MATEMATYKA-FIZYKA z. 7

MARIAN PALEJ

ZWIĄZKI AKOLINEACJI ŚRODKOWEJ

P O L I T E C H N I K A Ś L Ą S K A
ZESZYT NAUKOWY Nr 127 – GLIWICE 1965

SPIS TREŚCI

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYTY NAUKOWE
Nr 127

MARIAN PALEJ

ZWIĄZKI AKOLINEACJI ŚRODKOWEJ

PRACA HABILITACYJNA Nr 43

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 9. XI. 1964 r.

GLIWICE 1965

Dział Nauki — Sekcja Wydawnictw Naukowych — Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Konarskiego 23

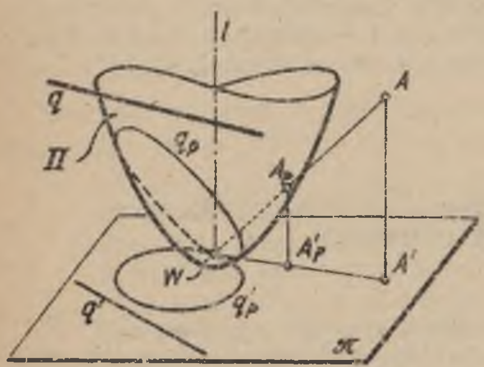
Nakł. 100+170 Ark. wyd. 3,8 Ark. druk. 3,14 Papier powielaczowy kl. V, 70x100, 70 g
Oddano do druku 5. 1. 1965 Podpis. do druku 18. 2. 1965 Druk ukończ. w lutym 1965
Zam. 50 8. 1. 1965. F-18 Cena zł 4,75

Fotokopie — skład, druk i oprawę wykonano
w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

1. UWAGI WSTĘPNE

Praca powstała w wyniku rozważań autora nad pewnym odwzorowaniem przestrzeni na płaszczyźnie za pośrednictwem paraboloidy obrotowej [1].

W odwzorowaniu tym przyjmuje się dowolną paraboloidę obrotową Π (rys. 1) i styczną do niej w wierzchołku W rzutnię π. Każdemu punktowi przestrzeni A przyporządkowuje się dwa rzuty: rzut normalny na π - A' i tzw. rzut "p" - A'_p, będący prostokątnym rzutem na π różnego od W (lub zjednoczonego z nim) punktu przebicia paraboloidy promieniem WA.



Rys. 1

Ponieważ prostokątnym rzutem na π każdej elipsy przynależnej do powierzchni paraboloidy jest okrąg [2], a każdej paraboli - prosta, wynika stąd, że rzutami dowolnej prostej w omawianym odwzorowaniu są: prosta lub punkt jako rzut normalny i okrąg lub prosta przechodząca przez punkt W, a w szczególnym przypadku para punktów - jako rzut "p".

Weźmy pod uwagę dowolną płaszczyznę ω przechodzącą przez trzy niewspółliniowe punkty A, B, C. Przyjmijmy, że rzuty A', B', C' i A'_p, B'_p, C'_p są dane, czyli że położenie płaszczyzny ω jest jednoznacznie określone.

Rozważmy dowolną figurę $\Gamma' \in \pi$, którą uważajmy za rzut normalny figury $\Gamma \in \omega$. Ponieważ położenie płaszczyzny ω jest ustalone, rzut Γ' determinuje jednoznacznie oryginał Γ, a jednocześnie i rzut "p" Γ'_p. W oparciu o dane trzy pary punktów $A'A'_p$, $B'B'_p$, $C'C'_p$, można więc skonstruować rzut "p" dowolnej figury $\Gamma \in \omega$, zadanej rzutem normalnym Γ'.

Pomiędzy rzutami Γ' i Γ'_p zachodzi pewien związek określony położeniem płaszczyzny ω. Związek ten i jego uogólnienia są przedmiotem niniejszej pracy.

Celowość rozpatrywania związku łączącego obydwa rzuty układu płaskiego uzasadniona była jego zastosowaniem w odwzorowaniu [1] oraz w perspektywie środkowej, w której tłem jest powierzchnia paraboloidy obrotowej, a środkiem - dowolny punkt tej powierzchni. Dzięki uogólnieniu rozważań sfera zastosowań rozpatrywanego związku uległa pewnemu rozszerzeniu i uzasadnienie podjęcia niniejszego tematu może być nieco uzupełnione. Do uzupełnień tych w szczególności należą: konstrukcje w zakresie stożkowych i kwadryk realizowane przez przekształcenie krzywych stopnia drugiego w proste, a powierzchni stopnia drugiego w płaszczyzny, odmienna interpretacja przekroju i przenikania powierzchni oraz uogólnienie przekształcenia przez promienie odwrotne (inwersji) na płaszczyźnie i w przestrzeni.

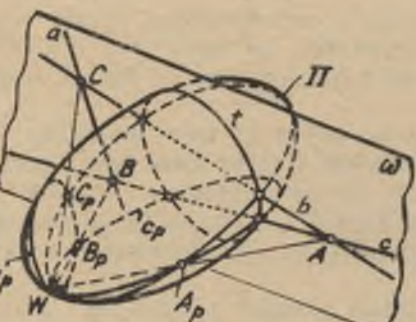
Tematyka pracy nie posiada omówienia w literaturze krajowej. Nie jest ona również rozważana w znanych, dostępnych pozycjach zagranicznych. Jako pracę tematycznie zbliżoną do zagadnień składających się na genezę niniejszej rozprawy wymienić należy publikację Z.A. Skopeća pt. "Rzut stereograficzny i izotropowy paraboloidy na płaszczyznę styczną do paraboloidy w jej wierzchołku" [3].

2. ZWIĄZEK AKOLINEACJI ŚRODKOWO-OSIOWEJ W DWU UKŁADACH O RÓŻNYCH PODSTAWACH

Weźmy pod uwagę dowolną powierzchnię stopnia drugiego Π (rys. 2) i dowolny układ płaski $\omega(A,B,C\ldots a,b,c)$. Rozważmy rzut układu ω na powierzchnię Π z dowolnego, nieosobliwego punktu W spełniającego warunki: $W \in \Pi$, W non $\in \omega$.

Wprowadźmy przy tym definicję 1:

Rzutem dowolnego punktu A na powierzchnię Π z punktu $W \in \Pi$ jest różny od W punkt przebicia powierzchni Π prostą WA. W przypadku styczności prostej WA do powierzchni Π rzutem punktu A jest sam punkt W. W przypadku przynależności: $WA \in \Pi$ rzut punktu A jest rozciągły [4]; rzutem tym jest cała prosta WA.



Rys. 2

W wyniku rzutowania elementów układu płaskiego ω - na powierzchni Π otrzymujemy: zbiór punktów A_p, B_p,... i zbiór incydentnych z punktem W stożkowych a_p, b_p,...

Zauważmy, że w zbiorze tym punkt W reprezentuje rzut nieskończenie wielu punktów układu ω. Weźmy bowiem pod uwagę płaszczyznę σ styczną do powierzchni Π w punkcie W. Płaszczyzna σ przecina powierzchnię Π w parze tworzących u_1, u_2 (rzeczywistych lub urojonych) [5], a płaszczyznę ω w prostej s. Para tworzących u_1, u_2 stanowi rzut s_p prostej s na powierzchnię Π. Rzuty punktów $U_1 = u_1 s$ i $U_2 = u_2 s$ są rozciągłe (przedstawiają je tworzące u_1 i u_2), natomiast rzuty wszystkich innych punktów prostej s jednoczą się z środkiem W.

Definicja 2

Zbiór wszystkich punktów powierzchni stopnia drugiego Π i wszystkich stożkowych leżących na tej powierzchni, incydentnych z jednym punktem W nazywamy układem o podstawie Π lub krótko układem. Punkt W nazywamy środkiem tego układu.

Rozważmy związek łączący układ płaski $\omega(A, B .. a, b ..)$ z układem $\omega_p(A_p, B_p ... a_p, b_p ..)$. Stwierdzamy, że:

1. Każdemu punktowi A non $\in s$ układu płaskiego ω przyporządkowany jest w układzie ω_p dokładnie jeden punkt A_p. Punktom układu płaskiego ω leżącym na prostej $s \doteq \omega\sigma$ przyporządkowany jest sam punkt W bądź też jedna z tworzących styczności w tym punkcie do powierzchni Π - u_1, u_2. Odwrotnie - każdemu punktowi M_p układu ω_p różnemu od środka W przyporządkowany jest dokładnie jeden punkt M układu płaskiego ω. Punktowi $S_p = W$ układu ω_p - w układzie płaskim przyporządkowana jest prosta $s = \omega\sigma$.
2. Każdej prostej a układu płaskiego ω przyporządkowana jest dokładnie jedna stożkowa a_p układu ω_p (zgodnie z definicją incydentna z środkiem W) i na odwrót - każdej stożkowej m_p układu ω_p przechodzącej przez punkt W przyporządkowana jest w układzie płaskim ω dokładnie jedna prosta m. Stożkowa a_p układu ω_p odpowiadająca prostej a układu płaskiego ω może być zdegenerowana; prostej s układu płaskiego ω odpowiada w układzie ω_p stożkowa s_p zdegenerowana do pary tworzących styczności u_1, u_2.
3. Elementom $A \in c$ przynależnym do siebie w układzie płaskim ω przyporządkowane są elementy $A_p \in c_p$ przynależne do siebie w układzie ω_p i na odwrót[x].

---

[x] W sformułowaniu powyższym nie uwzględnia się elementów o rzutach rozciągłych.

4. Każdy punkt A układu płaskiego ω i przyporządkowany mu w układzie ω_p punkt A_p leżą na prostej przechodzącej przez stały punkt W.

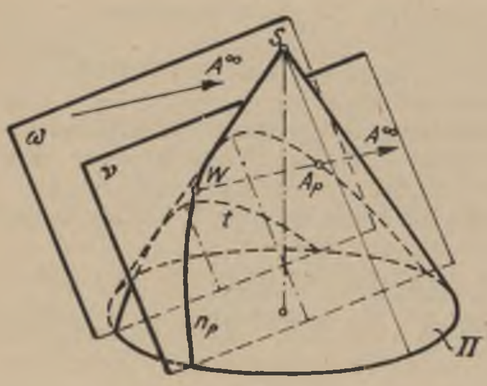
5. Krawędź przecięcia się podstaw układów ω i ω_p, czyli linia przekroju powierzchni Π płaszczyzną ω - stożkowa t stanowi zbiór wszystkich punktów zjednoczonych obydwu układów. Każdy punkt $T \in t$ należy jednocześnie do układu płaskiego ω i do układu ω_p.

6. Każda prosta $a \in \omega$ i przyporządkowana jej stożkowa $a_p \in \omega_p$ leżąc w jednej płaszczyźnie rzucającej $\alpha = Wa$ posiadają z sobą dwa punkty wspólne (rzeczywiste lub urojone). Punkty te jako elementy zjednoczone układów ω i ω_p muszą leżeć na stożkowej t.

Zauważmy, że powyższe własności związku łączącego układy ω i ω_p są podobne, z pominięciem warunku współliniowości, do tych, jakie charakteryzują związek kolineacji środkowo-osiowej dwu układów płaskich o różnych podstawach [5]. Dla podkreślenia tej analogii z jednoczesnym zaakcentowaniem zasadniczej różnicy polegającej na naruszeniu współliniowości punktów, związek łączący układy ω i ω_p nazwiemy związkiem akolineacji środkowo-osiowej układów o różnych podstawach.

Definicja 3

Układ $\omega_p \in \Pi$ (w sensie definicji 2) nazywamy środkowo-osiowo akolineacyjnym z układem płaskim ω i na odwrót, jeżeli układy te są środkowo perspektywiczne, przy czym środek perspektywiczności W leży na powierzchni Π, nie jest jej punktem osobliwym i nie przynależy do podstawy układu płaskiego, a powierzchnia Π jest nieosobliwą powierzchnią stopnia drugiego.



Rys. 3

Związek akolineacji środkowo-osiowej łączący układ płaski ω z układem ω_p o podstawie Π opisywać będziemy symbolem $/A_{\omega\Pi}/$. Środek układu ω_p - punkt W nazwiemy środkiem akolineacji, stożkową t przekroju powierzchni Π podstawą układu płaskiego ω - osią akolineacji, a proste wiązki (W) łączące pary przyporządkowanych sobie punktów - promieniami akolineacji.

Rozważmy jeszcze stożkową n_p przyporządkowaną w układzie ω_p prostej niewłaściwej n^∞ układu płaskiego ω. Stożkową tę nazwiemy graniczną. Zauważmy, że w wyniku równoległości płaszczyzny stożkowej n_p do podstawy układu płaskiego ω (rys. 3) - oś akolineacji i stożkowa graniczna są podobne, jeżeli żadna z nich nie jest stożkową zdegenerowaną [6].

2.1. Elementy określające związek akolineacji środkowoosiowej dwóch układów o różnych podstawach

Rozważmy zagadnienie jednoznacznego określenia związku akolineacji środkowoosiowej $/A\omega\Pi/$ w przypadkach:

1) gdy dane są podstawy obydwu układów - ω i Π,

2) gdy dana jest tylko podstawa układu ω_p - powierzchnia Π,

3) gdy dana jest tylko podstawa układu płaskiego - ω.

Ad 1)

Oś związku $/A_{\omega\Pi}/$ jest stożkową przekroju powierzchni Π płaszczyzną podstawy układu płaskiego. W celu wyznaczenia środka akolineacji wystarczy przyporządkować sobie dowolnie parę punktów: $A\in\omega$ i $A_p\in\omega_p$ wykluczając przypadek $AA_p\in\Pi$. Prosta AA_p przebija powierzchnię Π w jednym, różnym od A_p (bądź zjednoczonym z nim) punkcie W, który jest środkiem związku $/A_{\omega\Pi}/$.

Ad 2)

Dla danej powierzchni Π - podstawę układu płaskiego ω i związek $/A_{\omega\Pi}/$ określają alternatywnie:

a) trzy pary przyporządkowanych[x)] sobie punktów $(A, B, C)\in\omega$ i $(A_p, B_p, C_p)\in\omega_p$, przy założeniu niewspółliniowości trójek A, B, C i A_p, B_p, C_p.

b) jedna para przyporządkowanych sobie punktów $A_p\in\omega_p$ i $A\in\omega$ oraz dowolna stożkowa c_p układu ω_p przecinająca się z prostą

x) W określeniu "pary przyporządkowanych sobie punktów A, A_p, B, B_p C, C_p", należy rozumieć, że proste AA_p, BB_p, CC_p przecinają się z sobą w jednym punkcie $W\in\Pi$.
Podobnie w sformułowaniu: "stożkowa a_p przyporządkowana prostej a" należy rozumieć warunek incydencji stożkowej a_p z środkiem akolineacji W i przynależności prostej a do płaszczyzny stożkowej a_p.
Warunki powyższe zawarte zgodnie z niniejszą umową w określeniu "przyporządkowania" nie będą w dalszych rozważaniach wymieniane osobno.

AA_p w jednym punkcie W i przyporządkowana jej prosta $c \in \omega$ (A non $\in c$).

c) wierzchołek W i oś t akolineacji $/A\omega\pi/$.

W alternatywach a) i b) założenia ustalają położenie płaszczyzny ω i sprowadzają zagadnienie do przypadku 1).
W alternatywie c) podstawa układu płaskiego ω jest ustalona jednoznacznie przez stożkową t.

Ad 3)

Jeżeli dana jest podstawa układu płaskiego ω - podstawę układu ω_p - powierzchnię π oraz związek $/A\omega\pi/$ określają:

a) oś akolineacji t oraz trzy pary przyporządkowanych sobie punktów $(A, B, C) \in \omega$; $(A_p, B_p, C_p) \in \omega_p$ przy założeniu:

α) żaden z punktów A, B, C nie leży na osi t

β) trójka punktów A, B, C nie jest współliniowa.

b) dwie stożkowe a_p i b_p przecinające się w dwu rzeczywistych punktach, przyporządkowane dwu prostym a, b oraz jedna para przyporządkowanych sobie punktów $C \in \omega$ i $C_p \in \omega_p$ (C non $\in a, b$; C_p non $\in a_p, b_p$). Z warunku przyporządkowania wynika, że przyporządkowane sobie punkty C i C_p muszą leżeć na prostej przechodzącej przez jeden z punktów wspólnych stożkowych a_p i b_p.

b_1) oś akolineacji t, jedna stożkowa a_p przecinająca się w dwu punktach z osią t i przyporządkowana jej prosta a oraz jedna para przyporządkowanych sobie punktów C i C_p.
Zauważmy, że alternatywa b_1) jest szczególnym przypadkiem alternatywy b). Z warunku przypadku b) wynika więc, że prosta a przecinać się winna z stożkową a_p w punktach leżących na osi t.

c) stożkowa $a_p \in \omega_p$ przyporządkowana prostej $a \in \omega$ oraz cztery pary przyporządkowanych sobie punktów $A, B, C, D \in \omega$, $(A_p, B_p, C_p, D_p) \in \omega_p$ przy założeniu (A, B, C, D) non $\in a$; A_p, B_p, C_p, D_p - niewspółpłaszczyznowe i nieprzynależne do a_p.

d) osiem par przyporządkowanych sobie punktów $(A \ldots\ldots H) \in \omega$ i i $(A_p \ldots\ldots H_p) \in \omega_p$ w ogólnym położeniu.

Podane w alternatywach a) ÷ d) warunki są równoważne przyjęciu dziewięciu punktów określających jednoznacznie powierzchnię stopnia drugiego π. Oś związku $/A\omega\pi/$ zdefiniowana jest każdorazowo jednoznacznie jako stożkowa przekroju powierzchni π daną płaszczyzną ω, położenie środka akolineacji W wynika z założeń przyporządkowania sobie punktów obydwu układów bądź stożkowej układu ω_p danej prostej układu płaskiego ω.

2.2. Niezmienniki akolineacji środkowo-osiowej układów o różnych podstawach

Rozważmy dwie dowolne proste a i b układu ω będące podstawami dwu szeregów rzutowych:

$$a(A, B, C \ldots) \bar{\wedge} b(M, N, P \ldots)$$

Przyjmijmy, że prostym a i b przyporządkowane są w układzie ω_p niezdegenerowane stożkowe a_p i b_p przechodzące przez środek W. Szeregom rzędu pierwszego (a) i (b) odpowiadają perspektywiczne z nimi szeregi rzędu drugiego w układzie ω_p:

$$a_p(A_p, B_p C_p \ldots) \bar{\bar{\wedge}} (a) ; \qquad b_p(M_p, N_p, P_p \ldots) \bar{\bar{\wedge}} (b)$$

Ponieważ środek perspektywiczności W jest punktem leżącym na stożkowych a_p i b_p z powyższego wynika bezpośrednio:

$$(a_p) \bar{\wedge} (b_p)^{x)} \qquad (1)$$

Weźmy pod uwagę dwa rzutowe pęki prostych w układzie płaskim:

$$A(a, b, c \ldots) \bar{\wedge} B(m, n, p \ldots)$$

W układzie ω_p - prostym pęku (A) przyporządkowane są stożkowe a_p, b_p ... przynależne do punktów A_p i W, a prostym pęku (B) - stożkowe m_p, n_p ... przynależne do punktów B_p i W.

Wprowadźmy definicje 4

Zbiór stożkowych układu ω_p o podstawie Π incydentnych z środkiem układu W i jeszcze jednym różnym od W punktem A_p nazywamy pękiem (A_p) stożkowych tego układu.
Zauważmy, że stożkowe pęków (A_p) i (B_p) leżą w płaszczyznach zawierających przyporządkowane im proste w pękach (A) i (B).

---

x) W przypadku przyporządkowania prostym a i b stożkowych a_p i b_p zdegenerowanych do par prostych (różnych od tworzących styczności do powierzchni Π w punkcie W) - szeregi rzutowe (a_p), (b_p) są szeregami rzędu pierwszego.

