}^\alpha$$

$$= \hat{\mathfrak{U}}^{1'} . \check{\mathfrak{J}}^1 + \hat{\mathfrak{U}}^{2'} . \check{\mathfrak{J}}^2 + \ldots + \hat{\mathfrak{U}}^{\alpha'} . \check{\mathfrak{J}}^\alpha + \ldots + \hat{\mathfrak{U}}^{m'} . \check{\mathfrak{J}}^m$$

$$= \hat{P}_i^1 + \hat{P}_i^2 + \ldots + \hat{P}_i^\alpha + \ldots + \hat{P}_i^m$$

Stąd:

$$\boxed{\hat{P}_i^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \hat{P}_i^\alpha} \quad \ldots \text{ IV - 3.04}$$

Z relacji IV-3.04 wynika zasada zachowania mocy symbolicznej. Orzeka ona, że w układach bez strat suma mocy symbolicznych pobieranych przez poszczególne odbiory jest równa mocy symbolicznej dostarczonej do układu przez zasilanie całości.

Ponieważ:

$$\hat{P}_i^c = P^c + j\,Q^c$$

$$\hat{P}_i^\alpha = P^\alpha + j\,Q^\alpha$$

gdzie:

$$P^c = Re\left\{\hat{\mathfrak{U}}^{c'} . \check{\mathfrak{J}}^c\right\} \; ; \quad Q^c = Jm\left\{\hat{\mathfrak{U}}^{c'} . \check{\mathfrak{J}}^c\right\}$$

$$P^\alpha = Re\left\{\hat{\mathfrak{U}}^{\alpha'} . \check{\mathfrak{J}}^\alpha\right\} \; ; \quad Q^\alpha = Jm\left\{\hat{\mathfrak{U}}^{\alpha'} . \check{\mathfrak{J}}^\alpha\right\}$$

Otrzymamy:

$$\boxed{\begin{aligned} P^c &= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} P^\alpha \\ Q^c &= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} Q^\alpha \end{aligned}} \qquad \ldots \text{IV} - 3.05$$

Z relacji IV-3.05 wynika zasada zachowania mocy czynnej i wewnętrznej. Jej słowne sformułowanie jest analogiczne do zasady odnoszącej się do mocy symbolicznej.

Przeprowadzimy rozkład ortogonalny wektora $\hat{\mathfrak{J}}^c$ względem wektora $\hat{\mathfrak{U}}^c$ przy pomocy znanego już schematu postępowania. Kładziemy:

$$\hat{\mathfrak{J}}^c \overset{df}{=} \hat{\mathfrak{J}}_i^c + \hat{\mathfrak{J}}_\psi^c$$

$$\hat{\mathfrak{J}}^c \overset{df}{=} \hat{Y}^c \hat{\mathfrak{U}}^c \qquad \ldots \text{IV} - 3.06$$

$$\hat{\mathfrak{J}}_\psi^c \overset{df}{\perp} \hat{\mathfrak{J}}_i^c$$

Stąd:

$$\hat{\mathfrak{U}}^{c\prime} . \check{\mathfrak{J}}^c = \hat{\mathfrak{U}}^{c\prime} . (\check{\mathfrak{J}}_i^c + \check{\mathfrak{J}}_\psi^c) = \hat{\mathfrak{U}}^{c\prime} . \check{\mathfrak{J}}_i^c + \hat{\mathfrak{U}}^{c\prime} . \check{\mathfrak{J}}_\psi^c$$

$$= \hat{\mathfrak{U}}^{c\prime} . \check{\mathfrak{J}}_i$$

czyli:

$$\hat{P}_i^c = \hat{\mathfrak{U}}^{c\prime} . \check{\mathfrak{J}}_i^c \qquad \ldots \text{IV} - 3.07$$

$$= \hat{\mathfrak{U}}^{c\prime} . \check{Y}^c \check{\mathfrak{U}}^c = \check{Y}^c (\hat{\mathfrak{U}}^{c\prime} . \check{\mathfrak{U}}^c)$$

$$\hat{P}_i^c = \check{Y}^c |\hat{\mathfrak{U}}|^2 \qquad \ldots \text{IV} - 3.08$$

$$\check{Y}^c = \frac{\hat{P}_i^c}{|\hat{\mathfrak{U}}^c|^2} = \frac{P^c + j\, Q^c}{|\hat{\mathfrak{U}}^c|^2}$$

$$\check{Y}^c = \frac{P^c}{|\hat{\mathfrak{U}}^c|^2} + j \frac{Q^c}{|\hat{\mathfrak{U}}^c|^2} \qquad \ldots \text{IV} - 3.09$$

Stąd(na podstawie IV-2.09):

$$\boxed{\hat{Y}^c = G^c - j\, B^c} \qquad \ldots \text{IV} - 3.10$$

Na podstawie IV-3.05i IV-3.02 otrzymamy:

$$G^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} G^\alpha$$
$$B^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} B^\alpha \qquad \text{... IV - 3.11}$$

gdzie G^α i B^α są wielkościami rzeczywistymi.