Przyjmijmy dowolną prostą l w układzie płaskim nieprzynależną do pęków (A) i (B). Z przecięcia prostą l elementów pęków (A) i (B) otrzymujemy dwa złączone na wspólnej podstawie szeregi rzutowe:

$$l_1(A_1, B_1, C_1 \ldots) \bar{\wedge} l_2(M_2, N_2, P_2 \ldots)$$

Stożkowa l_p przyporządkowana w układzie ω_p prostej l przecina stożkowe pęków (A_p) i (B_p) w złączonych na wspólnej podstawie dwu szeregach rzędu drugiego:

$$l_{1p}(A_{1p}, B_{1p}, C_{1p} \ldots) \; ; \quad l_{2p}(M_{2p}, N_{2p}, P_{2p} \ldots)$$

Ponieważ:

$$(l_{1p}) \overset{W}{\bar{\bar{\wedge}}} (l_1) \quad ; \quad (l_{2p}) \overset{W}{\bar{\bar{\wedge}}} (l_2)$$

zachodzi:

$$(l_{1p}) \bar{\wedge} (l_{2p}) \tag{2}$$

Pęki (A_p) i (B_p) spełniające relację (2) dla każdej stożkowej l_p układu ω_p nieprzynależnej do tych pęków są rzutowe:

$$(A_p) \bar{\wedge} (B_p) \tag{3}$$

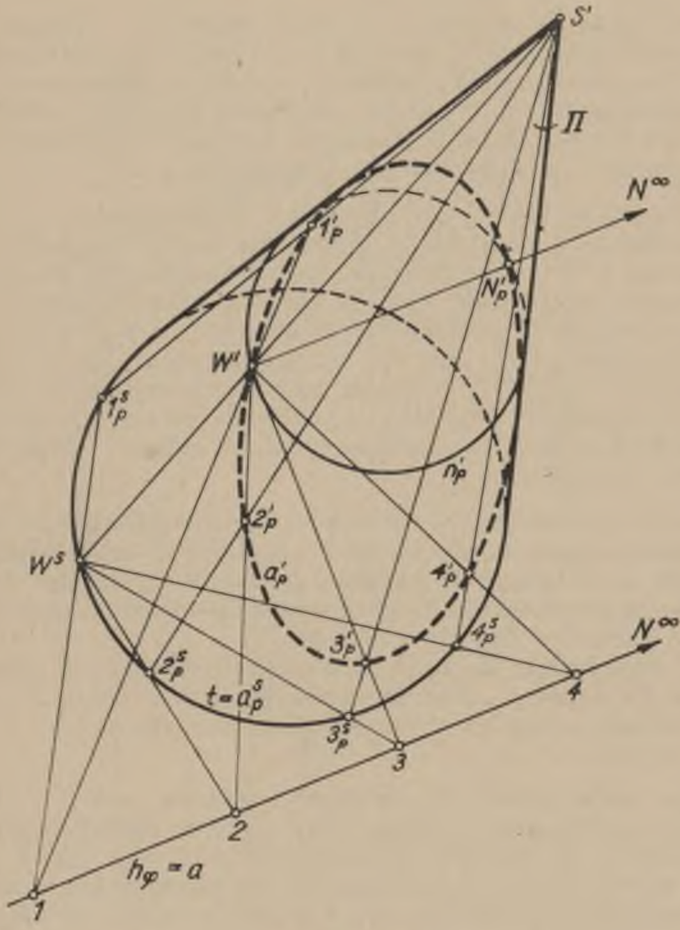
Z powyższych rozważań wnosimy, że w dwu środkowo-akolineacyjnych układach ω i ω_p o różnych podstawach - utworom rzutowym układu płaskiego ω przyporządkowane są utwory rzutowe w układzie ω_p i na odwrót[x].
Wartość dwustosunku można zatem uważać za niezmiennik związku $/A\omega\Pi/$
Drugim, wynikającym z definicji 3 niezmiennikiem układów środkowo-akolineacyjnych ω i ω_p jest relacja przynależności.

---

x) Wniosek nie dotyczy jedynie prostej $s = \omega\sigma$ (gdzie σ oznacza płaszczyznę styczną do Π w punkcie W) i przyporządkowanej jej stożkowej $s_p = \Pi\sigma$ zdegenerowanej do pary tworzących styczności.

2.3. Niektóre zastosowania związku /$A\omega\Pi$/

Weźmy pod uwagę dowolną powierzchnię stożkową Π i płaszczyznę φ (rys.4).
Niech zadaniem będzie konstrukcja przekroju powierzchni Π płaszczyzną φ.
Załóżmy przy tym, że znany jest jeden punkt W wspólny dla powierzchni Π i płaszczyzny φ.



Rys. 4

Rozważmy układ płaski ω o płaszczyźnie podstawowej π_1. Płaszczyzna π_1 przecina powierzchnię Π w kierującej t, prosta $h_\varphi = \varphi\pi_1$ jest elementem układu płaskiego. Rozpatrzmy związek łączący układ płaski ω z jego rzutem środkowym ω_p z punktu W na powierzchnię Π. Jest to związek akolineacji środkowoosiowej $/A_{\omega\Pi}/$ o osi t. Zauważmy, że szukana linia przekroju jest w rozpatrywanym związku stożkową układu ω_p przyporządkowaną prostej $h_\varphi = a \in \omega$. Tak więc zadanie sprowadza się do znalezienia w układzie ω_p stożkowej przyporządkowanej w określonym związku akolineacji środkowo-osiowej danej prostej układu płaskiego ω.

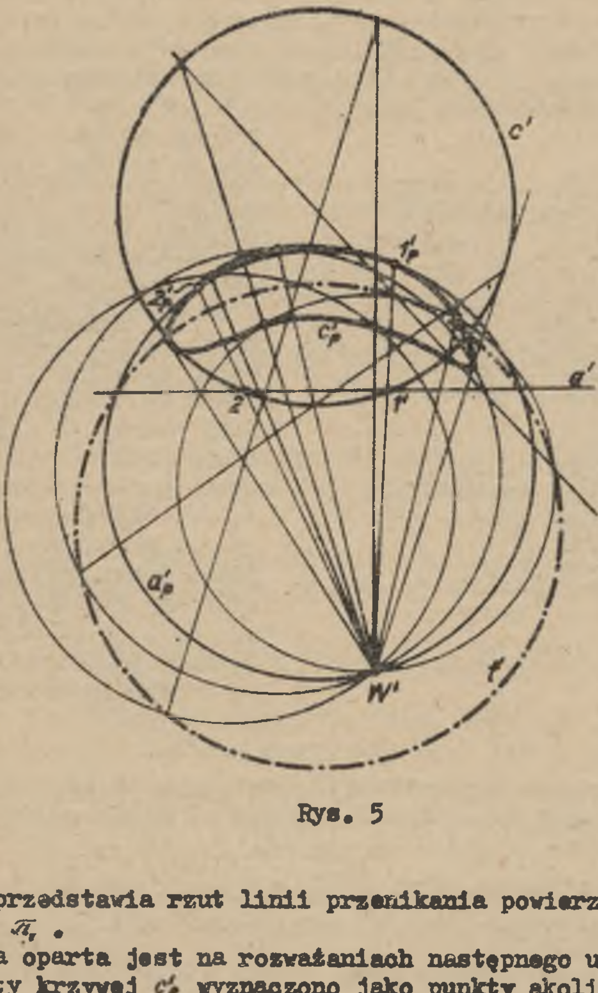
Jednym z punktów stożkowej a_p jest punkt N_p przyporządkowany niewłaściwemu punktowi N^∞ prostej a i leżący na stożkowej granicznej n_p. Dwa dalsze punkty krzywej a_p leżą w przecięciu prostej a z osią akolineacji t. W naszym przypadku (rys. 4) punkty te są urojone i w celu znalezienia dalszych elementów szukanego przekroju można skorzystać z następującego rozumowania.

Rzućmy szukaną krzywą a_p z punktu S na rzutnię π_1. W wyniku takiej konstrukcji stożkowa a_p zjednoczy się z t $(a_p^s = t)$, a punkt W - przejdzie w W^s. Elementy leżące na rzutni pozostaną w miejscu. Promienie akolineacji łączące punkt W z kolejnymi punktami 1, 2, 3, 4 prostej $a = h_\varphi$ przejdą w pęk promieni $W^s(W^s1, W^s2, W^s3, W^s4..)$, a leżące na nich punkty krzywej a_p przyporządkowane w związku $/A_{\omega\pi}/$ punktom 1, 2, 3, 4 znajdą się na kierującej t. Tak więc otrzymujemy punkty 1^s_p, 2^s_p, 3^s_p, 4^s_p, które rzucone z wierzchołka S na odpowiednie promienie akolineacji dają szukane elementy 1_p, 2_p 3_p, 4_p.. linii przekroju.

Rozszerzając rozważania odnośnie przyporządkowanych sobie utworów w związku $/A_{\omega\Pi}/$ na te, które w układzie ω_p odpowiadają stożkowym leżącym w płaszczyźnie układu płaskiego ω, otrzymujemy nową interpretację konstrukcji linii przenikania powierzchni Π z powierzchnią stożkową stopnia drugiego.
Niech np. dana będzie dowolna paraboloida obrotowa Π i taka powierzchnia stożkowa Γ, której wierzchołek W leży na Π, a kierującą jest dowolna stożkowa c. Należy wyznaczyć linię przenikania powierzchni Π i Γ.

Rozważmy układ płaski ω, którego podstawą jest płaszczyzna stożkowej c i jego rzut środkowy ω_p z punktu $W \in \Pi$ na powierzchnię Π. Stwierdzamy, że szukana linia przenikania może być rozpatrywana jako utwór układu ω_p akolineacyjnie przyporządkowany stożkowej c leżącej w płaszczyźnie ω, w związku $/A_{\omega\Pi}/$, którego środkiem jest wierzchołek powierzchni Γ, tj. punkt $W \in \Pi$, zaś osią stożkowa przekroju paraboloidy Π płaszczyzną ω $(c \in \omega)$.
Korzystając z faktu, że wszystkie elipsy leżące na powierzchni paraboloidy obrotowej w rzucie prostokątnym na płaszczyznę prostopadłą do osi l tej powierzchni są okręgami, powyższy przykład przedstawiono w rzucie na $\pi_1 \perp l$ (rys.5).

W rysunku ilustrującym to rozwiązanie, oznaczają: stożkowa c' (dla uproszczenia okrąg) - rzut kierującej c powierzchni stożkowej Γ, punkt W' - rzut wierzchołka powierzchni Γ, okrąg t' - rzut krzywej przekroju powierzchni Π płaszczyzną kierującej c.



Rys. 5

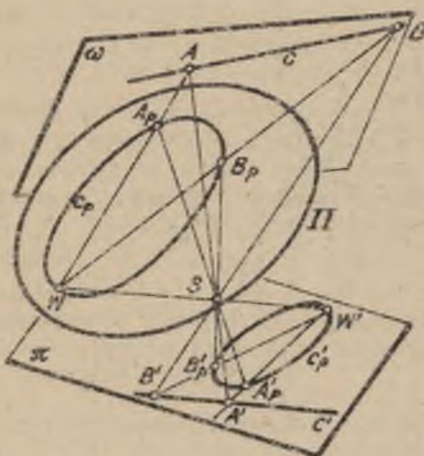
Krzywa c'_p przedstawia rzut linii przenikania powierzchni Π i Γ na rzutnię π_1.
Konstrukcja oparta jest na rozważaniach następnego ustępu. Poszczególne punkty krzywej c'_p wyznaczono jako punkty akolineacyjnie przyporządkowane punktom okręgu c'.

W dalszych naszych rozważaniach zajmiemy się pewnym szczególnym przypadkiem związku akolineacji środkowo-osiowej, w którym stożkową niezdegenerowaną układu ω_p przyporządkowaną prostej układu ω jest zawsze okrąg.

W związku $/A_{\omega\Pi}/$ przypadek taki zachodzi wówczas, kiedy podstawa układu ω_p - powierzchnia Π jest sferą.

3. ZWIĄZEK AKOLINEACJI ŚRODKOWO-OSIOWEJ NA PŁASZCZYŹNIE

Rozpatrzmy układ $\omega_p\,(A_p, B_p \ldots a_p, b_p \ldots m_p, n_p)$ o podstawie Π i układ płaski $\omega\,(A, B \ldots a, b \ldots m, n)$, przyporządkowane sobie w związku akolineacji środkowo-osiowej $/A_{\omega\Pi}/$.



Rys. 6

Dokonajmy rzutu obydwu układów na dowolną płaszczyznę π (rys. 6) z nieosobliwego punktu S powierzchni Π - spełniającego warunki: S non $\in \omega$, S non $\in \pi$, $S \neq W$.
W rezultacie otrzymujemy: z rzutu układu płaskiego ω - układ płaski ω', z rzutu układu ω_p - zbiór ω'_p zawierający punkty A'_p, B'_p ... jako rzuty punktów A_p, B_p... układu ω_p oraz stożkowe a'_p, b'_p... względnie proste m'_p, n'_p... przechodzące przez jeden punkt wspólny W' - jako rzuty stożkowych a_p, b_p... m_p, n_p układu ω_p. Zbiór ω'_p nazwijmy obrazem układu ω_p lub krótko obrazem ω'_p.

Definicja 5

Obrazem układu ω_p o podstawie Π nazywamy rzut tego układu na dowolną płaszczyznę π ze środka S różnego od środka układu i spełniającego warunki:

1) $S \in \Pi$ i nie jest punktem osobliwym powierzchni Π,

2) S non $\in \pi$.

Rozważmy związek łączący układ płaski ω' z obrazem ω'_p wprowadzając oznaczenia:

s' - rzut z punktu S krawędzi przecięcia się płaszczyzny ω z płaszczyzną σ styczną do powierzchni Π w punkcie W; $f-f'$ - krawędź przecięcia się z rzutnią π płaszczyzny φ stycznej do powierzchni Π w punkcie S.

Stwierdzamy:

1) Każdemu punktowi A' non $\in s'$ układu płaskiego ω', różnemu od rzutu W' środka W przyporządkowany jest w obrazie ω'_p dokładnie jeden punkt A'_p.
Dowolnemu punktowi $G' \in s'$ przyporządkowany jest w obrazie ω'_p bądź to punkt $G'_p = W'$, bądź też prosta (rzeczywista lub urojona) przechodząca przez W', stanowiąca rzut jednej z tworzących styczności powierzchni Π w punkcie W.
Punktowi układu płaskiego ω' zjednoczonemu z środkiem W' przyporządkowana jest cała prosta f'.
Odwrotnie - każdemu punktowi M'_p non $\in f'$ obrazu ω'_p różnemu od rzutu W' środka W przyporządkowany jest dokładnie jeden punkt M' układu płaskiego ω'.

2) Każdej prostej a' układu płaskiego ω' nieprzechodzącej przez punkt W' przyporządkowana jest dokładnie jedna, incydentna z W' stożkowa a'_p obrazu ω'_p i na odwrót.
(Stożkowa a'_p może być zdegenerowana; prostej s' układu płaskiego ω' odpowiada stożkowa s'_p obrazu ω'_p zdegenerowana do pary prostych).
Każdej prostej m' układu płaskiego ω', przechodzącej przez punkt W' przyporządkowana jest w obrazie ω'_p zjednoczona z nią prosta m'_p.

3) Elementom $A' \in c'$ przynależnym do siebie w układzie płaskim ω' przyporządkowane są elementy przynależne: $A'_p \in c'_p$ w obrazie ω'_p i na odwrót[x].

4) Każdy punkt A' układu płaskiego ω' i przyporządkowany mu w obrazie ω'_p punkt A'_p leżą na prostej przechodzącej przez punkt W'.

5) Istnieje zbiór punktów zjednoczonych (wspólnych) układu ω' i obrazu ω'_p.
Zbiór ten tworzy stożkową t', która może być rzeczywista, nie zdegenerowana lub zdegenerowana, bądź też urojona.

6) Każda prosta a' układu płaskiego ω' i przyporządkowana jej stożkowa a'_p obrazu ω'_p przecinają się w punktach (rzeczywistych lub urojonych) leżących na stożkowej t'.

Związek łączący układ płaski ω' z obrazem ω'_p o wyżej wymienionych własnościach nazwijmy płaskim związkiem akolineacji środkowo-osiowej i opiszmy symbolem $/A_x/$.

---

x) W sformułowaniu powyższym, analogicznie jak na str. 5 nie uwzględnia się elementów o rzutach rozciągłych.

Punkt W' uważajmy za środek związku $/A_{\pi}/$, stożkową t' - za oś związku, a promienie pęku (W') za promienie akolineacji płaskiej. Rzut stożkowej granicznej n_p układu ω_p nazwijmy stożkową graniczną płaskiego związku akolineacji środkowo-osiowej $/A_{\pi}/$.

Definicja 6

Dowolny układ płaski ω' i obraz układu - ω'_p złączone na jednej płaszczyźnie podstawowej π nazywamy środkowo-osiowo akolineacyjnymi, jeżeli są one rzutami na płaszczyznę π dwóch środkowo-osiowo akolineacyjnych układów ω i ω_p o różnych podstawach ω i Π z środka rzutów S różnego od środka układu ω_p i spełniającego warunki:

1) $S \in \Pi$ i nie jest punktem osobliwym powierzchni Π,

2) S non $\in \omega$,

3) S non $\in \pi$.

3.1. Elementy określające płaski związek akolineacji środkowo-osiowej

Mając na uwadze definicję 6 - elementy określające płaski związek akolineacji środkowo-osiowej $/A_{\pi}/$ wyprowadzamy z rozważań ustępu 2.1. W szczególności stwierdzamy, że związek $/A_{\pi}/$ może być jednoznacznie zdefiniowany przez zadanie:

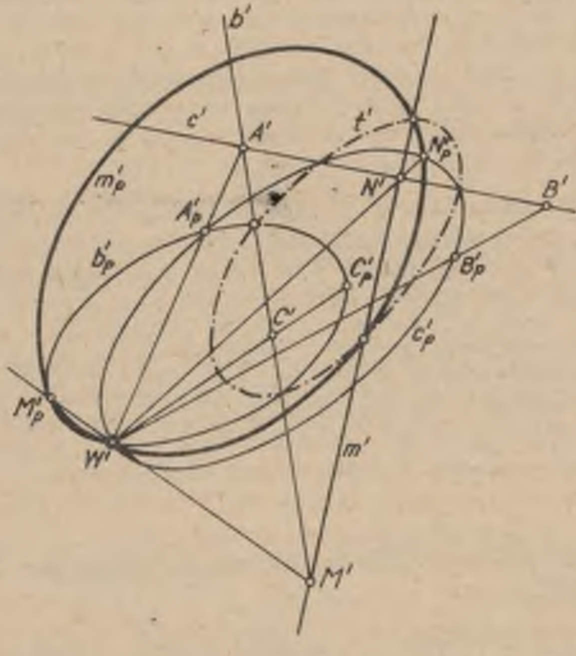
1) osi akolineacji t' oraz trzech par przyporządkowanych sobie punktów $(A'_p, B'_p, C'_p) \in \omega'_p$; $(A', B', C') \in \omega'$ takich, że żaden z nich nie leży na osi t', a trójka A', B', C' nie jest współliniowa.

2) osi akolineacji t', stożkowej $a'_p \in \omega'_p$ i przyporządkowanej jej prostej $a' \in \omega'$ przecinających się z sobą w punktach leżących na osi t' oraz pary przyporządkowanych sobie punktów: $C'_p \in \omega'_p$ i $C' \in \omega'$ (prosta $C'C'_p$ winna przecinać stożkową a'_p w punktach rzeczywistych).

3) dwóch przecinających się w dwu rzeczywistych punktach stożkowych $(a'_p, b'_p) \in \omega'_p$ i przyporządkowanych im prostych $(a', b') \in \omega'$ oraz jednej pary przyporządkowanych sobie punktów $C'_p \in \omega'_p$, $C' \in \omega'$ (C'_p non $\in a'_p, b'_p$; C' non $\in a', b'$); zgodnie z warunkiem przyporządkowania prosta $C'C'_p$ winna przechodzić przez punkt wspólny stożkowych a'_p i b'_p, a punkty przecięcia się stożkowych a'_p i b'_p oraz punkt wspólny prostych a' i b' winny być współliniowe.

Na rys. 7 przedstawiono przykładowo konstrukcję stożkowej m'_p obrazu ω'_p odpowiadającej dowolnie przyjętej prostej m' układu ω' w płaskim związku $/A_{\pi}/$ określonym w sposób omówiony pod 1).

Rozważmy jeszcze elementy określające szczególny przypadek płaskiego związku akolineacji środkowo-osiowej $/A_\pi/$, w którym niezdegenerowaną stożkową obrazu ω'_p przyporządkowaną prostej układu ω' jest zawsze okrąg. Przypadek taki m.in. zachodzi przy rzutowaniu prostokątnym na płaszczyznę π takich dwu złączonych związkiem $/A_{\omega\pi}/$ układów o różnych podstawach ω i Π, w których podstawą Π jest paraboloida obrotowa o osi prostopadłej do rzutni π. Ten szczególny rodzaj płaskiego związku akolineacji środkowo-osiowej opiszmy symbolem $/A_o/$.



Rys. 7

W omówionych wyżej wariantach jako warunki określające związek $/A_o/$ otrzymujemy:

I) oś akolineacji t' i parę przyporządkowanych sobie punktów: $A'_p \in \omega'_p$ i $A' \in \omega'$;
środek akolineacji W' można skonstruować jako punkt przecięcia prostą $A'A'_p$ okręgu a'_p przyporządkowanego dowolnej prostej $a' \in A'$.

Ia) oś t' i środek akolineacji W' $(W' \text{non} \in t')$; dowolną parę przyporządkowanych sobie punktów $A'_p \in \omega'_p$ i $A' \in \omega'$ można otrzymać rozważając dowolną prostą $a' \in \omega'$ i ściśle określony, przyporządkowany jej okrąg a'_p przechodzący przez środek akolineacji W' i punkty wspólne prostej a' z osią t'.

Ib) trzy pary przyporządkowanych sobie punktów $(A'_p, B'_p, C'_p) \in \omega'_p$ i $(A', B', C') \in \omega'$ z wykluczeniem współliniowości punktów A', B', C'; punkt przecięcia się prostych łączących pary punktów $A'A'_p$, $B'B'_p$ i $C'C'_p$ jest środkiem akolineacji W'. Trójki punktów: $W'A'_pB'_p$ i $W'B'_pC'_p$ wyznaczają okręgi $(a'_p, b'_p) \in \omega'_p$, którym w układzie ω' odpowiadają proste: $a' = A'B'$ i $b' = B'C'$; punkty wspólne okręgu a'_p z prostą a' i okręgu b'_p z prostą b' wyznaczają oś akolineacji t'.

IIIa) dwa przecinające się w rzeczywistych punktach okręgi $a'_p \in \omega'_p$, $b'_p \in \omega'_p$ przyporządkowane dwu prostym $(a', b') \in \omega'$ (z warunkiem współliniowości punktów $a'_p \cdot b'_p$ i $a' b'$); środkiem akolineacji jest wówczas jeden z punktów przecięcia się okręgów a'_p i b'_p a osią - okrąg incydentny z punktami wspólnymi: okręgu a'_p i przyporządkowanej mu prostej a' oraz okręgu b'_p i przyporządkowanej mu prostej b'.

IIIb) jeden okrąg $a'_p \in \omega'_p$ i przyporządkowana mu prosta $a' \in \omega'$ oraz jedna para przyporządkowanych sobie punktów $B'_p \in \omega'_p$, $B' \in \omega'$; w przypadku tym jeden z punktów przecięcia okręgu a'_p prostą $B'B'_p$ jest środkiem akolineacji W' (prosta $B'B'_p$ musi być tak przyjęta by przecinała w punktach rzeczywistych okrąg a'_p). Prowadząc przez punkt B' dowolną pomocniczą prostą b' przecinającą się z a' np. w punkcie Q' wyznaczamy przyporządkowany jej okrąg b'_p przez punkty W', B'_p, $Q'_p \in a'_p$. Punkty wspólne okręgu a'_p z prostą a' oraz okręgu b'_p z prostą b' leżą na osi akolineacji.

3.2. Niezmienniki płaskiego związku akolineacji środkowo-osiowej /A_π/

W ustępie 2,2 ustalono, że niezmiennikami związku akolineacji środkowo-osiowej /$A_{\omega\Pi}$/ układów o różnych podstawach ω i Π jest przynależność i rzutowość. Ponieważ układ ω' i związany z nim płaskim związkiem akolineacji środkowo-osiowej /A_π/ obraz ω'_p stanowią rzuty dwóch układów złączonych związkiem /$A_{\omega\Pi}$/, a zarówno przynależność jak i rzutowość w wyniku rzutowania nie ulegają naruszeniu - własności te należy uważać również za niezmienniki związku /A_π/.

Wnosimy więc, że utworom rzutowym w układzie ω' przyporządkowane są utwory rzutowe w obrazie ω'_p x), a w szczególności:

a) szeregom rzędu pierwszego o podstawach nieincydentnych z środkiem akolineacji: $(a') \bar{\wedge} (b')$ przyporządkowane są na ogół szeregi rzędu drugiego: $(a'_p) \bar{\wedge} (b'_p)$,

b) szeregom rzędu pierwszego o podstawach przechodzących przez środek akolineacji: $(m') \bar{\wedge} (n')$ przyporządkowane są szeregi rzędu pierwszego o podstawach $m'_p = m'$, $n'_p = n'$: $(m'_p) \bar{\wedge} (n'_p)$,

c) pękom prostych o środkach różnych od środka akolineacji: $(A') \bar{\wedge} (B')$ przyporządkowane są pęki stożkowych: $(A'_p) \bar{\wedge} (B'_p)$,

d) pękom prostych o środku w punkcie W': $(M'_1 = W') \bar{\wedge} (M'_2 = W')$ przyporządkowane są identyczne z nimi pęki: $(M'_{1p}) \bar{\wedge} (M'_{2p})$.

3.3. Szczególny przypadek płaskiego związku akolineacji środkowo-osiowej /A_0/

3.3.1. Własności związku /A_0/

W ust. 3.1 wspomniano o szczególnym przypadku płaskiego związku akolineacji środkowo-osiowej - /A_0/, w którym niezdegenerowaną stożkową obrazu ω'_p odpowiadającą prostej układu ω' nieincydentnej z środkiem W' jest zawsze okrąg. W celu omówienia własności związku /A_0/ rozpatrzmy jego interpretację przestrzenną, tj. rozważmy dwa układy o różnych podstawach ω i Π akolineacyjne w związku /$A_{\omega\Pi}$/, których rzutami na płaszczyznę π są złączone związkiem /A_0/ układ ω' i obraz ω'_p.

Możemy przy tym rozpatrzyć dwa modele:

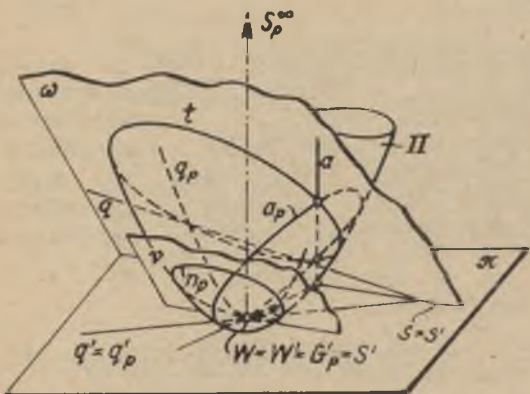
a) Układ płaski ω i złączony z nim związkiem /$A_{\omega\Pi}$/ układ ω_p leżący na powierzchni kuli Π.
Przez rzut stereograficzny układów ω i ω_p otrzymujemy złączone płaskim związkiem akolineacji /A_π/ układ ω' i obraz ω'_p. Środek rzutów S może być przy tym punktem antypodycznym względem środka akolineacji W - płaszczyzna π - płaszczyzną prostopadłą do promienia WS.
Rzutami okręgów układu ω_p nieprzechodzących przez punkt S będą okręgi obrazu ω'_p - płaski związek akolineacji środkowo osiowej łączący układ ω' z obrazem ω'_p będzie więc związkiem /A_0/.

x) Analogicznie jak w ust. 2.2 z wniosków powyższych wyłącz się elementy o rzutach rozciągłych.

b) Układ płaski ω i złączony z nim związkiem $/A\omega\pi/$ układ ω_p przynależny do powierzchni paraboloidy obrotowej Π. Jeżeli układy ω i ω_p rzucimy prostokątnie na płaszczyznę π prostopadłą do osi paraboloidy - otrzymamy akolineacyjne w związku $/A\pi/$ układ ω' i obraz ω'_p, gdyż środek rzutów spełnia warunek: $S^\infty \in \Pi$.

Ponieważ rzut prostokątny na płaszczyznę prostopadłą do osi paraboloidy obrotowej każdej elipsy leżącej na tej powierzchni jest zawsze okręgiem - związek łączący układ ω' z obrazem ω'_p jest szczególnym przypadkiem płaskiego związku akolineacji środkowo-osiowej $/A_0/$.
Prostszy aparat projekcyjny (rzuty prostokątne w miejsce środkowych) uzasadnia wybór modelu b) jako podstawy do dalszych rozważań własności związku $/A_0/$.
Weźmy pod uwagę złączone związkiem $/A_0/$ układ ω' i obraz ω'_p.

Interpretując je jako opisane pod b) rzuty akolineacyjnych układów ω i ω_p (rys. 8) stwierdzamy:



Rys. 8

1) Punktowi $G'_p = W'$ obrazu ω'_p - przyporządkowane są w układzie płaskim ω' punkty prostej s'. Ponieważ prosta ta jest rzutem krawędzi przecięcia się płaszczyzny układu ω z płaszczyzną σ styczną do powierzchni Π w punkcie W, punkty prostej s' są punktami przecięcia prostych układu ω' z stycznymi w punkcie W' do przyporządkowanych im w obrazie ω'_p okręgów (rys. 8).

2) Punktowi $S'=W'$ układu płaskiego ω' - jest przyporządkowana w obrazie ω'_p prosta niewłaściwa f'^∞ jako krawędź przecięcia się płaszczyzny π z płaszczyzną niewłaściwą φ^∞ rzucającą punkt S_p^∞.

3) Prostej układu ω' przechodzącej przez punkt W' przyporządkowana jest w obrazie ω'_p prosta zjednoczona $q'_p = q'$. Punkty: $A', B', C', \ldots \in q'$ i przyporządkowane im: $A'_p, B'_p, C'_p \ldots \in q'_p$ tworzą dwa rzutowe szeregi o wspólnej podstawie $q' = q'_p$

$$q'(A', B' \ldots) \barwedge q'_p(A'_p, B'_p \ldots)$$

Zjednoczonymi punktami szeregów (q') i (q'_p) (rzeczywistymi lub urojonymi) są punkty przecięcia prostej $q'=q'_p$ z osią akolineacji t'.

4) Oś akolineacji t' i okrąg graniczny n'_p są współśrodkowe, gdyż środki elips przekroju paraboloidy płaszczyznami równoległymi leżą na jednej jej średnicy.

5) Dowolnemu okręgowi $c'_p \in \omega'_p$ przyporządkowana jest akolineacyjnie w związku $/A_0/$:

a) prosta c' - jeżeli $W' \in c'_p$

b) stożkowa c' - jeżeli W' non $\in c'_p$.

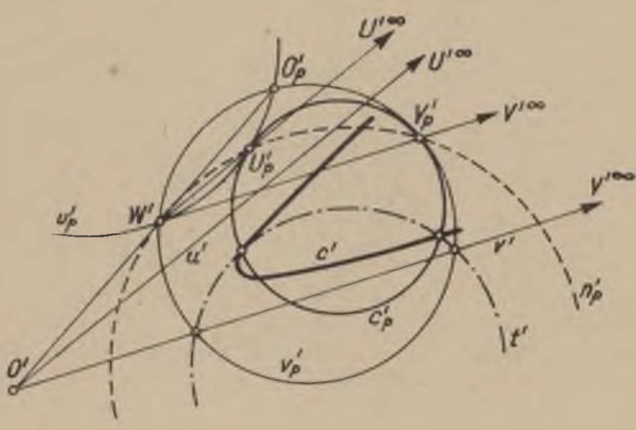
Przyporządkowanie a) wynika z definicji związku $/A_0/$.
Przyporządkowanie b) staje się oczywiste, jeżeli rozważy się powierzchnię stożkową Γ, której kierującą jest stożkowa $c_p \in \Pi$, a wierzchołkiem - środek związku $/A_{\omega\pi}/$, punkt W. Dobierając odpowiednio płaszczyznę ω - jako przekrój $\omega\Gamma$ otrzymuje się stożkową c, której rzut c' może być bądź to elipsą, bądź parabolą, bądź też hiperbolą. Zauważmy przy tym, że rodzaj stożkowej c' zależy od położenia okręgu c'_p względem okręgu granicznego n'_p. Ponieważ punktom obrazu ω'_p leżącym na okręgu granicznym odpowiadają w układzie ω' punkty niewłaściwe przeto w przypadku:

α) przecinania się okręgu c'_p z okręgiem granicznym n'_p w dwóch punktach rzeczywistych otrzymujemy jako c' - hiperbolę,

β) styczności okręgów c'_p i n'_p - krzywa c' jest parabolą,

γ) braku rzeczywistych, wspólnych punktów okręgów c'_p i n'_p stożkowa c' jest elipsą lub okręgiem.

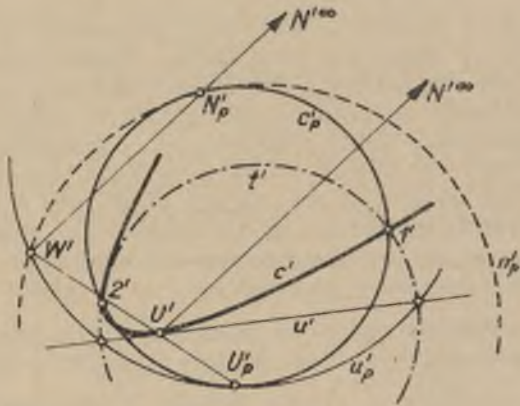
Konstrukcję krzywych przyporządkowanych w związku $/A_0/$ okręgowi $c'_p \in \omega'_p$ przedstawiają:



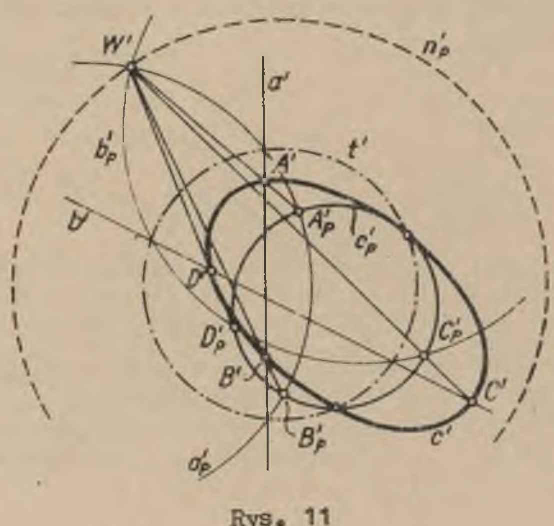
Rys. 9

ad α) - Rys. 9. W konstrukcji użyto okręgów u'_p i v'_p stycznych do c'_p w punktach $U'_p, V'_p = c'_p \cdot n'_p$, tj. przyporządkowanych asymptotom $u', v' \in \omega'$ szukanej hiperboli c'. Dwa punkty stożkowej c' stanowią elementy wspólne: $c'_p \cdot t'$

ad β) - Rys. 10. Promień akolineacji przechodzący przez punkt styczności okręgu c'_p z okręgiem granicznym - $W'N'_p$ wyznacza środek paraboli c'. Obierając dowolny okrąg u'_p styczny do c'_p i incydentny z W' konstruujemy przyporządkowaną mu styczną u' do paraboli c'. Oprócz stycznej i sprzężonej z nią średnicy znane są dwa punkty paraboli c' leżące na osi akolineacji: $1', 2' = c'_p \cdot t'$.



Rys. 10



Rys. 11

ad γ) - Rys.11. W konstrukcji mając dane dwa punkty elipsy jako punkty przecięcia osi t' okręgiem c_p wyznaczono dalsze cztery punkty tej krzywej przez wprowadzenie dwóch pomocniczych okręgów $a'_p(W', A'_p, B'_p)$ i $b_p(W', C'_p, D'_p)$. Punkty A', B', C', D' leżą na odpowiednich promieniach akolineacji i odpowiednich prostych a', b' przyporządkowanych okręgom a'_p i b'_p.

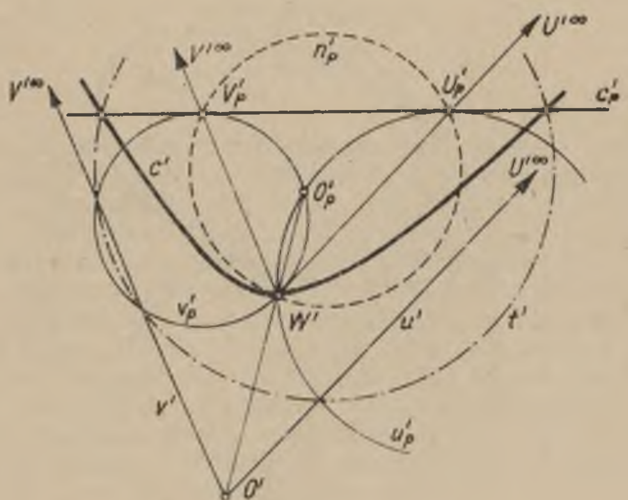
6) Dowolnej prostej $c'_p \in \omega'_p$ przyporządkowana jest akolineacyjnie w związku $/A_0/$:

a) prosta $c' = c'_p$ - jeżeli $W' \in c'_p$

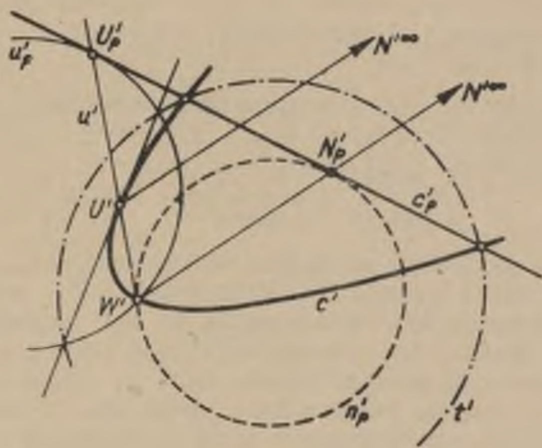
b) stożkowa c' - jeżeli W' non $\in c'_p$.

W wyprowadzeniu powyższej własności skorzystać można z rozumowania analogicznego jak w punkcie 5). Stożkowa $c_p \in \Pi$, której rzutem normalnym na płaszczyznę π prostopadłą do osi paraboloidy Π jest rozważana prosta c'_p, przedstawia sobą parabolę.
Promienie akolineacji łączące punkt $W \in \Pi$ z poszczególnymi punktami paraboli c_p tworzą powierzchnię stożkową Γ. Przekrój powierzchni Γ dowolną płaszczyzną ω non $\in W$ wyznacza w związku $/A_{\omega\pi}/$ akolineacyjną z c_p stożkową c, której rzut na π jest stożkową c'.

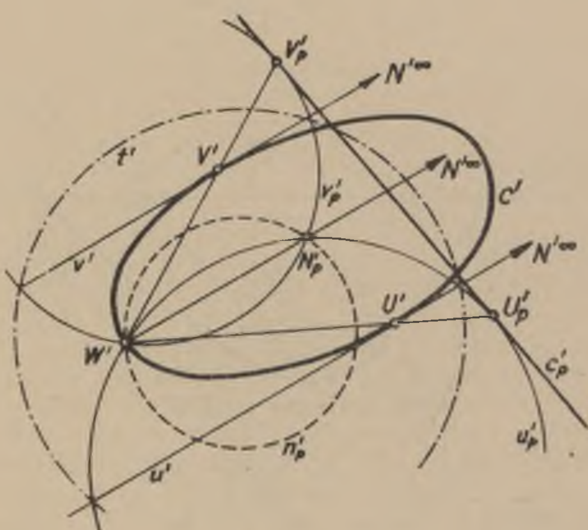
Na rys. 12-14 przedstawiono stożkowe c' akolineacyjne w związku $/A_0/$ z prostą sieczną, styczną i zewnętrzną względem okręgu granicznego n'_p.



Rys. 12


U'_p
u'_p
N'^{∞}
N'^{∞}
u'
N'_p
U'
c'_p
W'
c'
n'_p
t'

Rys. 13


V'_p
N'^{∞}
t'
V'
N'^{∞}
v'_p
C'
N'_p
N'^{∞}
v'
U'
U'_p
W'
c'_p
n'_p
u'_p
u'

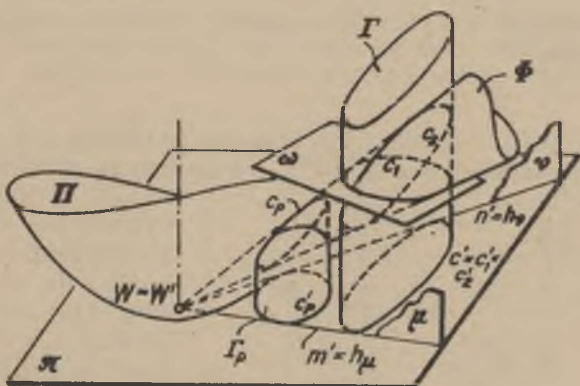
Rys. 14

7) Twierdzenie 1.

Dowolnej stożkowej $c' \in \omega'$ można zawsze przyporządkować akolineacyjny z nią okrąg $c_p' \in \omega_p'$.

Dowód.

Weźmy pod uwagę styczne do stożkowej $c' \in \pi$ (rys. 15) - proste m', n' przecinające się w punkcie W' i wpiszmy w nie dowolny okrąg c_p'. Wykażemy, że istnieje płaski związek akolineacji środkowo-osiowej $/A_0/$ przekształcający stożkową c' w okrąg c_p'. Przyjmijmy dowolną paraboloidę obrotową Π $(W' \in \Pi)$, powierzchnię walcową Γ o kierującej c' i powierzchnię walcową Γ_p o kierującej c_p', o osiach prostopadłych do płaszczyzny π. Częścią linii przenikania powierzchni walcowej Γ_p z paraboloidą Π jest elipsa c_p [x].



Rys. 15

x) W dowodzie na to można przeprowadzić następujące rozumowanie: rozważmy punkty przebicia paraboloidy Π trzema tworzącymi powierzchni Γ_p przechodzącymi przez trzy dowolne punkty A_p', B_p', C_p' okręgu c_p'. Otrzymane w ten sposób punkty A_p^*, B_p^*, C_p^* wyznaczają pewną płaszczyznę γ przecinającą paraboloidę Π w elipsie c_p^*. Jest oczywiste, że elipsa ta przechodzi przez punkty A_p^*, B_p^*, C_p^*. Z własności paraboloidy obrotowej wynika, że prostokątnym rzutem elipsy c_p^* na płaszczyznę $\pi \perp l$ jest okrąg. Ponieważ zgodnie z konstrukcją: $A_p^{*\prime} = A_p'$, $B_p^{*\prime} = B_p'$, $C_p^{*\prime} = C_p'$ przeto okrąg c_p' jest identyczny z okręgiem $c_p^{*\prime}$. Wynika stąd, że wszystkie punkty elipsy c_p^* są punktami powierzchni walcowej Γ_p. Ponieważ są to jednocześnie punkty leżące na paraboloidzie Π - elipsa $c_p^* = c_p$ jest częścią linii przenikania powierzchni Π i Γ_p.

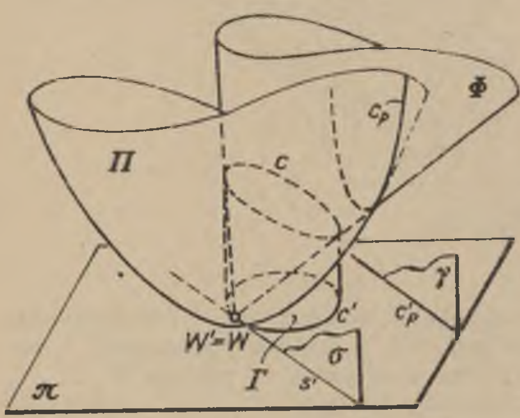
Wprowadźmy powierzchnię stożkową Φ o wierzchołku w punkcie W' i kierującej w postaci elipsy c_p. Powierzchnia Φ przenika się z powierzchnią walcową Γ w dwóch stożkowych $c_{1,2}$ gdyż istnieją dwie różne płaszczyzny wspólnie styczne do Φ i Γ: $m' \in \mu, \mu \perp \pi, n \in \nu, \nu \perp \pi$, a zatem - dwa punkty podwójne.
Każda z stożkowych $c_{1,2}$ jest akolineacyjna z elipsą c_p w związku /$A_{\omega\pi}$/ (gdzie ω przedstawia płaszczyznę stożkowej c_1 lub c_2), ponieważ elipsa c_p oraz punkt W' leżą na paraboloidzie Π.
Wynika stąd, że ich rzuty prostokątne $c_1'=c_2'$ na płaszczyznę π oraz c_p' są złączone pewnym płaskim związkiem akolineacji środkowo-osiowej /A_0/. Ponieważ zachodzi $c_1'=c_2'=c'$, twierdzenie o istnieniu związku /A_0/ przekształcającego dowolnie przyjętą stożkową c' w okrąg c_p' jest prawdziwe.