Zachodzi:

$$\hat{\mathfrak{J}}_i^c = \hat{Y}^c \hat{\mathfrak{U}}^c = (G^c - j\,B^c)\,\hat{\mathfrak{U}}^c$$
$$= \left(\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} G^\alpha - j \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} B^\alpha\right)\hat{\mathfrak{U}}^c$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \left(G^\alpha - j\,B^\alpha\right)\hat{\mathfrak{U}}^\alpha$$

Stąd:

$$\hat{\mathfrak{J}}_i^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \hat{\mathfrak{J}}_i^\alpha \qquad \text{... IV - 3.12}$$

Oraz (na podstawie def.IV-2.12):

$$\hat{\mathfrak{J}}_w^c - j\,\hat{\mathfrak{J}}_q^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} G^\alpha \hat{\mathfrak{U}}^\alpha - j \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} B^\alpha \hat{\mathfrak{U}}^\alpha$$

Stąd:

$$\hat{\mathfrak{J}}_w^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \hat{\mathfrak{J}}_w^\alpha$$
$$\hat{\mathfrak{J}}_q^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \hat{\mathfrak{J}}_q^\alpha \qquad \text{... IV - 3.13}$$

Podobnie:

$$\hat{\mathfrak{J}}_\psi = \hat{\mathfrak{J}}^c - \hat{\mathfrak{J}}_i^c$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \left(\hat{\mathfrak{J}}^\alpha - \hat{\mathfrak{J}}_i^\alpha\right)$$
$$\hat{\mathfrak{J}}_\psi^c = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \hat{\mathfrak{J}}_\psi^\alpha \qquad \text{... IV - 3.14}$$

Mamy:

$$\hat{\mathfrak{J}}^{c\prime} \cdot \check{\mathfrak{J}}^c = \hat{\mathfrak{J}}_i^{c\prime} \cdot \check{\mathfrak{J}}_i^c + \hat{\mathfrak{J}}_\psi^{c\prime} \cdot \check{\mathfrak{J}}_\psi^c \qquad \text{(por.IV-2.14)}$$
$$|\hat{\mathfrak{J}}^c|^2 = |\hat{\mathfrak{J}}_i^c|^2 + |\hat{\mathfrak{J}}_\psi^c|^2 \qquad \text{... IV - 3.15}$$

gdzie:

$$|\hat{\mathfrak{J}}_i^c|^2 = \hat{\mathfrak{J}}_i^{c\prime} \cdot \check{\mathfrak{J}}_i^c = |\hat{Y}^c|^2\,|\hat{\mathfrak{U}}^c|^2$$
$$= \frac{(P^c)^2 + (Q^c)^2}{|\hat{\mathfrak{U}}^c|^2} \qquad \text{... IV - 3.16}$$

Wstawiając do IV-3.15, otrzymamy

$$|\hat{\mathfrak{U}}^c|\,|\hat{\mathfrak{J}}^c = (P^c)^2 + (Q^c)^2 + |\hat{\mathfrak{U}}^c|^2 |\hat{\mathfrak{J}}^c_\psi|^2$$

$$(P^c_m)^2 = (P^c)^2 + (Q^c)^2 + (K^c)^2 \qquad \ldots \text{ IV - 3.17}$$

gdzie:

$$K^c = |\hat{\mathfrak{U}}^c|\,|\hat{\mathfrak{J}}^c_\psi| \qquad \ldots \text{ IV - 3.18}$$

na podstawie definicji IV-2.18.
Zachodzi:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} K^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} |\hat{\mathfrak{U}}^\alpha|\,|\hat{\mathfrak{J}}^\alpha_\psi|$$

$$= |\hat{\mathfrak{U}}^c| \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} |\hat{\mathfrak{J}}^\alpha_\psi| \quad ,(\text{por. IV-3.01}) \qquad \ldots \text{ IV - 3.19}$$

Lecz:

$$\hat{\mathfrak{J}}^c_\psi = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \hat{\mathfrak{J}}^\alpha_\psi$$

Stąd:

$$|\hat{\mathfrak{J}}^c_\psi| \leq \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} |\hat{\mathfrak{J}}^\alpha_\psi| \qquad \ldots \text{ IV - 3.20}$$