8) Twierdzenie 2.

Istnieje związek /A_0/ akolineacyjnie przekształcający dowolną stożkową w prostą.

Dowód.

Na płaszczyźnie π przyjmijmy dowolną stożkową c' i prostą c_p' (rys. 16). Wprowadźmy prostą $s' \parallel c_p'$, styczną do stożkowej c' w punkcie W'. Rozważmy powierzchnię walcową Γ o kierującej c' i osi prosto padłej do płaszczyzny π oraz dwie płaszczyzny: $\gamma \perp \pi, c_p' \in \gamma, \sigma \perp \pi, s' \in \sigma$. Powierzchnię walcową Γ przetnijmy dowolną płaszczyzną w stożkowej c i utwórzmy powierzchnię stożkową Φ, której kierującą jest krzywa c, a wierzchołkiem punkt W'. Ponieważ płaszczyzna σ jest styczna do powierzchni Φ - płaszczyzna $\gamma \parallel \sigma$ przecina tę powierzchnię w pewnej paraboli c_p.



Rys. 16

Rozważmy paraboloidę obrotową $\Pi \in W'$ o osi $l \perp \pi$, przechodzącą przez parabolę c_p. Stwierdzamy, że parabola c_p stanowi rzut z punktu W' na powierzchnię Π stożkowej c, czyli, że obydwie te krzywe złączone są związkiem akolineacji środkowo-osiowej układów o różnych podstawach /$A_{\omega\pi}$/.
Ponieważ rzutem prostokątnym na płaszczyznę π, czyli rzutem z punktu $S^\infty \in \Pi$ stożkowych c_p i c są odpowiednio prosta c_p' i stoż-

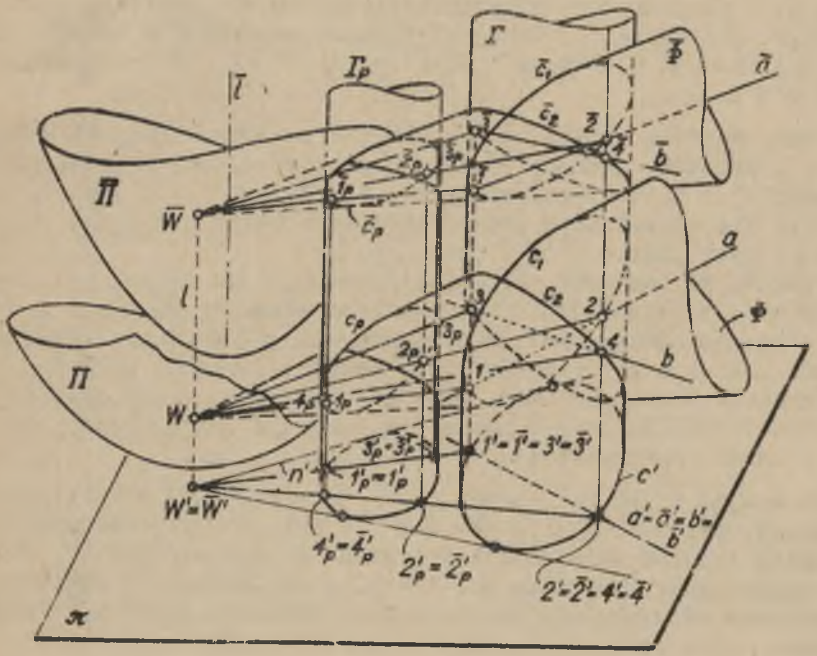
kowa c' – utwory te są sobie przyporządkowane w płaskim związku akolineacji $/A_0/$, co należało udowodnić.

9) Twierdzenie 3.

Dla danej stożkowej c' i danego okręgu c'_p leżących na jednej płaszczyźnie π istnieje co najwyżej 12 różnych związków akolineacji środkowo-osiowej $/A_0/$ przekształcających $c' \in \omega'$ na $c'_p \in \omega'_p$ i na odwrót.

Dowód.

Rozważmy przekształcenie stożkowej w okrąg (rys. 16). W wyprowadzeniu twierdzenia 1 przyjęto dowolnie paraboloidę Π i wykazano, że istnieją akolineacyjne w związku $/A_{\omega\pi}/$ taki układ płaski ω i układ ω_p o podstawie Π, że zadana stożkowa c' i okrąg c'_p są rzutami przyporządkowanych sobie utworów odpowiednio przynależnych do tych układów $c \in \omega$, $c_p \in \omega_p$. Z dowolności przyjęcia paraboloidy Π wynika, że związków $/A_{\omega\pi}/$ o powyższej własności jest nieskończenie wiele. Wykażemy, że rzut prostokątny na płaszczyznę π osi każdego z tych związków jest jednym z dwu okręgów stanowiących osie dwu płaskich



Rys. 17

związków akolineacji $/A_o/$. W tym celu przyjmijmy dwie dowolne paraboloidy obrotowe Π i $\bar{\Pi}$ o osiach prostopadłych do płaszczyzny π przechodzące przez takie dwa punkty W i $\bar{W}$, że $W'=\bar{W}'$. Paraboloidy Π i $\bar{\Pi}$ przenikają się z powierzchnią Γ_p (rys.15 i 17) w elipsach c_p i $\bar{c}_p$, które traktujemy jako kierujące powierzchni stożkowych Φ, $\bar{\Phi}$ o wierzchołkach w punktach W i $\bar{W}$.

Rozpatrując linię przenikania powierzchni walcowej Γ z powierzchniami Φ i $\bar{\Phi}$ otrzymujemy pary stożkowych $c_{1,2}$ i $\bar{c}_{1,2}$ o płaszczyznach: $c_1 \in \omega_1$, $c_2 \in \omega_2$, $\bar{c}_1 \in \bar{\omega}_1$, $\bar{c}_2 \in \bar{\omega}_2$. Stożkowe $c_{1,2}$, $\bar{c}_{1,2}$ są odpowiednio akolineacyjne z elipsami c_p, $\bar{c}_p$

w związkach:

$c_1 - c_p - /A_{\omega_1}\pi/$ o osi $t_1 = \omega_1\Pi$

$c_2 - c_p - /A_{\omega_2}\Pi/$ o osi $t_2 = \omega_2\Pi$

$\bar{c}_1 - \bar{c}_p - /A_{\bar{\omega}_1}\bar{\pi}/$ o osi $\bar{t}_1 = \bar{\omega}_1\bar{\Pi}$

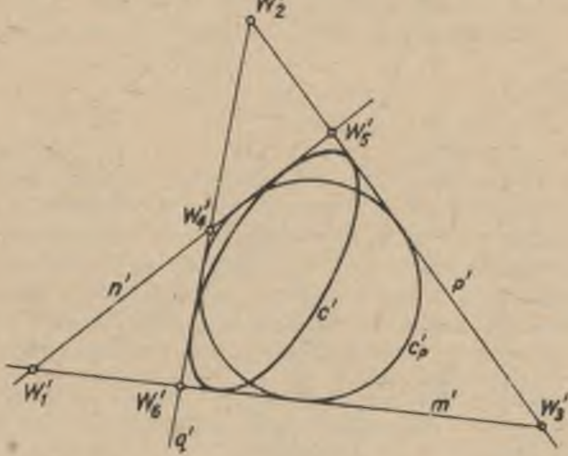
$\bar{c}_2 - \bar{c}_p - /A_{\bar{\omega}_2}\bar{\pi}/$ o osi $\bar{t}_2 = \bar{\omega}_2\bar{\Pi}$

Wyznaczmy prostokątny rzut na płaszczyznę π jednej z osi akolineacji np. t_1. W tym celu rozważmy rzut dowolnej prostej $a = 12$ układu ω_1 i skonstruujmy przyporządkowany mu w płaskim związku akolineacji $/A_o/$ okrąg a'_p. Okrąg a'_p będzie incydentny z znanym środkiem akolineacji $W'=\bar{W}'$ oraz z punktami $1'_p$ i $2'_p$ przyporządkowanymi punktom $1'$ i $2'$.

Punkty wspólne okręgu a'_p i prostej a' są elementami osi akolineacji t'_1. Zauważmy jednak, że dzięki prostopadłości tworzących powierzchni Γ i Γ_p do płaszczyzny π, z punktami $1'$ i $2'$ oraz $1'_p$ i $2'_p$ jednoczą się odpowiednio przyporządkowane sobie w związku akolineacji $/\bar{A}_0/$ pary punktów $\bar{1}'$ i $\bar{2}'$ oraz $\bar{1}'_p$ i $\bar{2}'_p$.
Oznacza to, że zachodzi $a'=\bar{a}'$, gdzie $a=12$, $\bar{a}=\bar{1}\bar{2}$ oraz $a'_p=\bar{a}'_p$. Wynika stąd, że pary punktów osi t'_1 i $\bar{t}'_1$, jako elementy wspólne prostych a', $\bar{a}'$ z przyporządkowanymi im okręgami a'_p, $\bar{a}'_p$ w rzucie prostokątnym na płaszczyznę π ulegają zjednoczeniu. Ponieważ prosta a przyjęta została dowolnie, przy innym jej położeniu w analogiczny sposób można dowieść, że pokrywają się w rzucie dalsze punkty osi t'_1 i $\bar{t}'_1$, czyli, że zachodzi $t'_1 = \bar{t}'_1$.

Rozważając w podobny sposób rzuty prostych $b \in \omega_2$ i $\bar{b} \in \bar{\omega}_2$ spełniających warunki $b'=\bar{b}'=a'=\bar{a}'$ ($b=34$, $\bar{b}=\bar{3}\bar{4}$) oraz przyporządkowanych im w płaskim związku akolineacji środkowo-osiowej okręgów b'_p i $\bar{b}'_p$, stwierdzimy pokrywanie się osi $t'_2=\bar{t}'_2$. Z powyższego wnioskujemy, że niezależnie od przyjęcia paraboloidy Π istnieją tylko dwa płaskie związki $/A_0/$ o wspólnym środku W' przekształcające daną stożkową c' w okrąg c'_p.

Zauważmy jednak, że środek akolineacji - W' konstruuje się jako punkt przecięcia się wspólnych stycznych m' i n' do okręgu c'_p i stoż kowej c' (rys. 15). Ponieważ stycznych takich (rzeczywistych i różnych) może być co najwyżej cztery - m', n', p', q' (rys. 18) - istnieje co najwyżej sześć różnych położeń punktu W'- $W'_{1\div 6}$ (w wierzchołkach czworoboku zupełnego $m'n'p'q'$), a konsekwentnie co najwyżej 12 różnych związków akolineacji środkowo-osiowej $/A_o/$ realizujących przekształcenie stożkowej c' w okrąg c'_p.



Rys. 18

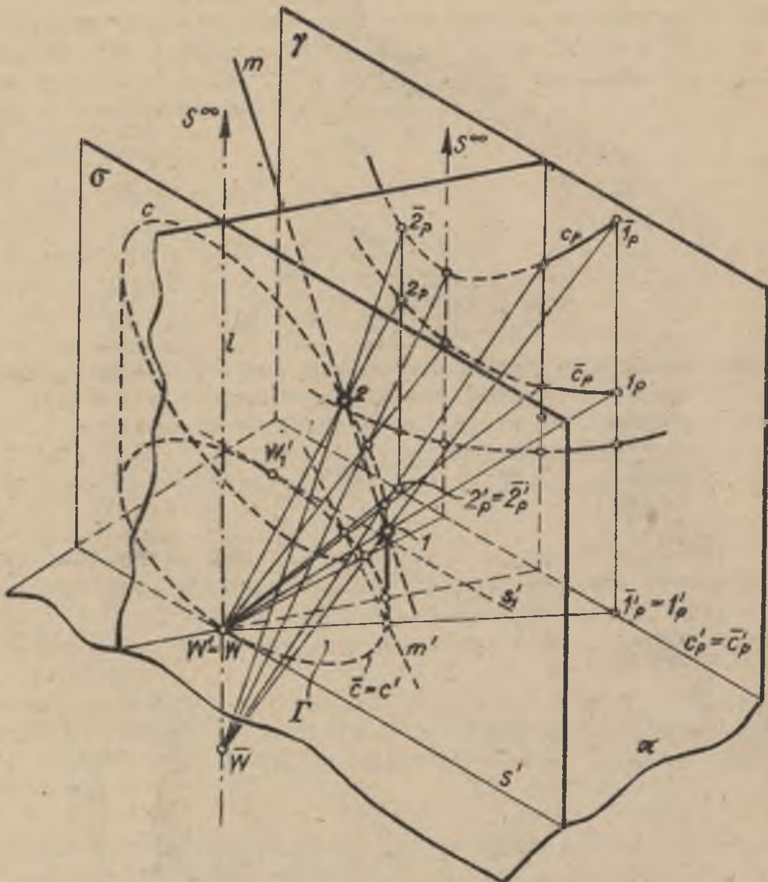
10) Twierdzenie 4.

Dla danej stożkowej c' i danej prostej c'_p leżących w jednej płaszczyźnie istnieją co najwyżej dwa związki akolineacji środkowo-osiowej $/A_o/$ przekształcające $c' \in \omega'$ na $c'_p \in \omega'_p$ i na odwrót.

Dowód.

Przyjmijmy dowolną stożkową c', dowolną prostą c'_p i styczną do stożkowej $s' \parallel c'_p$ leżące w płaszczyźnie π (rys. 19). Obierzmy powierzchnię Γ o kierującej c' i tworzących prostopadłych do płaszczyzny π oraz dowolny przekrój tej powierzchni - stożkową $c \in \omega$. Rozważmy tworzącą l powierzchni Γ, przechodzącą przez punkt styczności prostej s' do stożkowej c' i dowolne dwa punkty $(W, \bar{W}) \in l$. Utwórzmy powierzchnie stożkowe Φ, $\bar{\Phi}$, których kierującą jest stożkowa c, a wierzchołki - odpowiednio punktami W i $\bar{W}$.

Przekrojami powierzchni Φ i $\bar{\Phi}$ płaszczyzną $\gamma \perp \pi$, $c_p' \in \gamma$ są parabole c_p i $\bar{c}_p$. Rozważmy paraboloidy obrotowe określone odpowiednio przez parabole c_p i $\bar{c}_p$ oraz punkty W i $\bar{W}$: $\Pi(c_p, W)$, $\bar{\Pi}(\bar{c}_p, \bar{W})$.



Rys. 19

Stwierdzamy środkowo-osiowo akolineacyjne przyporządkowanie:
stożkowej c - paraboli c_p - w związku $/A\omega\pi/$,
stożkowej c - paraboli $\bar{c}_p$ - w związku $/A\omega\bar{\pi}/$.

Zauważmy, że prostokątne rzuty na π środków związków $/A\omega\pi/$ i $/A\omega\bar{\pi}/$ jednoczą się w punkcie $W'=\bar{W}'$. Rozważmy osie tych związków: t i $\bar{t}$.

W tym celu obierzmy dowolną prostą m przecinającą się z stożkową c w punktach 1, 2. W związku $/A_{\omega\pi}/$ prostej m przyporządkowana jest stożkowa m_p przechodząca przez środek W i punkty 1_p, 2_p, w związku $/A_{\omega\bar{\pi}}/$ - stożkowa $\bar{m}_p$ incydentna z środkiem $\bar{W}$ i punktami $\bar{1}_p$, $\bar{2}_p$. Z przecięcia mm_p oraz $m\bar{m}_p$ otrzymujemy pary punktów osi akolineacji t, $\bar{t}$.

Dokonajmy prostokątnego rzutu na płaszczyznę π prostej m i przyporządkowanych jej w związkach $/A_{\omega\pi}/$ i $/A_{\omega\bar{\pi}}/$ stożkowych m_p, $\bar{m}_p$. Stwierdzamy pokrywanie się rzutów środków akolineacji $W'=\bar{W}'$ oraz punktów: $1_p'=\bar{1}_p'$, $2_p'=\bar{2}_p'$. Ponieważ rzuty stożkowych m_p i $\bar{m}_p$ są okręgami przechodzącymi przez $W'=\bar{W}'$ wynika stąd, że zachodzi:

$$m_p' = \bar{m}_p'$$

Konsekwencją powyższej relacji jest pokrywanie się w prostokątnych rzutach na π punktów przecięcia się m z m_p oraz m z $\bar{m}_p$, czyli punktów osi akolineacji t' i $\bar{t}'$. Ponieważ prosta m przyjęta została dowolnie - wynika stąd, że zmieniając jej położenie otrzymujemy inne pokrywające się w rzutach na π punkty osi t i $\bar{t}$ czyli, że zachodzi $t'=\bar{t}'$. Okrąg $t'=\bar{t}'$ jest osią płaskiego związku akolineacji środkowo-osiowej $/A_o/$ przekształcającego stożkową c' w prostą c_p'.

Udowodniliśmy, że nie zależy ona od wyboru paraboloidy Π realizującej akolineacyjne przyporządkowanie układów o różnych podstawach stożkowej $c\in\omega$ i paraboli $c_p\in\omega_p$ w związku $/A_{\omega\pi}/$ (można wnioskować, że dla danej stożkowej c i płaszczyzny γ - paraboloidy Π, $\bar{\Pi}$, określone jak wyżej, przenikają się z sobą m.in. w elipsie t, której rzutem na płaszczyznę π jest oś t').
Wynika stąd, że istnieje jeden tylko związek $/A_o/$ o środku W' przyporządkowujący stożkowej c' prostą c_p'.

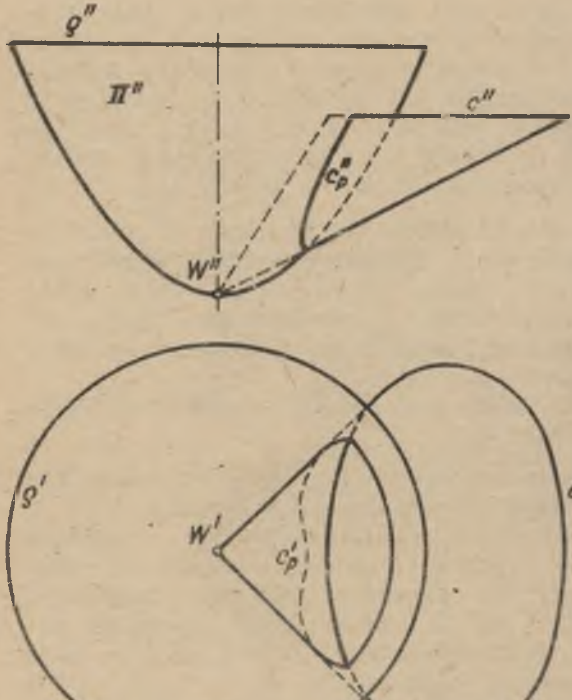
Zauważmy jednak, że w miejsce stycznej $s'\parallel c_p'$ (rys. 19) można było rozważyć prostą $s_1'\parallel s'\parallel c_p'$ styczną do stożkowej c' w punkcie W_1' i przeprowadzić analogiczne rozumowanie. Stwierdzilibyśmy wówczas istnienie również jednego, niezależnie od pośredniczących w rozumowaniu paraboloid Π, związku $/A_o/$ przekształcającego stożkową c' w prostą c_p', lecz o środku W_1' i osi t_1'. Wnioskujemy zatem, że jedynie dwa związki akolineacji środkowo-osiowej $/A_o/$ i $/A_o/_1$ mogą przyporządkowywać danej stożkowej c' daną prostą c_p'.
Zauważmy jeszcze, że przyporządkowanie takie nie zawsze jest możliwe. Gdyby na przykład jako stożkową c' przyjąć parabolę, a jako prostą c_p' - jedną z jej stycznych $m'=c_p'$, wówczas ponieważ nie istnieje różna od m' styczna $s'\parallel c_p'$ musiałoby zachodzić: $s'=c_p'$, $W'\in c_p'$. Konsekwencją przynależności punktu W' do prostej c_p' byłoby przyporządkowanie jednego, tego samego punktu $M_p'=W'$ prostej c_p' wszystkim punktom stożkowej c', co przeczy własnościom związku akolineacji środkowo-osiowej.

11) Twierdzenie 5.

Utworem przyporządkowanym w związku $/A_o/$ dowolnej stożkowej $c' \epsilon \omega'$ może być prosta, okrąg lub krzywa rzędu czwartego $c_p \in \omega'_p$.

Dowód.

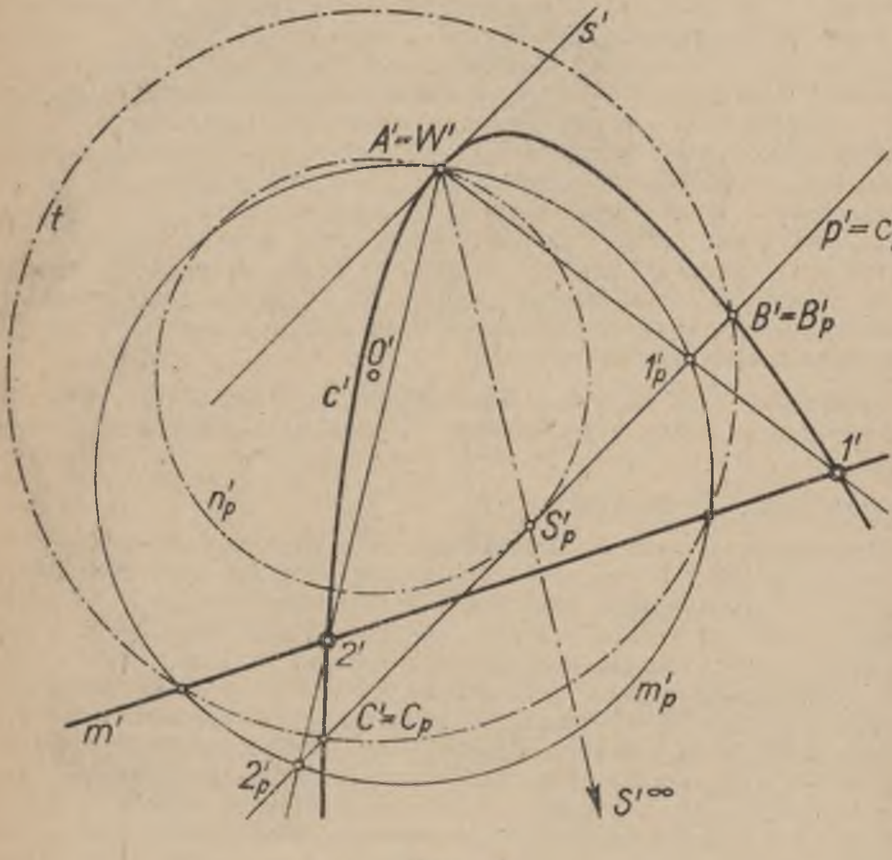
Możliwość przyporządkowania stożkowej c' okręgu lub prostej c'_p rozstrzygają twierdzenia 1 i 2.
W celu udowodnienia możliwości akolineacyjnego przekształcenia stożkowej w krzywą rzędu czwartego weźmy pod uwagę: dowolną stożkową c' na płaszczyźnie π jako kierującą powierzchni walcowej Γ o tworzących prostopadłych do płaszczyzny π, dowolny przekrój tej powierzchni - stożkową c oraz dowolną paraboloidę obrotową Π o osi $l \perp \pi$. Rozważmy powierzchnię stożkową Φ o kierującej c i wierzchołku W dowolnie przyjętym na paraboloidzie Π. Powierzchnia Φ przenika się z powierzchnią Π w krzywej rzędu czwartego - c_p, która może być interpretowana jako rzut stożkowej c na paraboloidę Π z punktu $W \in \Pi$. Krzywe c i c_p są sobie przyporządkowane w związku akolineacji środkowo-osiowej układów o różnych podstawach $/A_{\omega\pi}/$. Wynika stąd, że ich rzuty prostokątne na płaszczyznę π - krzywe c' i c'_p są sobie przyporządkowane w płaskim związku akolineacji środkowo-osiowej $/A_o/$. Ponieważ przy ogólnych położeniach stożkowej c i środka W położenie krzywej c_p względem płaszczyzny π nie ma żadnych cech szczególnych - przeto rzutem c'_p jest również krzywa rzędu czwartego (rys.20).



Rys. 20

Zauważmy, że dowód powyższy przeprowadzić można prosto w oparciu o dowód twierdzenia 2. Zbadajmy bowiem ilość punktów przecięcia utworu $c'_p \in \omega'_p$ dowolną prostą m'_p. W tym celu wyznaczmy utwór $m' \in \omega'$ akolineacyjny w związku $/A_0/$ z prostą $m'_p \in \omega'_p$. Jest nią zgodnie z rozważaniami punktu 8.ustępu 3.3.1 stożkowa m' incydentna z środkiem W' związku $/A_0/$. Przy ogólnym przyjęciu stożkowa m' przecina się z stożkową c' w czterech punktach. Wynika stąd, że dowolna prosta m'_p posiada z krzywą c'_p cztery punkty wspólne, czyli, że c'_p jest krzywą rzędu czwartego.

3.3.2. Zastosowania związku $/A_0/$



Rys. 21

Możliwość akolineacyjnego przekształcenia stożkowej w prostą czyni przydatnym związek $/A_0/$ do zastosowań w zadaniach konstrukcyjnych dotyczących krzywych stopnia drugiego.

Przykłady:

Zadanie 1. Dana jest parabola c' określona punktami A', B' średnicą $A'S'^{\infty}$ i styczną s' przynależną do punktu A'. Wyznaczyć punkty przecięcia paraboli c' dowolną prostą m'.

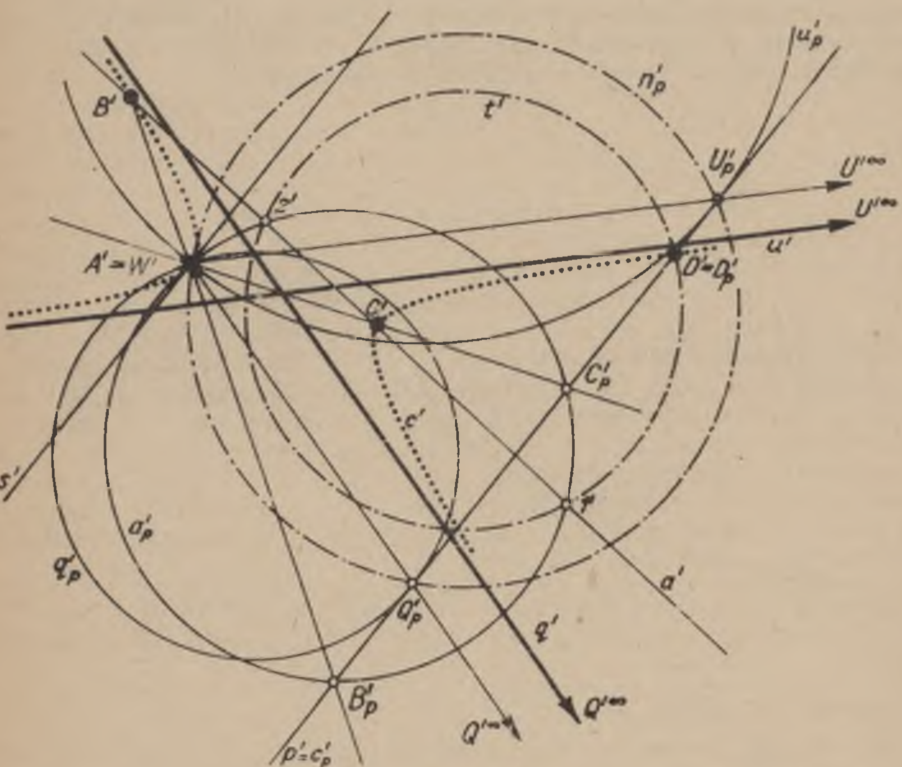
Rozwiązanie (rys. 21).

Poprowadźmy prostą $p' \parallel s'$ przynależną do punktu B' i wyznaczmy na niej w oparciu o symetrię ukośnokątną trzeci punkt paraboli C'. Traktujmy prostą p' jako utwór akolineacyjnie przyporządkowany paraboli $c' - p' = c'_p$. Przy takim założeniu punkt A' jest środkiem W' związku akolineacji $/A_0/$, a punkty B' i C' wspólne obydwu utworom (paraboli i prostej) są elementami osi akolineacji t'. Niewłaściwemu punktowi paraboli S'^{∞} odpowiada w związku $/A_0/$ punkt S'_p prostej c'_p. Zauważmy, że prostej niewłaściwej n'^{∞} stycznej do paraboli w punkcie S'^{∞} przyporządkowany jest akolineacyjnie okrąg n'_p styczny do c'_p w punkcie S'_p. W celu skonstruowania osi akolineacji t' wystarczy wyznaczyć środek O' okręgu n'_p, gdyż jest to okrąg graniczny związku $/A_0/$. Dla tak określonych elementów związku $/A_0/$ należy przekształcić akolineacyjnie na okrąg m'_p daną prostą m' (okrąg m'_p przechodzi przez punkt W' i punkty przecięcia prostej m' z osią t'), a następnie wyznaczyć punkty $1'_p$, $2'_p$ w których okrąg m'_p przecina się z prostą c'_p. Znalezienie punktów $1'$, $2'$ przyporządkowanych w związku $/A_0/$ punktom $1'_p$ i $2'_p$ (na promieniach akolineacji i prostej m') stanowi rozwiązanie zadania.

Zadanie 2. Dane są cztery dowolne punkty hiperboli A', B', C', D' i styczna s' do krzywej w punkcie A'. Wyznaczyć asymptoty hiperboli.

Rozwiązanie (rys. 22).

Przyjmujemy prostą c'_p akolineacyjnie przyporządkowaną hiperboli c' w związku $/A_0/$ o środku A'. Spełniony musi być przy tym warunek $c'_p \parallel s'$. Dla uproszczenia konstrukcji przyjmujemy $D' \in c'_p$. Wówczas punkt D' jest już jednym, znanym punktem osi akolineacji t'. Rozważmy prostą $a' - B'C'$. Znając przyporządkowany jej akolineacyjnie okrąg a'_p (przechodzący przez $A' = W'$ i punkty $B'_p = W'B' \cdot c'_p$, $C'_p = W'C' \cdot c'_p$ przyporządkowane punktom B', C') z punktów przecięcia się tych utworów wnosimy o dalszych elementach osi akolineacji $a'c'_p = 1', 2' \in t'$. Znalezienie osi akolineacji $t'(D', 1', 2')$ pozwala na wyznaczenie okręgu granicznego n_p związku $/A_0/$ jako współśrodkowego z t' i przynależnego do punktu W'. Punkty przecięcia okręgu granicznego n'_p prostą c_p - U'_p i Q'_p odpowiadają akolineacyjnie niewłaściwym punktom hiperboli U'^{∞} i Q'^{∞}. Konstrukcja asymptot sprowadza się do wyznaczenia prostych u' i q' akolineacyjnie odpowiadających okręgom u'_p i q'_p stycznym do prostej c'_p w punktach U'_p i Q'_p.

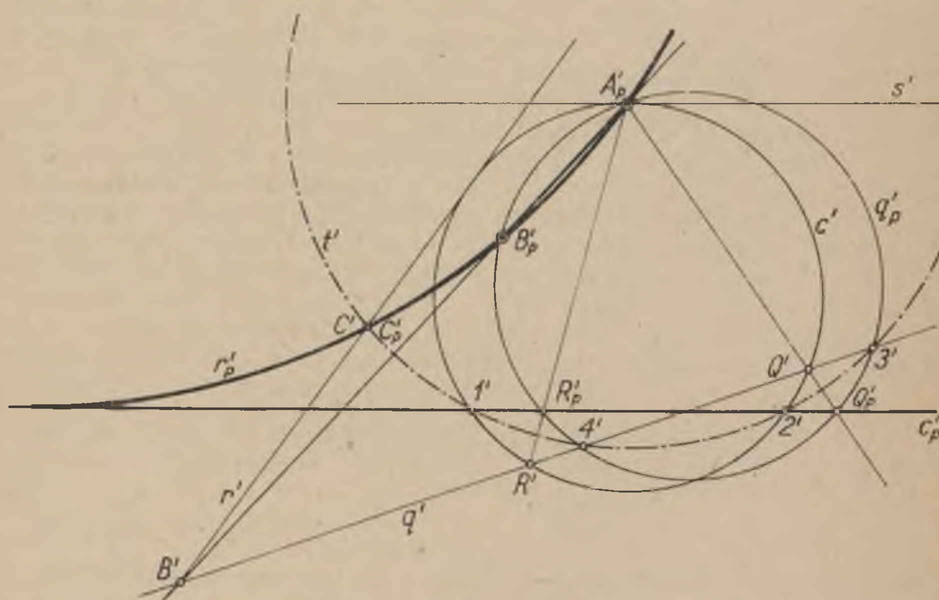


Rys. 22

Zadanie 3. Dane są dowolne dwa punkty A'_p, B'_p oraz nierozdzielająca je i nieprzechodząca przez żaden z nich prosta c'_p. Wyznaczyć okrąg r'_p incydentny z punktami A'_p i B'_p, styczny do prostej c'_p.

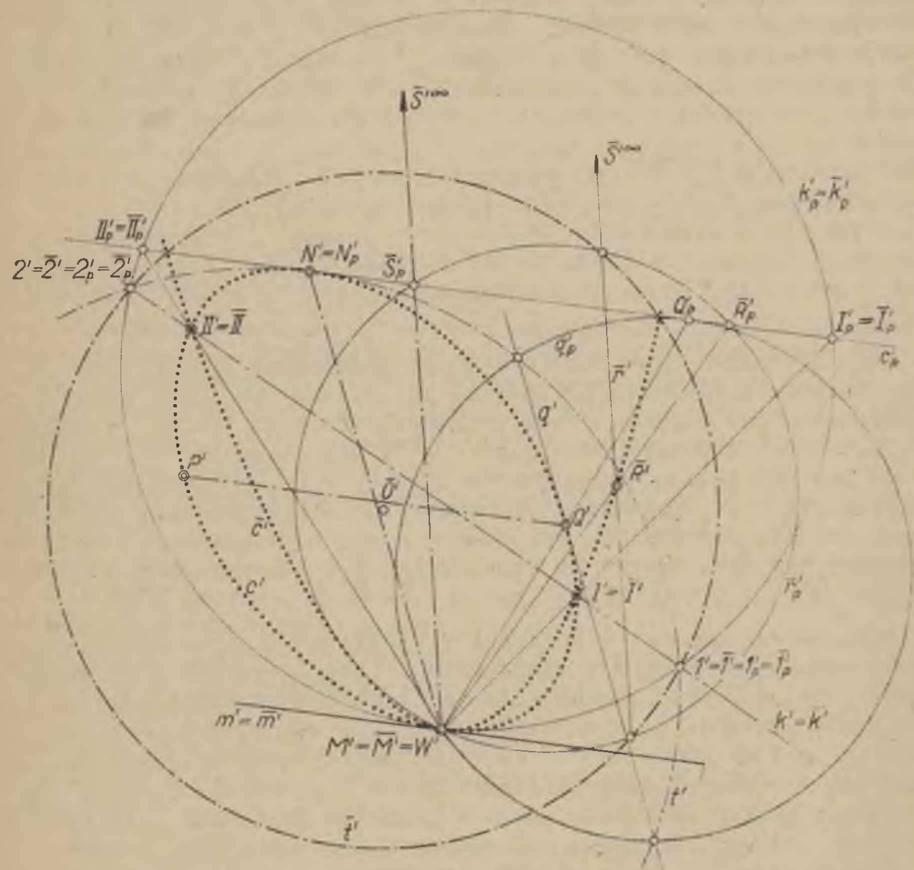
Rozwiązanie (rys. 23).

W konstrukcji posłużymy się związkiem akolineacji środkowo-osiowej /A_0/ łączącym daną prostą c'_p z dowolnym okręgiem c' stycznym w punkcie A'_p do prostej $s'//c'_p$. Dwa punkty osi akolineacji t' stanowią punkty przecięcia się prostej c'_p z okręgiem c' – $1'$, $2'$, dalsze dwa ($3'$ i $4'$) otrzymujemy z rozważenia dowolnego okręgu q'_p (dla uproszczenia konstrukcji przyjęto $B'_p \in q'_p$) oraz odpowiadającej mu akolineacyjnie prostej q'. Wyznaczywszy punkt B', przyporządkowany w związku $/A_0/$ punktowi B'_p, konstruujemy styczne do okręgu c' przechodzące przez B'. Stycznym tym akolineacyjnie odpowiadać będą okręgi styczne do c'_p i przechodzące przez punkt B'_p, a jednocześnie incydentne z punktem A'_p jako środkiem akolineacji. Na rys. 23 wyznaczono jeden okrąg rozwiązujący zadanie - r'_p. Elementem pośredniczącym w konstrukcji jest punkt $C'_p = C'$, tj. punkt przecięcia osi akolineacji t' prostą r' styczną do okręgu c'.



Rys. 23

Zadanie 4. Dane są: elipsa c' określona parą średnic sprzężonych $M'N'$ i $P'Q'$ oraz parabola $\bar{c}'$ określona punktem $\bar{M}' = M'$ wraz z przynależną do niego styczną $\bar{m}'$, średnicą $\bar{M}'S'^{\infty}$ i punktem $\bar{R}'$. Wyznaczyć punkty przecięcia się elipsy c' z parabolą $\bar{c}'$ przy założeniu, że obydwie krzywe posiadają wspólną styczną $m' = \bar{m}'$ w punkcie $M' = \bar{M}'$.



Rys. 24

Rozwiązanie (rys. 24).

Traktując punkt $M'=\bar{M}'$ jako środek akolineacji W' obydwie stożkowe możemy przekształcić na tę samą dowolną prostą $c'_p \parallel (m'=\bar{m}')$. Rozważyć przy tym musimy dwa różne związki akolineacji: związek $/A_0/$ o środku W' i osi t' przekształcający na prostą c'_p elipsę c' oraz związek $/\bar{A}_0/$ o środku W' i osi $\bar{t}'$ przeprowadzający na prostą c'_p parabolę $\bar{c}'$. Wyznaczmy osie akolineacji t' i $\bar{t}'$. W celu uproszczenia konstrukcji prostą c_p wykreślmy przez punkt N'. Dzięki temu znany jest od razu jeden punkt osi t' - punkt wspólny elipsy c' i prostej c'_p : $N'=N'_p$. Dalsze dwa punkty tej osi otrzymamy z przecięcia dwóch akolineacyj nie przyporządkowanych sobie utworów w związku $/A_0/$: prostej q' stycznej do elipsy w punkcie Q' i okręgu q'_p stycznego do prostej c'_p w punkcie Q'_p.
Przy konstrukcji osi $\bar{t}'$ zwróćmy uwagę na fakt, że okrąg $\bar{t}'$ jest współśrodkowy z okręgiem granicznym $\bar{n}'_p$ związku $/\bar{A}_0/$.
Ponieważ okrąg graniczny $\bar{n}'_p$ styka się z prostą c'_p w punkcie $\bar{S}'_p$ i z definicji przechodzi przez $W'=M'=\bar{M}'$ - środek $\bar{O}'$ osi $\bar{t}'$ leży w przecięciu prostopadłej do c'_p przechodzącej przez $\bar{S}'_p$ z symetralną odcinka $W'\bar{S}'_p$.

Znając punkt $\bar{O}'$ wystarczy wyznaczyć jeden dowolny punkt osi $\bar{t}'$ dla jej skonstruowania. Na rys. 24 znaleziono dwa takie punkty jako elementy zjednoczone dwóch przyporządkowanych sobie w związku $/\bar{A}_0/$ utworów: średnicy paraboli $\bar{r}'=\bar{R}'\bar{S}'^{\infty}$ i akolineacyjnego z nią okręgu $\bar{r}'_p$ przechodzącego przez punkty $\bar{R}'_p$, $\bar{S}'_p$ i W'. Dysponując osiami akolineacji t' i $\bar{t}'$ przeprowadźmy następujące rozumowanie. Weźmy pod uwagę dowolną paraboloidę obrotową Π o osi l prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Rzućmy na paraboloidę Π w kierunku osi l punkt W', prostą c'_p i okręgi t' i $\bar{t}'$.

Otrzymujemy punkt W, parabolę c_p i elipsy t oraz $\bar{t}$. Rozważmy powierzchnię stożkową Φ o wierzchołku W i kierującej c_p. Przekroje powierzchni Φ płaszczyznami $\omega\ (t\in\omega)$ i $\bar{\omega}\ (\bar{t}\in\bar{\omega})$ odpowiadają akolineacyjnie paraboli c_p w związkach: $/A_{\omega\pi}/$ o wierzchołku W i osi t oraz $/A_{\bar{\omega}\pi}/$ o wierzchołku W i osi $\bar{t}$. Rzutami prostokątnymi na płaszczyznę rysunku układów akolineacyjnych w związkach $/A_{\omega\pi}/$ i $/A_{\bar{\omega}\pi}/$ są utwory przyporządkowane sobie w płaskich związkach akolineacji środkowo-osiowej określonych środkiem W' i odpowiednimi osiami t' i $\bar{t}'$. Stwierdzamy, że są to związki identyczne z $/A_0/$ i $/\bar{A}_0/$ (por. ust. 3.1), czyli, że elipsa c' i parabola $\bar{c}'$ są prostokątnymi rzutami na płaszczyznę rysunku krzywych przekroju powierzchni stożkowej Φ płaszczyznami ω i $\bar{\omega}$. Rozważmy krawędź $k=\omega\bar{\omega}$. Jest oczywiste, że jeżeli istnieją punkty przecięcia się stożkowych c i $\bar{c}$, to leżeć one muszą na prostej k. Prostokątne rzuty na płaszczyznę rysunku punktów wspólnych c i $\bar{c}$ są szukanymi punktami przecięcia się elipsy c' z parabolą $\bar{c}'$.
Konstruując prostą $k'=\bar{k}'$ zauważmy, że dwa jej punkty $1'$ i $2'$ stanowią punkty przecięcia się osi t' i $\bar{t}'$. Punkty te należą równocześnie do

układów elipsy c' i paraboli $\bar{c}'$ oraz do akolineacyjnego z nimi obrazu c_p. Możemy zatem napisać:

$$1' = \bar{1}' = 1'_p = \bar{1}'_p \; ; \quad 2' = \bar{2}' = 2'_p = \bar{2}'_p$$

Wynika stąd, że w związkach $/A_0/$ i $/\bar{A}_0/$ prostej $k' = \bar{k}'$ przyporządkowany będzie ten sam okrąg $k'_p = \bar{k}'_p$ (W', $1'_p = \bar{1}'_p$, $2'_p = \bar{2}'_p$). Punkty I'_p i II'_p, w których okrąg $k'_p = \bar{k}'_p$ przecina prostą c'_p odpowiadają akolineacyjnie punktom wspólnym c' i $\bar{c}'$.
Szukane punkty znajdujemy na promieniach akolineacji i prostej k' jako: $I' = W'I'_p \cdot k'$, $II' = W'II'_p \cdot k'$.