Porównując IV-3.18 z IV-3.19 widzimy więc, że

$$K^c \leq \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} K^\alpha \qquad \ldots \text{ IV - 3.21}$$

Z powyższej nierówności wynika, że moc K odmiennie od mocy P Q i $\hat{P}_i$ nie jest mocą zachowawczą.
Podobnie łatwo wykazać, że:

$$P^c_m \leq \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} P^\alpha_m \qquad \ldots \text{ IV - 3.22}$$

4. <u>Splot.</u>

Kładziemy:

$$\hat{\mathfrak{U}} \times \check{\mathfrak{J}} \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_k(t+\tau) \cdot \check{J}_k(\tau)\, d\tau \qquad \ldots \text{ IV - 4.01}$$

Czyli:

$$\hat{S}(t) = \hat{\mathfrak{U}} \times \check{\mathfrak{J}} \qquad \ldots \text{ IV - 4.02}$$

Stąd:

$$\hat{\mathfrak{U}}^c \times \check{\mathfrak{J}}^c = \hat{\mathfrak{U}}^c \times \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \check{\mathfrak{J}}^\alpha$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \hat{\mathfrak{U}}^\alpha \times \check{\mathfrak{J}}^\alpha \qquad \ldots \text{ IV - 4.03}$$

Czyli:

$$\hat{S}^{c}(t) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \hat{S}^{\alpha}(t) \qquad \ldots \text{ IV - 4.04}$$

Z zależności IV-4.04 wynika zachowawcze własność splotu, t.zn., że suma f u n k c j i mocy symbolicznych pobieranych przez poszczególne odbiory jest równa funkcji mocy symbolicznej dostarczonej do układu przez zasilanie całości.

V. Spis literatury

[1] Antoniu I.S. - Chestiuni speciale de electrotechniea, Bucuresti, 1956, str.46

[2] Buchholz F. - Die Darstellung der Begriffe „Scheinleistung" und „Scheinarbeit" bei Mehrphasenstrom, Elektro-Journal (1921), September-Heft, str.15

[3] Budeanu C.I. - Puissances réactives et fictives, Institut Roumain de l'Energie, 1927

[4] Budeanu C.I. - Bulletin de Mathematiques et de Physique de l'École Polytechnique de Bukarest, VI-e Année, Nr.1,2,3.

[5] Budeanu C.I. - Quelques considérations sur les espaces superieus, Bull.École Polytechnique, Bukarest, 1936/37, str.38

[6] Curtis H.L., Silsbee F.B. - Electro-Journal 54(1935) str.394

[7] Fryze S. - Moc rzeczywista,urojona i pozorna w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia. P.E.1931,Nr.7 i 8

[8] Gosztowt W., Urbanowicz H. - Moc bierna i jej kompensacja w stacjach prostownikowych, Przegląd Elektr. 1959, Nr.10, str.405

[9] Jasicki Z. - Zagadnienia kondensatorów energetycznych P.E. 1958, Nr.12, str.629.

[10] *Лурье Л.С.* - *Кажущаяся мощность трехфазной системы Электричество, 1/1951.*

[11] Nowomiejski Z.J. - Układy wielofazowe, Praca doktorska, Gliwice 1960.

[12] Nowomiejski Z.J. - Moc elektryczna w układach o przebiegach odkształconych. Biuletyn Inst.Energetyki, 5/6 - 1960, (Energetyka Nr.8,1960)

[13] Rosenzweig I.- Symboliczny wielowymiarowy rachunek wektorowy jako metoda analizy układów wielofazowych. P.E.Lwów 1939.

[14] *Пухов Г.Е.* - *Теория мощности системы периодических многофазных токов. Электричество, 2/1953*

[15] Quade W. - Zusammensetzung der Wirk-Blind- und Scheinleistung bei Wechselströmen beliebiger Kurvenform und neue Leistungsdefinition für unsymetrische Mehrphasenströme beliebiger Kurvenform. ETZ Bd.58 (1937), str.1315, 1341.

[16] Quade W. - Neue Darstellung der Verzerrungsleistung eines Wechselstroms mit Hilfe des Funktionenraums. Arch.f.Elektr.Bd.23(1939) Nr.5, str.277

[17] *Телешев Б.А* - *Необходимое уточнение терминологии в вопросе измерения реактивной мощности. Электричество, 11/1952.*

[18] Tröger P. - Energetische Darstellung von Blindstromvorgängen. ETZ-A, H.18 (1953) str.533

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA Gliwice

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P 3347/61