Zadanie 5. Dane są: elipsa c' przechodząca przez punkt Q' i hiperbola $\bar{c}'$ przynależna do punktu $\bar{P}'$, styczne do prostych m' i n' w punktach $M \neq \bar{M}$, $N \neq \bar{N}'$. Wyznaczyć punkty przecięcia się elipsy c' z hiperbolą $\bar{c}'$.

Rozwiązanie (rys. 25).

W oparciu o twierdzenie 1 przekształcamy akolineacyjnie obydwie krzywe w okrąg c_p. Przyjmując okrąg c_p stycznie do prostych m' i n' otrzymujemy środek przekształceń akolineacyjnych: $m'n' = W'$.
Załóżmy, że przekształcenie elipsy c' w okrąg c_p realizuje płaski związek akolineacji $/A_0/$, przekształcenie natomiast hiperboli w ten sam okrąg - związek $/\bar{A}_0/$.
Wyznaczmy osie obydwu związków akolineacji $/A_0/$ i $/\bar{A}_0/$ - okręgi t' i $\bar{t}'$.

W tym celu skonstruujmy: w związku $/A_0/$ przyporządkowane sobie: prostą $a' = M'N'$ i okrąg $a'_p(M'_p, N'_p, W')$ (gdzie punkty M_p i N_p są odpowiednimi punktami styczności okręgu c_p do prostych m' i n') oraz prostą $b' = M'Q'$ i okrąg $b'_p(M'_p, Q'_p, W')$; w związku $/\bar{A}_0/$ przyporządkowane sobie: prostą $\bar{a}' = \bar{M}'\bar{N}'$ i okrąg $\bar{a}'_p(\bar{M}'_p, \bar{N}'_p, W') = a'_p$ oraz prostą $\bar{d}' = \bar{N}'\bar{P}'$ i okrąg $\bar{d}'_p(\bar{N}'_p, \bar{P}'_p, W')$.
Wyjaśnijmy przy tym, że punkty Q'_p i $\bar{P}'_p$ wybrane zostały z par punktów przecięcia okręgu c_p odpowiednimi promieniami akolineacji dowolnie.

Elementy zjednoczone utworów przyporządkowanych sobie akolineacyjnie w związkach $/A_0/$ i $/\bar{A}_0/$ wyznaczają osie t' i $\bar{t}'$. Dla danych osi akolineacji t' i $\bar{t}'$ powtarzamy rozumowanie z zadania 4. Rozważamy krawędź k płaszczyzn ω i $\bar{\omega}$ określonych rzutami na paraboloidę Π okręgów t' i $\bar{t}'$. Punkty przecięcia się osi t' i $\bar{t}'$; $1' = \bar{1}'$ i $2' = \bar{2}'$ wyznaczają prostą $k' = \bar{k}'$. W obrazie c_p akolineacyjnym z elipsą c' i hiperbolą $\bar{c}'$ prostej $k' = \bar{k}'$ odpowiada okrąg $k'_p = \bar{k}'_p$ przynależny do punktów $1'_p = \bar{1}'_p$, $2'_p = \bar{2}'_p$ i W'.

Rys. 25

Znalazłszy punkty przecięcia się okręgu $k'_p = \bar{k}'_p$ z okręgiem c'_p - $I'_p = \bar{I}'_p$ i $II'_p = \bar{II}'_p$ wyznaczamy parę szukanych punktów wspólnych elipsy c' z hiperbolą $\bar{c}'$ na promieniach akolineacji i prostej $k' = \bar{k}'$ — I', II'. Pozostałą parę punktów przecięcia się stożkowych c' i $\bar{c}'$ otrzymać można zmieniając założenia odnośnie przyporządkowania punktów okręgu c'_p punktom stożkowych. Tak np. rozważając jako element akolineacyjnie odpowiadający punktowi $\bar{P}'$ punkt $\bar{P}'_{1p}$ w miejsce punktu $\bar{P}'_p$ oraz punkt Q'_{1p} w miejsce Q'_p jako element przyporządkowany akolineacyjnie punktowi Q' elipsy ustalamy nowe związki akolineacji $/A_0/_1$ i $/\bar{A}_0/_1$. Osie tych związków - okręgi t'_1 i $\bar{t}'_1$ (niezaznaczone na rys.25) wyznaczają nową prostą $k'_1 = \bar{k}'_1$, na której leżą pozostałe punkty przecięcia się stożkowych c' i $\bar{c}'$: $III' = \bar{III}'$ oraz $IV' = \bar{IV}'$.

3.3.3. Inwersja jako szczególny przypadek związku $/A_0/$

Rozważmy taki przypadek płaskiego związku akolineacji środkowo-osiowej, w którym środek akolineacji W' jest środkiem osi t'. Przyjmijmy dowolną prostą $q' \in \omega'$ incydentną z punktem W' i rozpatrzmy szereg punktów układu ω' o podstawie q': $q'(A', B', C' \ldots)$.

Z rozważań ustępu 3.3 wiadomo, że utworem przyporządkowanym w obrazie ω'_p szeregowi (q') będzie szereg $q'_p(A'_p, B'_p, C'_p \ldots)$, przy czym $q' = q'_p$, $(q') \bar{\wedge} (q'_p)$.
Zauważmy, że z przyjęcia środkowego względem punktu W' położenia osi akolineacji t' wynika równoległość płaszczyzny układu ω do płaszczyzny rzutów π. Konsekwencją takiego założenia jest przyporządkowanie:

a) punktowi $G'_p = W'$ obrazu ω'_p - prostej s'^{∞} układu ω'

$$s'^{\infty} = \omega\pi$$

b) punktowi $F' = W'$ układu ω' - prostej f'^{∞}_p obrazu ω'_p

$f'^{\infty}_p = \varphi\pi$ (φ jako płaszczyzna styczna do paraboloidy Π w jej środku S^{∞} jest płaszczyzną niewłaściwą por. ust.3).

Wynika stąd: $s'^{\infty} = f'^{\infty}_p$

Przyjmijmy:

$$q' \cdot s'^{\infty} = G'^{\infty}$$
$$q'_p \cdot f'^{\infty}_p = F'^{\infty}_p$$

Ponieważ: $G'^{\infty} = F'^{\infty}_p$, zatem w szeregach

$$q'(A', B', C' \ldots F' = W', G'^{\infty}) \bar{\wedge}\ q'_p(A'_p, B'_p, C'_p \ldots F'^{\infty}_p, G'_p = W')$$

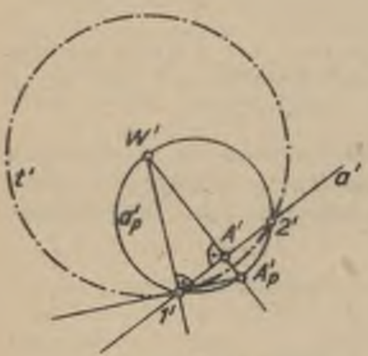
istnieje para elementów zamiennych ($F' = G'_p$, $G'^{\infty} = F'^{\infty}_p$).

Szeregi (q') i (q'_p) tworzą więc inwolucję. Punktami zjednoczonymi szeregu inwolucyjnego $q'-q'_p(A'A'_p, B'B'_p...)$ są punkty przecięcia prostej $q'-q'_p$ z osią akolineacji $- T'=T'_p$, $U'=U'_p$. Wynika stąd harmoniczność czwórek:

$$(A'A'_p T'U') = (B'B'_p T'U') = -1 \quad ,$$

co oznacza, że punkty $A', B'...$ układu ω' i punkty $A'_p, B'_p...$ obrazu ω'_p - odpowiadają sobie w przekształceniach przez promienie odwrotne czyli inwersję [7].
Możemy więc stwierdzić, że inwersja stanowi szczególny przypadek płaskiego związku akolineacji środkowo-osiowej $/A_0/$.

W oparciu o rys. 26 przeprowadzić można inny jeszcze dowód powyższego związku. Rozważmy układ ω' i obraz ω'_p złączone takim związkiem akolineacji środkowo-osiowej $/A_0/$ w którym oś jest okręgiem t' o środku zjednoczonym z środkiem akolineacji W'. Przyjmijmy dowolny punkt $A' \in \omega'$ i skonstruujmy przyporządkowany mu punkt $A'_p \in \omega'_p$. W tym celu obierzmy prostą a' przechodzącą przez A' prostopadle do $W'A'$. Punkty $1'$, $2'$, w których a' przecina oś akolineacji t' oraz punkt W' wyznaczają okrąg a'_p przyporządkowany w obrazie ω'_p prostej a'. Punkt przecięcia prostą $W'A'$ okręgu a'_p (różny od W') jest szukanym, przyporządkowanym punktowi A' punktem A'_p.
Zauważmy, że: $A'_p 1' \perp W'1'$ jako ramiona kąta wspartego na średnicy okręgu a'_p. Wynika stąd, że prosta $A'_p 1'$ i analogicznie $A'_p 2'$ są stycznymi do okręgu t', czyli, że prosta a' jest biegunową punktu A'_p względem okręgu t'. Ponieważ z założenia $A' \in a'$ punkty $A' \div A'_p$ są sobie przyporządkowane w inwersji, co należało udowodnić [8].



Rys. 26

4. ZWIĄZEK AKOLINEACJI ŚRODKOWEJ W PRZESTRZENI

Przyjmijmy dowolny punkt W i nieincydentną z nim, niezdegenerowaną kwadrykę Ω.

Rozważmy związek zachodzący pomiędzy przestrzenią Σ i przestrzenią Σ_p, w którym:

1) Każdej płaszczyźnie $\alpha \in \Sigma$ nieprzechodzącej przez punkt W przyporządkowana jest w przestrzeni Σ_p dokładnie jedna, incydentna z punktem W kwadryka α_p należąca do pewnego zbioru (K) i odwrotnie - każdej kwadryce $\mu_p \in \Sigma_p$ zbioru (K) przyporządkowana jest dokładnie jedna płaszczyzna μ przestrzeni Σ. Kwadryki zbioru (K) mogą być zniekształcone. Każdej płaszczyźnie π przestrzeni Σ incydentnej z punktem W przyporządkowana jest zjednoczona z nią płaszczyzna π_p przestrzeni Σ_p.

2) Układowi płaskiemu $\omega \in \Sigma$ o podstawie α przyporządkowany jest układ $\omega_p \in \Sigma_p$ o podstawie $\Pi = \alpha_p$ akolineacyjny z nim w związku $/A_\omega\pi/$ o środku W.

3) Zbiór przyporządkowanych samym sobie punktów wspólnych przestrzeni Σ i Σ_p leży na kwadryce Ω; wynika stąd, że przyporządkowane sobie utwory obydwu przestrzeni np. płaszczyzna $\alpha \in \Sigma$ i kwadryka $\alpha_p \in \Sigma_p$ przecinają się w utworach przynależnych do kwadryki Ω.

Związek łączący przestrzeń Σ z przestrzenią Σ_p o własnościach 1÷3 nazwijmy związkiem akolineacji środkowej przestrzeni lub przestrzennym związkiem akolineacji środkowej i oznaczmy symbolem $/A^3/$

Punkt W zgodnie z dotychczasową terminologią nazwijmy środkiem związku $/A^3/$, a proste wiązki (W) - promieniami akolineacji. Kwadrykę Ω nazwijmy kwadryką podstawową lub zjednoczoną przestrzennego związku akolineacji środkowej $/A^3/$.

Zauważmy, że przekrój przestrzeni Σ i Σ_p dowolną płaszczyzną π_i incydentną z środkiem W wyznacza układ $\omega_i = \pi_i \Sigma$ i obraz $\omega_{ip} = \pi_i \Sigma_p$ złączone z sobą płaskim związkiem akolineacji środkowo-osiowej $/A_\pi/_i$. W związku tym środkiem jest punkt W a osią t_i - stożkowa przekroju kwadryki podstawowej Ω płaszczyzną π_i. Relacja ta jest oczywista, gdyż z własności 1÷3 związku $/A^3/$ wynikają dla przekrojów płaszczyzną π_i własności definiujące związek $/A_\pi/_i$.
Można stwierdzić również zależność odwrotną. Jeżeli przekrój dwóch przestrzeni Σ i Σ_p dowolną płaszczyzną wiązki (W) - π_i wyznacza taki układ $\omega_i = \pi_i \Sigma$ i obraz $\omega_{ip} = \pi_i \Sigma_p$, w których zachodzi płaski związek akolineacji środkowo-osiowej $/A_\pi/_i$ o środku W i osi t_i, przy czym wszystkie osie t_i związków $/A_\pi/_i$ leżą na jednej kwadryce Ω - przestrzenie Σ i Σ_p są sobie przyporządkowane w przestrzennym związku akolineacji środkowej $/A^3/$ o środku W i kwadryce podstawowej Ω. Należy tylko jeszcze dodatkowo założyć, że w przestrzeniach Σ i Σ_p jest zachowana relacja przynależności.

Zauważmy bowiem, że:

a) Własność 3) związku $/A^3/$ jest konsekwencją warunku przynależności osi t_i wszystkich związków $/A_\pi/_i$ do jednej kwadryki Ω. Ponieważ w każdej płaszczyźnie π_i wiązki (W) zbiór wszystkich punktów zjednoczonych układów akolineacyjnych $\omega_i \in \Sigma$ i $\omega_{ip} \in \Sigma_p$ tworzy stożkową t_i - kwadryka Ω jest istotnie miejscem geometrycznym punktów zjednoczonych przestrzeni Σ i Σ_p.

b) Dla okazania własności 1) związku $/A^3/$ wystarczy rozważyć dowolną płaszczyznę α (W non$\in \alpha$) i przecięcie jej wiązką płaszczyzn π_i.

Przyjmijmy: $\pi_1 \cdot \alpha = a_1$, $\pi_2 \alpha = a_2$.
Prostym a_1, a_2 ,... w związkach $/A_\pi/_1$, $/A_\pi/_2$, przyporządkowane są odpowiednie stożkowe a_{1p} , a_{2p} ... Punkty wspólne: $a_1 a_{1p}$, $a_2 a_{2p}$ będące elementami osi t_1 , t_2 zgodnie z założeniem leżą na jednej kwadryce, a zatem, jako incydentne z płaszczyzną α - na jednej stożkowej t_a. Zauważmy, że stożkowe a_{1p} , a_{2p} i t_a posiadające z sobą sześć punktów wspólnych wyznaczają dokładnie jedną kwadrykę α_p .Na kwadryce tej leżą wszystkie stożkowe a_{ip} akolineacyjne w związkach $/A_\pi/_i$ z prostymi płaszczyzny α , gdyż każda z nich przecina się z stożkowymi a_{1p} i a_{2p} (obrazy prostych $a_i \in \alpha$ przecinających się),przechodzi przez punkt W i przecina się z osią t_a w rzeczywistych lub urojonych dwu punktach. Wynika stąd, że kwadryka α_p jest obrazem płaszczyzny α, czyli, że własność 1) związku $/A^3/$ jest spełniona.

c) Własność 2) związku $/A^3/$ wynika z rozważań przeprowadzonych w punktach a) i b).
Na podstawie powyższych uwag wprowadzić można następujące określenie:

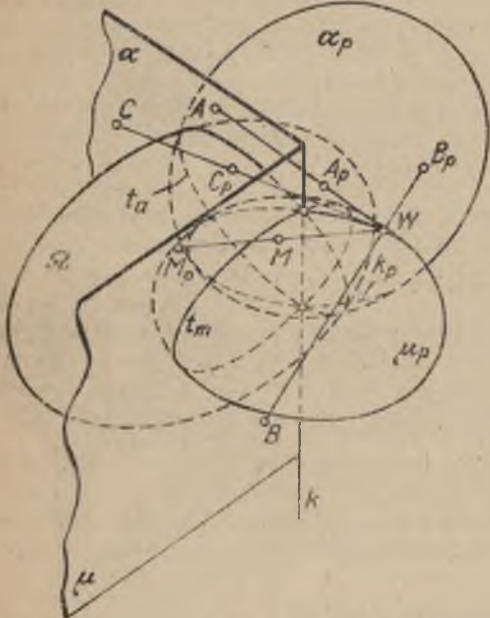
Definicja 7.

Dwie przestrzenie nazywamy środkowo-akolineacyjnymi w związku $/A^3/$ o środku W i kwadryce podstawowej Ω , jeżeli ich przekroje dowolną płaszczyzną π_i wiązki (W) są złączone płaskim związkiem akolineacji środkowo-osiowej $/A_\pi/_i$ o środku W i osi $t_i = \pi_i \Omega$, a relacja przynależności w przyporządkowanych sobie utworach jest zachowana.

4.1. Elementy określające związek $/A^3/$

1) Niech dane będą trzy niewspółpłaszczyznowe pary przyporządkowanych sobie punktów: AA_p, BB_p, CC_p i kwadryka podstawowa Ω. Wykażemy, że elementy te określają jednoznacznie akolineacyjne w związku $/A^3/$ przekształcenie przestrzeni w siebie. Weźmy w tym celu pod uwagę płaszczyznę $\alpha = ABC$ (rys. 27) i przyporządkowaną jej kwadrykę α_p przechodzącą przez stożkową $t_a = \alpha\Omega$, incydentną z punktami A_p, B_p, C_p i $W = AA_p \cdot BB_p$.
Rozważmy dowolny punkt M non$\in \alpha$ przestrzeni Σ .

Aby wyznaczyć przyporządkowany punkt M_p przestrzeni Σ_p wprowadźmy dowolną płaszczyznę μ $(M\in\mu)$ i skonstruujmy przyporządkowaną jej kwadrykę μ_p. Zgodnie z własnościami związku $/A^3/$ kwadryka μ_p przechodzi przez stożkową $t_m = \mu\Omega$, punkt W i przez stożkową $k_p \in \alpha_p$ przyporządkowaną krawędzi $k = \mu\alpha$. Punkt przebicia kwadryki μ_p promieniem WM jest szukanym punktem M_p. Łatwo stwierdzić, że położenie punktu M_p nie zależy od sposobu przyjęcia płaszczyzny μ. Załóżmy bowiem, że w miejsce μ przyjmujemy inną płaszczyznę μ_1 incydentną z punktem M. Kwadryka μ_{1p} konstruowana analogicznie jak kwadryka μ_p przynależy do stożkowej $t_{m_1} = \mu_1\Omega$, punktu W i stożkowej $k_{1p} \in \alpha_p$ przyporządkowanej krawędzi $k_1 = \mu_1\alpha$.



Rys. 27

Zauważmy, że zgodnie z własnością 1) związku $/A^3/$ i zawartym w własności 2) warunkiem zachowania przynależności, kwadryki μ_p i μ_{1p} przenikają się w stożkowej. Stożkowa ta, $l_p = \mu_p\mu_{1p}$ jest utworem przyporządkowanym w przestrzeni Σ_p krawędzi $(l = \mu\mu_1) \in \Sigma$. Rozważany punkt M_p leży na l_p, gdyż krawędź l z założenia przechodzi przez punkt M. Wnioskujemy więc, że przyporządkowanie punktu M_p punktowi M jest niezależne od sposobu konstrukcji, czyli, że przyjęte na wstępie dane określają istotnie jednoznacznie akolineacyjne przekształcenie przestrzeni w siebie.

Z dalszych elementów określających przestrzenny związek akolineacji środkowej $/A^3/$ wymienić można:

2) Kwadrykę podstawową Ω, dowolną kwadrykę $\alpha_p \in \Sigma_p$ przenikającą się z kwadryką Ω w stożkowej oraz parę przyporządkowanych sobie punktów $C_p \in \Sigma_p$ i $C \in \Sigma$, (płaszczyzna $\alpha \in \Sigma$ przyporządkowana kwadryce α_p jest jednoznacznie określona jako płaszczyzna stożkowej przenikania $\alpha_p\Omega$; zgodnie z warunkiem przynależności $W \in \alpha_p$, prosta CC_p winna być tak przyjęta, aby przebijała kwadrykę α_p w punktach rzeczywistych).

3) Dwie przenikające się w rzeczywistej stożkowej kwadryki α_p i β_p, przyporządkowane im płaszczyzny α i β oraz para przyporządkowanych sobie punktów $C_p \in \Sigma_p$ i $C \in \Sigma$ z zachowaniem warunków:

a) $k = \alpha\beta$ i $k_p = \alpha_p \beta_p$ - współpłaszczyznowe, C non $\in k$, C_p non $\in k_p$,
b) prosta CC_p posiada z stożkową k_p co najmniej jeden rzeczywisty punkt wspólny.

Podobnie jak w ustępie 3.1 rozpatrzmy jeszcze elementy określające szczególny przypadek przestrzennego związku akolineacji środkowej $/A_o^3/$, w którym niezdegenerowanym obrazem płaszczyzny jest zawsze sfera, a niezniekształconą stożkową przestrzeni Σ_p przyporządkowaną prostej - okrąg. W przypadku tym omówione wyżej warunki ustalające związek $/A_o^3/$ równoważne są przyjęciu:

I) sfery podstawowej Ω i pary różnych, przyporządkowanych sobie punktów $A \in \Sigma$, $A_p \in \Sigma_p$ nieleżących na sferze Ω;

Ia) sfery podstawowej Ω i środka akolineacji W;

Ib) czterech niewspółpłaszczyznowych par przyporządkowanych sobie punktów AA_p, BB_p, CC_p, DD_p z wykluczeniem współpłaszczyznowości czwórki $ABCD$.

IIIa) dwóch przenikających się w rzeczywistym okręgu k_p sfer α_p, β_p przestrzeni Σ_p, przyporządkowanych im w przestrzeni Σ płaszczyzn α, β oraz środka akolineacji $W \in k_p$ (w określeniu przyporządkowania α_p i α oraz β_p i β zawarty jest warunek współpłaszczyznowości krawędzi $k = \alpha\beta$ z okręgiem $k_p = \alpha_p \beta_p$);

IIIb) jednej sfery $\alpha_p \in \Sigma_p$ i przyporządkowanej jej płaszczyzny $\alpha \in \Sigma$ oraz jednej pary przyporządkowanych sobie punktów $B_p \in \Sigma_p$ B_p non $\in \alpha_p$, $B \in \Sigma$, B non $\in \alpha$, z warunkiem istnienia rzeczywistych punktów wspólnych $\alpha_p \cdot BB_p$.

4.2. Niezmienniki przestrzennego związku akolineacji środkowej $/A^3/$

Uwzględniając własność 2) przestrzennego związku akolineacji środkowej (por. ust. 4) oraz definicję 7 stwierdzić można, że niezmiennikami przekształcenia utworów płaskich przestrzeni Σ w przyporządkowane im w związku $/A^3/$ utwory przestrzeni Σ_p są przynależność i rzutowość (por. ust. 2.2 i 3.2).

Rozpatrzmy cechy niezmienne utworów trójwymiarowych przynależnych do przestrzeni Σ i przyporządkowanych im w związku $/A^3/$ obrazów w przestrzeni Σ_p.

Pękowi płaszczyzn przestrzeni Σ : $l(\alpha,\beta,\gamma..)$ przyporządkowany jest pęk powierzchni $l_p(\alpha_p,\beta_p,\gamma_p..)$ opisanych na stożkowej l_p.
Rozpatrzmy pęki:

$$l_1(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\dots)\ \bar{\wedge}\ l_2(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$$

i przyporządkowane im obrazy:

$$l_{1p}(\alpha_{1p},\beta_{1p},\gamma_{1p}\dots)\ ;\quad l_{2p}(\alpha_{2p},\beta_{2p},\gamma_{2p}\dots)$$

Ponieważ przekrój tych utworów dowolną płaszczyzną π incydentną z środkiem W daje pęki:

$$L_1(a_1,b_1,c_1\dots)\ \bar{\wedge}\ L_2(a_2,b_2,c_2\dots)$$

i

$$L_{1p}(a_{1p},b_{1p},c_{1p}..)\ ;\quad L_{2p}(a_{2p},b_{2p},c_{2p}\dots),$$

przy czym: $(L_{1p})\bar{\wedge}(L_{2p})$ (ust. 3.2) - na podstawie perspektywiczności

$$(l_{1p})\ \bar{\bar{\wedge}}\ (L_{1p}),\qquad (l_{2p})\ \bar{\bar{\wedge}}\ (L_{2p})$$

wnosimy, że zachodzi:

$$(l_{1p})\ \bar{\wedge}\ (l_{2p})$$

W analogiczny sposób dowodzi się, że obrazami wiązek przestrzeni Σ : $(P_1)\bar{\wedge}(P_2)$ są rzutowe wiązki kwadryk i stożkowych przestrzeni Σ_p : $(P_{1p})\bar{\wedge}(P_{2p})$.
Na podstawie powyższych rozważań oraz określenia związku $/A^3/$ (por. ust. 4) stwierdzić można, że rzutowość i relacja przynależności są niezmiennikami omawianego, akolineacyjnego przekształcenia $/A^3/$ przestrzeni Σ w przestrzeń Σ_p x)

x) Z uwzględnieniem marginesowych uwag ze str. 10 i 19.

4.3. Szczególny przypadek przestrzennego związku akolineacji środkowej - $/A_o^3/$

4.3.1. Własności związku $/A_o^3/$

W ustępie 4.1 omówiono warunki określające szczególny przypadek przestrzennego związku akolineacji środkowej $/A_o^3/$, w którym obrazami płaszczyzn i prostych przynależnych do przestrzeni Σ są odpowiednio sfery i okręgi należące do przestrzeni Σ_p. Z uwagi na możliwość wykorzystania tego związku w niektórych zadaniach konstrukcyjnych geometrii wykreślnej (por. ust. 4.3.2) rozpatrzmy szczegółowo niektóre jego własności.

1) Punktowi $G_p = W$ obrazu Σ_p przyporządkowana jest w przestrzeni Σ płaszczyzna σ. Płaszczyzna ta jest miejscem geometrycznym krawędzi przecięcia się płaszczyzn przestrzeni Σ - α, β, ... z płaszczyznami stycznymi w punkcie W do obrazów α_p, β_p ... . Własność powyższa wynika stąd, że w każdym przekroju przestrzeni Σ i Σ_p płaszczyzną incydentną z punktem W ma miejsce szczególny przypadek płaskiego związku akolineacji środkowo-osiowej - $/A_o/$ - (por. ust. 3.3.1)

2) Punktowi $S = W$ przestrzeni Σ przyporządkowana jest w obrazie Σ_p płaszczyzna niewłaściwa $\varphi^\infty \in \Sigma_p$.

3) Płaszczyźnie $\omega \in W, \omega \in \Sigma$ przyporządkowana jest w przestrzeni Σ_p zjednoczona z nią płaszczyzna $\omega_p = \omega$. Poszczególne punkty płaszczyzny ω są różne od swoich obrazów z wyjątkiem tych, które leżą na sferze podstawowej Ω, tj. na stożkowej $t = \omega\Omega$.

4) Sfera podstawowa i sfera graniczna są współśrodkowe. Sfera graniczna ν_p zawiera wszystkie te punkty przestrzeni Σ_p, którym przyporządkowane są punkty niewłaściwe przestrzeni Σ, ν_p jest więc obrazem płaszczyzny niewłaściwej $\nu^\infty \in \Sigma$.

5) Dowolnej sferze $\gamma_p \in \Sigma_p$ przyporządkowana jest akolineacyjnie w związku $/A_o^3/$:

a) płaszczyzna γ - jeżeli $W \in \gamma_p$

b) kwadryka γ - jeżeli W non $\in \gamma_p$

Przyporządkowanie a) jest konsekwencją definicji związku $/A_o^3/$. Przyporządkowanie b) wynika z własności płaskiego związku akolineacji środkowo-osiowej $/A_o/$ oraz z własności związku akolineacji środkowo-osiowej układów o różnych podstawach $/A_{\omega\pi}/$.

Zauważmy bowiem, że zgodnie z własnością 5) związku $/A_o/$ (ust. 3.3.1) każda płaszczyzna przechodząca przez środek W przecina utwór γ przyporządkowany sferze γ_p w stożkowej. Wprowadzając dowolną płaszczyznę ϱ nieincydentną z punktem W stwierdzamy, że przekrój $c=\varrho\gamma$ jest również stożkową[x]. Wynika stąd, że każda płaszczyzna przecina utwór γ w stożkowej, czyli utwór ten jest kwadryką [5]. Typ kwadryki γ zależy od położenia sfery γ_p względem sfery granicznej związku $/A_o^3/$, a w szczególności:

α) w przypadku przenikania się sfery γ_p z sferą graniczną ν_p w rzeczywistym okręgu n_p – kwadryka γ posiada niezdegenerowaną stożkową niewłaściwą n^∞, jest zatem hiperboloidą.

β) w przypadku styczności sfery γ_p z sferą graniczną ν_p – kwadryka γ posiada jeden punkt niewłaściwy, jest więc paraboloidą.

γ) w przypadku braku rzeczywistych punktów wspólnych sfer γ_p i ν_p – kwadryka γ nie posiada żadnego punktu rzeczywistego niewłaściwego, jest więc elipsoidą.

6) Dowolnej płaszczyźnie $\gamma_p \in \Sigma_p$ przyporządkowana jest akolineacyjnie w związku $/A_o^3/$:

a) płaszczyzna $\gamma=\gamma_p$ – jeżeli $W \in \gamma_p$

b) kwadryka γ – jeżeli W non $\in \gamma_p$

Przyporządkowanie a) wynika z własności 1) związku $/A_o^3/$. Przyporządkowanie b) wyprowadzić można z następującego rozumowania. Każda płaszczyzna π_i wiązki (W) przecina przestrzenie Σ i Σ_p w układzie płaskim ω_i i jego obrazie ω_{ip} złączonych związkiem akolineacji środkowo-osiowej $/A_o/_i$. Prostej $c_{ip}=\pi_i\gamma_p$ nieprzechodzącej przez punkt W przyporządkowana jest zgodnie z własnością 6) związku $/A_o/$ stożkowa $c_i=\pi_i\gamma$ (ust. 3.3.1).

Wprowadźmy dowolną płaszczyznę ϱ nieincydentną z środkiem W i przyporządkowaną jej w związku $/A_o^3/$ sferę ϱ_p. Sfera ϱ_p przecina się z płaszczyzną γ_p w okręgu $r_p=\varrho_p\gamma_p$. Okręgowi r_p przyporządkowana jest krzywa $r=\varrho\gamma$. Promienie akolineacji wiążącej okrąg r_p z krzywą r tworzą powierzchnię stożkową Γ. Wynika stąd, że r jako przekrój tej powierzchni płaszczyzną ϱ jest stożkową.
Ponieważ zarówno płaszczyzny π_i jak i ϱ_i przecinają utwór γ w stożkowych wnosimy, że utwór ten jest kwadryką.

---

x) W dowodzie wystarczy rozważyć kwadrykę ϱ_p akolineacyjną z płaszczyzną ϱ i jej linię przenikania z sferą γ_p: $c_p=\varrho_p\gamma_p$. Pomiędzy krzywymi c i c_p zachodzi związek akolineacji środkowo-osiowej układów o różnych podstawach $/A_{o\pi}/$, w którym: $\omega=\varrho$, $\Pi=\varrho_p$. Ponieważ c_p jest okręgiem – krzywa c musi być stożkową (jako przekrój powierzchni stożkowej, której kierującą jest okrąg c_p).

7) Twierdzenie 6

Istnieje przestrzenny związek akolineacji środkowej $/A_0^3/$ przekształcający dowolną kwadrykę krzywoliniową Φ w sferę Φ_p.

Dowód.

Rozważmy dowolną kwadrykę krzywoliniową Φ, opisany na niej stożek obrotowy Γ i dowolną, wpisaną w stożek Γ sferę Φ_p.
Wprowadźmy oznaczenia:

W - wierzchołek stożka Γ

g - stożkowa styczności kwadryki Φ do stożka Γ,

g_p - okrąg styczności sfery Φ_p do stożka Γ.

Rozpatrzmy przestrzenny związek akolineacji środkowej $/A_0^3/$, w którym:

a) środkiem W jest wierzchołek stożka Γ,

b) płaszczyźnie γ stożkowej g przyporządkowana jest incydentna z okręgiem g_p i punktem W sfera γ_p,

c) punkty $B\in\Phi$ i $B_p\in\Phi_p$ leżące na dowolnej prostej przechodzącej przez środek W stanowią parę punktów przyporządkowanych (z dwu punktów przebicia sfery Φ_p promieniem WB wybieramy jeden dowolnie).

Zgodnie z uwagami ust. 4.1 związek $/A_0^3/$ jest przez powyższe założenia jednoznacznie określony. Udowodnimy, że realizuje on przekształcenie kwadryki Φ w sferę Φ_p.

Zauważmy, że konsekwencją założeń a) ÷ c) są relacje:

d) stożkowej $g\in\Sigma$ przyporządkowany jest okrąg $g_p\in\Sigma_p$ (zgodnie z warunkiem zachowania przynależności);

e) dowolnej płaszczyźnie β przechodzącej przez punkt B i dowolny punkt $M\in g$ przyporządkowana jest określona sfera β_p przechodząca przez środek W, punkt B_p i punkt $M_p\in g_p$ przyporządkowany punktowi M;

f) okręgi $t_g=\gamma\gamma_p$ i $t_b=\beta\beta_p$ definiują sferę podstawową Ω związku $/A_0^3/$.

Dowód przeprowadzimy wykazując, że przekrój utworów Φ i Φ_p każdą płaszczyzną π_i wiązki (W) wyznacza stożkowe $c_i=\pi_i\Phi$ i $c_{ip}=\pi_i\Phi_p$ akolineacyjne w płaskim związku $/A_0/_i$, którego środkiem jest punkt W, a osią - okrąg t_i leżący na sferze Ω: $t_i=\pi_i\cdot\Omega$.

Weźmy pod uwagę przekrój kwadryki Φ i sfery Φ_p dowolną płaszczyzną pęku (WB) - π_1. Zgodnie z dowodem twierdzenia 1 (por. ust. 3.3.1) stożkowe $c_1=\pi_1\cdot\Phi$ i $c_{1p}=\pi_1\Phi_p$ są sobie przyporządkowane w pewnym płaskim związku akolineacji środkowo-osiowej $/A_0/_1$.

Przyjmijmy, że punkt W jest środkiem tego związku, a punkty B i B_p punktami przyporządkowanymi. Skonstruujmy oś związku - okrąg t_1. Zauważmy, że punkty $M_1, \bar{M}_1 = \pi_1 g$ i $M_{1p}, \bar{M}_{1p} = \pi_1 g_p$ są parami sobie przyporządkowane w związku $/A_0/_1$. Wynika stąd, że prostej $BM_1 = m_1$ przyporządkowany jest okrąg $m_{1p}(B_p, M_{1p}, W)$, a prostej $B\bar{M}_1 = \bar{m}_1$ - okrąg $\bar{m}_{1p}(B_p, \bar{M}_{1p}, W)$. Punkty $1,2 = m_1 m_{1p}$ oraz $3,4 = \bar{m}_1 \bar{m}_{1p}$ są elementami osi t_1.

Poprowadźmy przez prostą BM_1 dowolną płaszczyznę β_1, a przez prostą $B\bar{M}_1$ - dowolną płaszczyznę $\bar{\beta}_1$. Stożkowe przecięcia się tych płaszczyzn z przyporządkowanymi im sferami β_{1p} i $\bar{\beta}_{1p}$: $t_{b1} = \beta_1 \beta_{1p}$, $\bar{t}_{b1} = \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_{1p}$ leżą zgodnie z relacją f) na sferze podstawowej Ω związku $/A_0^3/$. Ponieważ: $(1,2) \in t_{b1}$, $(3,4) \in \bar{t}_{b1}$ - oś t_1 związku akolineacji płaskiej $/A_0/_1$, leży również na sferze podstawowej Ω związku $/A_0^3/$.

Dowód można by uważać za niezupełny, gdyż dotyczy on tylko płaszczyzn pęku (WB). Zauważmy jednak, że dysponując związkami $/A_0/_i$ możemy obrać dowolną inną parę punktów $\bar{B} \in \Phi$, $\bar{B}_p \in \Phi_p$ przyporządkowanych sobie w związku $/A_0^3/$ i przeprowadzić podobne rozumowanie dla przekroju kwadryki Φ i sfery Φ_p dowolną płaszczyzną pęku $(W\bar{B})$. Oznacza to, że każdej płaszczyźnie π_i wiązki (W) można stwierdzić związek $/A_0/_i$ łączący $c_i = \pi_i \Phi$ i $c_{ip} = \pi_i \Phi_p$, którego środkiem jest środek związku $/A_0^3/$, a osią - okrąg przekroju płaszczyzną π_i sfery podstawowej Ω, co należało udowodnić.

8) Twierdzenie 7.

Istnieje związek $/A_0^3/$ akolineacyjnie przekształcający dowolną kwadrykę krzywoliniową Φ w płaszczyznę Φ_p.

Dowód.

Ponieważ przekrój utworów Φ i Φ_p dowolną płaszczyzną π_i przechodzącą przez środek związku $/A_0^3/$ winien dać akolineacyjne w płaskim związku $/A_0/_i$ stożkową $c_i = \pi_i \Phi$ i prostą $c_{ip} = \pi_i \Phi_p$, przeto styczne s_i w punkcie W do kwadryki Φ (jako styczne do stożkowych c_i) winny być równoległe do płaszczyzny Φ_p.

Wynika stąd, że środkiem przestrzennego związku akolineacji $/A_0^3/$, przyporządkowującego dowolnej kwadryce krzywoliniowej Φ płaszczyznę Φ_p może być tylko punkt styczności do tej kwadryki płaszczyzny $\sigma \parallel \Phi_p$.
Ponadto z warunku przynależności do sfery podstawowej Ω zbioru punktów $f = \Phi \Phi_p$ wynika, że zbiór ten jest okręgiem. Warunkiem zatem przekształcenia dowolnej kwadryki Φ w płaszczyznę Φ_p jest takie przyjęcie płaszczyzny Φ_p, aby równoległa do niej płaszczyzna σ była styczna do powierzchni Φ w punkcie pępkowym.
Przyjmijmy spełniające powyższy warunek: kwadrykę Φ, płaszczyznę Φ_p i płaszczyznę $\sigma \parallel \Phi_p$ styczną do Φ w punkcie W.

Rozważmy związek $/A_0^3/$ określony środkiem W i czteroma parami przyporządkowanych sobie punktów: $(B,C,D,E) \in \Phi$; $(B_p, C_p, D_p, E_p) \in \Phi_p$ (z wykluczeniem współpłaszczyznowości czwórki $B\,C\,D,E$ – por. p. Ib (ust. 4.1). Płaszczyzny $\beta = BCD$, $\gamma = BCE$ oraz przyporządkowane im sfery $\beta_p(W,B_p,C_p,D_p)$ i $\gamma_p(W,B_p,C_p,E_p)$ wyznaczają okręgi $\beta\beta_p = t_b$, $\gamma\gamma_p = t_g$ ustalające kwadrykę podstawową Ω związku $/A_0^3/$.
Weźmy pod uwagę przekrój kwadryki Φ i płaszczyzny Φ_p płaszczyzną $\pi_1 = WBD$.

Zgodnie z dowodem twierdzenia 2 stożkowa $c_1 = \pi_1\Phi$ i prosta $c_{1p} = \pi_1\Phi_p$ są sobie przyporządkowane w płaskim związku akolineacji środkowo-osiowej $/A_0/_1$. Przyjmijmy, że środkiem tego związku jest punkt W. Wyznaczmy oś związku $/A_0/_1$ – okrąg t_1. W tym celu rozważmy proste $BD = m_1$ oraz $BP = \overline{m}_1$ gdzie P jest punktem przebicia płaszczyzny π_1 prostą CE $(P = CE\,\pi_1)$. Prostym tym w określonym wyżej związku $/A_0^3/$ przyporządkowane są okręgi: $m_{1p}(W,B_p,D_p)$ i $\overline{m}_{1p}(W,B_p,P_p)$ x) Punkty wspólne $1,2 = m_1 m_{1p}$ i $3,4 = \overline{m}_1\overline{m}_{1p}$ są elementami osi t_1 związku $/A_0/_1$. Zauważmy jednak, że: $m_1 = BD \in \beta$, $\overline{m}_1 = BP \in \gamma$. Wynika stąd, że punkty $1,2$ leżą na okręgu t_b , a punkty $3,4$ – na okręgu t_g , czyli, że przechodząca przez nie oś t_1 leży na sferze podstawowej Ω związku $/A_0^3/$.

Przeprowadźmy analogiczne rozumowanie dla płaszczyzny $\pi_2 = WBE$. Stożkowa $c_2 = \pi_2\Phi$ i prosta $c_{2p} = \pi_2\Phi_p$ są sobie przyporządkowane w płaskim związku akolineacji środkowej $/A_0/_2$, o środku W i osi t_2. Proste $BE = m_2$ i $BQ = \overline{m}_2$, gdzie Q jest punktem przebicia płaszczyzny π_2 prostą CD oraz przyporządkowane im okręgi $m_{2p}(W,B_p,E_p)$ i $\overline{m}_{2p}(W,B_p,Q_p)$ przecinają się w punktach $5,6 = m_2 m_{2p}$, $7,8 = \overline{m}_2\overline{m}_{2p}$ stanowiących elementy osi t_2. Ponieważ zachodzi: $BE \in \gamma$, $BQ \in \beta$ – przeto: $(5,6) \in t_g$, $(7,8) \in t_b$, czyli oś t_2 leży na sferze podstawowej Ω.
Stwierdziliśmy, że w płaszczyznach WBD i WBE przekroje kwadryki Φ i płaszczyzny Φ_p są złączone takimi związkami akolineacji $/A_0/_1$ i $/A_0/_2$, których środkiem jest punkt W , a osie leżą na sferze podstawowej Ω związku $/A_0^3/$.

Zauważmy, że stożkowe c_1 i c_2 (przyporządkowane prostym c_{1p} i c_{2p} wraz z punktem C definiują jednoznacznie kwadrykę Φ . Przyjmijmy z kolei dowolną płaszczyznę π_3 pęku o osi WC. Wprowadźmy oznaczenia $c_3 = \pi_3\Phi$, $c_{3p} = \pi_3\Phi_p$. $\pi_3\pi_1 = k$, $\pi_3\pi_2 = l$, $\pi_3 c_1 = K$, $\pi_3 \cdot c_2 = L$.
Płaszczyźnie $\pi_3 \in \Sigma$ przyporządkowana jest w związku $/A_0^3/$ zjednoczona z nią płaszczyzna $\pi_{3p} \in \Sigma_p$ $(\pi_{3p} = \pi_3)$, punktom $K \in c_1$, $L \in c_2$ odpowiadają punkty $K_p \in c_{1p}$, $L_p \in c_{2p}$ czyli $(K_p, L_p) \in \Phi_p$.

W płaszczyźnie π_3 zachodzi związek $/A_0/_3$ łączący stożkową przekroju kwadryki Φ – c_3 z prostą przekroju płaszczyzny Φ_p – c_{3p} . Wyznaczmy oś t_3 związku $/A_0/_3$ zakładając, że jego środkiem jest punkt W . W tym celu rozważmy proste: $m_3 = CK$, $\overline{m}_3 = CL$ i przyporządko-

---

x) Punkt P_p wyznacza się za pomocą promienia WP na okręgu $p_p(W,C_p,E_p)$ przyporządkowanym prostej $p = CE$.

wane im okręgi: $m_{3p}(W, C_p, K_p)$, $\overline{m}_{3p}(W, C_p, L_p)$. Wprowadźmy dowolną płaszczyznę $\varkappa \in \Sigma$ zawierającą prostą CK ($CK \in \varkappa$) oraz $\lambda \in \Sigma$ przechodzącą przez prostą CL. Płaszczyznom $\varkappa$ i λ przyporządkowane są w związku $/A_0^3/$ ściśle określone sfery $\varkappa_p$ i λ_p przestrzeni Σ_p, przy czym $(W, C_p, K_p) \in \varkappa_p$, $(W, C_p, L_p) \in \lambda_p$. Zgodnie z podstawową własnością związku $/A_0^3/$ okręgi wspólne $t_k = \varkappa\varkappa_p$ i $t_l = \lambda\lambda_p$ leżą na sferze podstawowej: $(t_k, t_l) \in \Omega$. Ponieważ proste $m_3, \overline{m}_3$ i okręgi $m_{3p}, \overline{m}_{3p}$ stanowią przekrój płaszczyzną π_3 płaszczyzn $\varkappa$, λ oraz przyporządkowanych im sfer $\varkappa_p$, λ_p wynika stąd, że punkty przecięcia $m_3 m_{3p} = 9,10$ i $\overline{m}_3 \overline{m}_{3p} = 11,12$ spełniają warunki: $(9,10) \in t_k$, $(11,12) \in t_l$ czyli oś $t_3(9,10,11,12)$ leży również na sferze podstawowej Ω związku $/A_0^3/$. Udowodniliśmy w ten sposób, że przekrój kwadryki Φ i płaszczyzny Φ_p dowolną płaszczyzną π_i pęku (WC) wyznacza stożkową c_i i prostą c_{ip} złączone takim związkiem płaskiej akolineacji $/A_0/_i$, którego środkiem jest punkt W a osią okrąg t_i przekroju sfery podstawowej płaszczyzną π_i. Zauważmy jednak, że dysponując związkiem $/A_0/_i$ w płaszczyznach pęku (WC), możemy obrać dowolną inną parę przyporządkowanych sobie punktów w związku $/A_0^3/$ np. $\overline{C}$, $\overline{C}_p$ i przeprowadzić analogiczne rozważanie dla przekroju kwadryki Φ i płaszczyzny Φ_c dowolną płaszczyzną pęku $(W\overline{C})$.

W rezultacie stwierdzamy, że każda płaszczyzna wiązki (W) przecina kwadrykę Φ i płaszczyznę Φ_p w przyporządkowanych sobie akolineacyjnie utworach, przy czym środkiem odnośnego związku $/A_0/$ jest środek związku $/A_0^3/$, a osią - okrąg przekroju sfery podstawowej Ω. Wniosek taki jest jednoznaczny z wykazaniem, że przestrzenny związek akolineacji środkowej $/A_0^3/$ określony środkiem W i przyporządkowaną sobie czwórką par punktów $(B, C, D, E) \in \Sigma$; $(B_p, C_p, D_p, E_p) \in \Sigma_p$ przyporządkowuje kwadryce Φ płaszczyznę Φ_p, a tym samym spełnia twierdzenie 7.

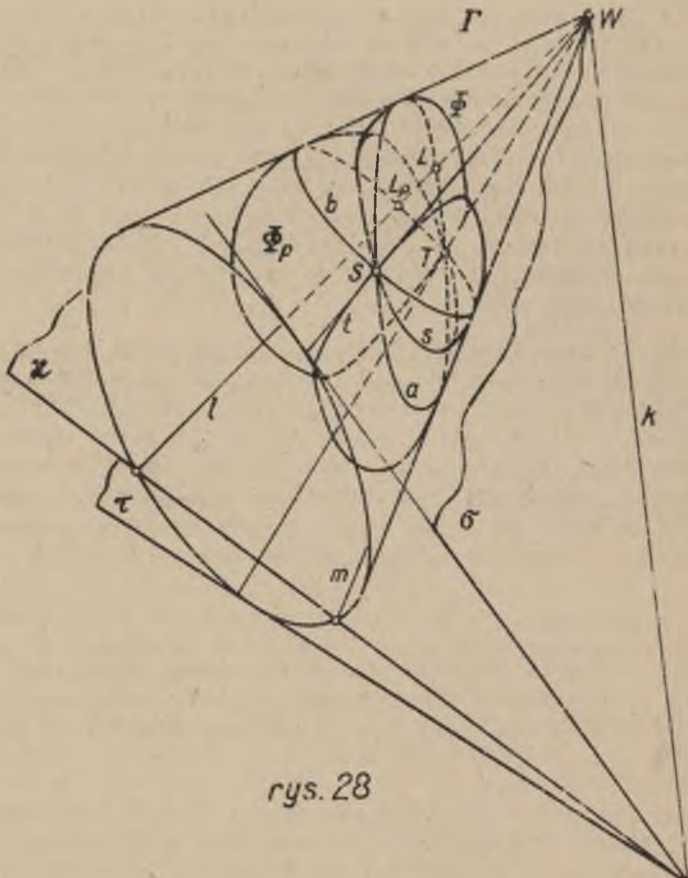
9) Twierdzenie 8.

Dla danej kwadryki krzywoliniowej Φ i danej sfery Φ_p istnieją co najwyżej cztery różne przestrzenne związki akolineacji środkowej $/A_0^3/$ przekształcające $\Phi \in \Sigma$ na $\Phi_p \in \Sigma_p$ i na odwrót.

Dowód.

Weźmy pod uwagę dowolną kwadrykę krzywoliniową Φ i sferę Φ_p (rys. 28). Jeżeli istnieje związek akolineacji środkowej przyporządkowujący sobie te utwory, to zauważmy, że istnieje wówczas stożek Γ opisany na powierzchni Φ i Φ_p. W przypadku tym ważne jest twierdzenie Monge'a [9] orzekające o rozpadzie linii przenikania się powierzchni Φ i Φ_p na dwie stożkowe. Wyznaczmy te stożkowe - okręgi s, t i skonstruujmy ich punkty przecięcia się - S, T. Wiadomo, że punkty S i T są punktami powierzchni Γ opisanej na kwadryce Φ i sferze Φ_p.

Wprowadźmy płaszczyzny σ i τ styczne w punktach S i T do obydwu przenikających się powierzchni. Płaszczyzny takie są jednocześnie styczne do powierzchni Γ, a zatem są incydentne z wierzchołkiem W. Dochodzimy w ten sposób do wniosku, że środek akolineacji $/A_0^3/ - W$ jako wierzchołek powierzchni Γ musi leżeć na krawędzi $k = \sigma\tau$ płaszczyzn wspólnie stycznych do kwadryki Φ i sfery Φ_ρ x).



Rys. 28

---

x) Warunek przynależności środka akolineacji W do prostej k można również wyprowadzić z następującego rozumowania. Zauważmy, że punkt W jest biegunem względem kwadryki Φ i Φ_ρ płaszczyzn stożkowych $a = \Phi\Gamma$ i $b = \Phi_\rho\Gamma$ - odpowiednio α i β. cd. - str. 55.

Rozważmy przekrój kwadryk Φ, Φ_p i Γ dowolną płaszczyzną $\varkappa$ przechodzącą przez krawędź k (rys. 28). Wprowadźmy oznaczenia: $\varkappa\Phi = c$, $\varkappa\Phi_p = c_p$, $\varkappa\Gamma = l, m$. Jest oczywiste, że tworzące l i m są styczne do stożkowych c i c_p. Zagadnienie ilości stożków Γ opisanych na powierzchni Φ i Φ_p sprowadza się w przekroju płaszczyzną $\varkappa$ do dyskusji ilości takich punktów $W_i \in k$, z których można poprowadzić proste l_i, m_i wspólnie styczne do stożkowych c i c_p. Z czworoboku zupełnego opisanego na stożkowych c i c_p (por. dowód twierdzenia 3) wnioskujemy, że co najwyżej 3 takie punkty leżeć mogą na jednej prostej, przy czym prosta taka jest wówczas bokiem czworoboku.

Zauważmy, że prosta k nie może być bokiem czworoboku opisanego na stożkowych c i c_p, gdyż byłaby ona wówczas tworzącą stożka Γ. Wynikałby stąd warunek zjednoczenia się płaszczyzn σ i τ, co przeczy założeniom o istnieniu dwóch różnych punktów podwójnych kwadryki Φ i Φ_p (S i T). Pozostaje możliwość przynależności do prostej k jedynie dwóch punktów W_i.
Zauważmy jednak, że dla tego samego środka W otrzymać można dwa różne związki $/A_0^3/$ w zależności od doboru pary przyporządkowanych sobie punktów spośród czterech punktów przebicia kwadryk jednym promieniem akolineacji.
Wynika stąd, że ilość przestrzennych związków akolineacji środkowej przekształcających daną kwadrykę krzywoliniową Φ w daną sferę Φ_p wynosi : $n \leqslant 4$.

10) Twierdzenie 9.

Dla danej kwadryki krzywoliniowej Φ i danej płaszczyzny Φ_p istnieją co najwyżej dwa związki akolineacji środkowo-osiowej $/A_0^3/$ przekształcające $\Phi \in \Sigma$ na $\Phi_p \in \Sigma_p$ i na odwrót.

Dowód.

Najkrótszy wydaje się dowód nie wprost w oparciu o twierdzenie 4. (ust. 3.3.1). Przyjmijmy bowiem np., że istnieje $n > 2$ związków $/A_0^3/$ realizujących przekształcenie krzywoliniowej kwadryki $\Phi \in \Sigma$ w płaszczyznę $\Phi_p \in \Sigma_p$. Dokonajmy przekroju utworów Φ i Φ_p płaszczyzną α przechodzącą przez trzy dowolne spośród n środki akolineacji W_1, W_2, W_3.

Jeżeli istnieje inny punkt $W_1 \in k$ będący wierzchołkiem stożka Γ_1 opisanego na kwadrykach Φ i Φ_p, wówczas stożkowe styczności tych kwadryk: $a_1 = \Phi\Gamma_1$, $b_1 = \Phi_p\Gamma_1$ przecinają się również w punktach S i T, a punkt W_1 musi być biegunem płaszczyzn: $\alpha_1 (a_1 \in \alpha_1)$, $\beta_1 (b_1 \in \beta_1)$ z uwagi na kwadryki Φ i Φ_p. Oznacza to, że prosta WW_1 winna być prostą sprzężoną z prostą ST względem kwadryk Φ i Φ_p. Warunki te spełnia właśnie prosta $k = \sigma\tau$, gdyż na niej leżą bieguny wszystkich stożkowych $a \in \Phi$ i $b \in \Phi_p$ przechodzących przez punkty S i T.

Zgodnie z własnością związku $/A_0^3/$ powinniśmy otrzymać trzy płaskie związki akolineacji środkowo-osiowej $/A_0/$ przekształcające stożkową $C=\alpha\Phi$ w prostą $C_p=\alpha\Phi_p$, co przeczy twierdzeniu 4, czyli wyklucza założenie $n>2$.

11) Twierdzenie 10.

Utworem przyporządkowanym w związku $/A_0^3/$ dowolnej krzywoliniowej kwadryce $\Phi\in\Sigma$ może być płaszczyzna, sfera lub powierzchnia rzędu czwartego: $\Phi_p\in\Sigma_p$.

Dowód.

Rozpatrzmy przekrój utworu $\Phi_1\in\Sigma_p$ dowolną płaszczyzną $\gamma_p\in\Sigma_p$. Z dowodu twierdzenia 7 wynika, że w związku $/A_0^3/$ płaszczyźnie γ_p przyporządkowana jest określona kwadryka krzywoliniowa γ (incydentna z środkiem W związku $/A_0^3/$). Kwadryka γ przenika się z kwadryką Φ w krzywej rzędu czwartego c. Utworem przyporządkowanym krzywej c jest krzywa c_p będąca rzutem środkowym z punktu W krzywej c na płaszczyznę γ_p. Jest nią w ogólnym przypadku również krzywa rzędu czwartego. Wynika stąd, że dowolna płaszczyzna γ_p przecina utwór przyporządkowany kwadryce Φ w krzywej rzędu czwartego, czyli, że utworem Φ_p jest powierzchnia rzędu czwartego.
Możliwość akolineacyjnego, w związku $/A_0^3/$, przekształcenia kwadryki Φ w sferę bądź płaszczyznę, czyli zdegenerowanie utworu Φ_p do sfery lub płaszczyzny rozstrzygają twierdzenia 6 i 7.

4.3.2. Zastosowanie związku $/A_0^3/$

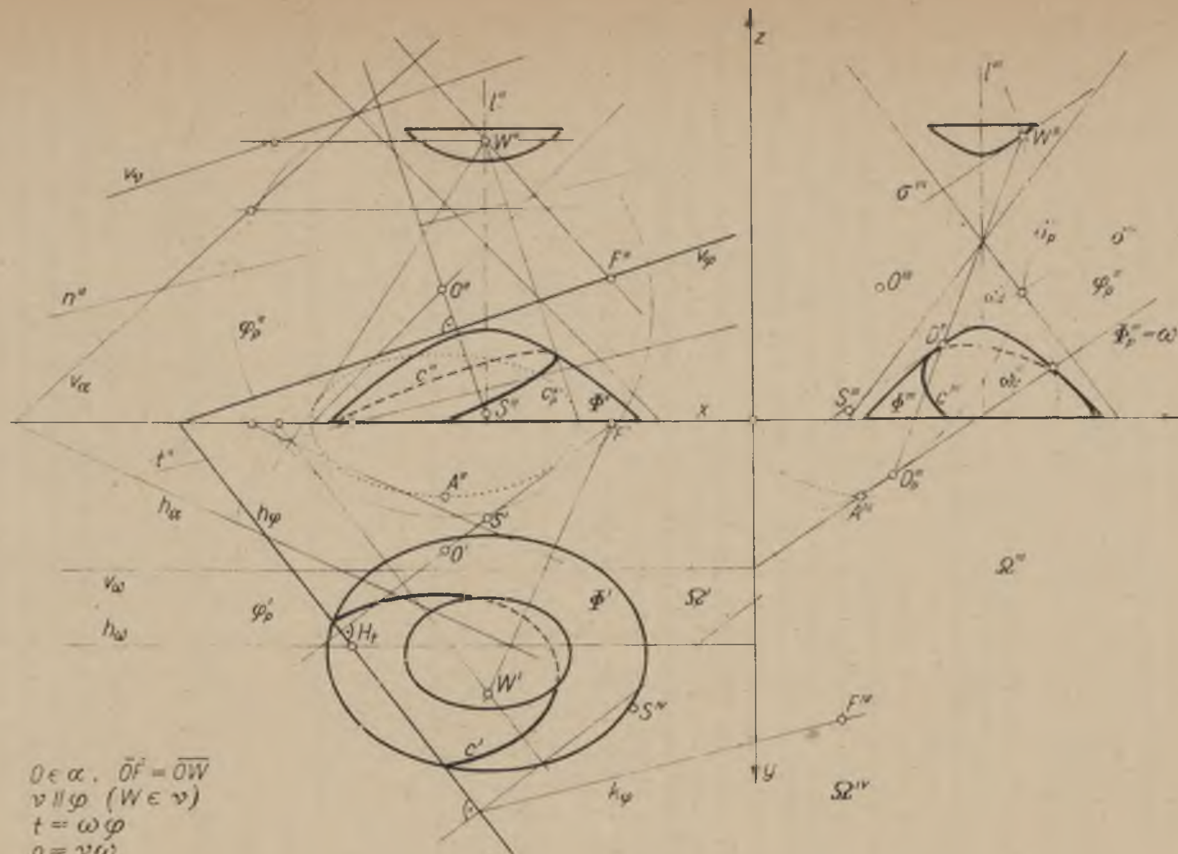
Podobnie jak w ustępie 3.3.2 wskazać można możliwość wykorzystania przestrzennego związku akolineacji środkowej $/A_0^3/$ do rozwiązania niektórych zadań dotyczących powierzchni stopnia drugiego.

Przykłady.

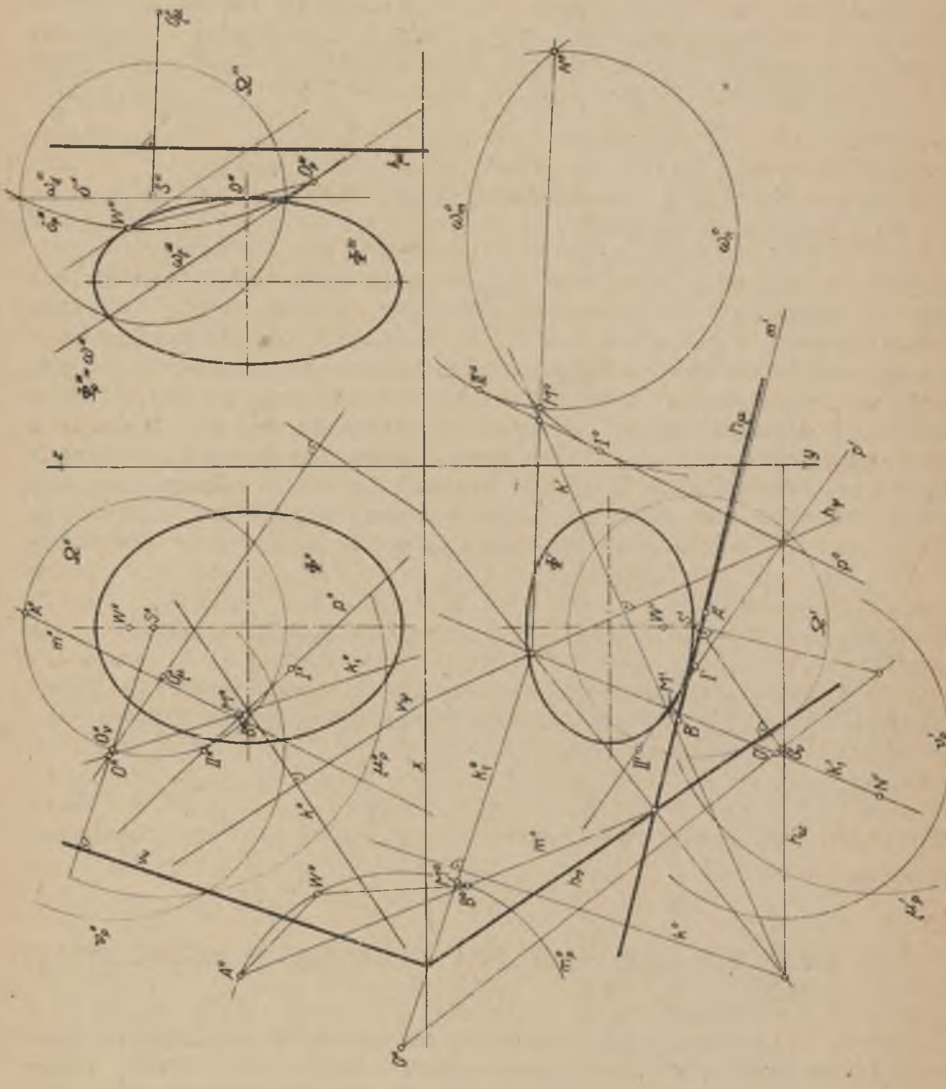
Zadanie 6. Skonstruować przekrój dowolną płaszczyzną φ dwupowłokowej hiperboloidy eliptycznej.

Rozwiązanie (rys. 29).

Wyznaczmy ustawienie k^∞ płaszczyzn przecinających hiperboloidę Φ w okręgu. Rozważmy płaszczyznę σ pęku (k^∞) styczną do hiperboloidy Φ, a punkt styczności W potraktujmy jako środek akolineacji $/A_0^3/$. Przyjmijmy dowolną płaszczyznę Φ_p pęku (k^∞) różną od σ za obraz hiperboloidy Φ. Wyznaczmy sferę podstawową związku $/A_0^3/-\Omega$. W tym celu wprowadźmy płaszczyznę δ styczną do hiperboloidy w punkcie D (dla uproszczenia - na rys. 29 płaszczyznę δ wybrano również z pęku (k^∞)), znajdźmy akolineacyjnie przyporządkowany punkt $D_p\in\Phi_p$, skonstruujmy sferę δ_p incydentną z punktem W i styczną do płaszczyzny Φ_p w punkcie D_p. Okrąg ω_d przekroju sfery δ_p płaszczyz-


z
x
y
l''
W''
F''
O''
A''
S''
S'
O'
W'
H_t
c'
Φ'
Φ''
c''
v_α
h_α
v_φ
h_φ
v_ω
h_ω
n''
t''
Ω'
Ω'''
Ω^IV
F^IV
S^IV
k_φ
σ'''
O'''
O_p'''
A^IV
Φ_p''' = ω'''
$O \in \alpha$, $\overline{OF} = \overline{OW}$
$v \parallel \varphi$ $(W \in v)$
$t = \omega\varphi$
$n = v\omega$

Rys. 29



Rys. 30

ną δ jest okręgiem przynależnym do sfery podstawowej Ω. Ponieważ znany jest i drugi okrąg leżący na Ω $(\omega_f = \Phi\Phi_p)$ - sfera Ω jest tą drogą jednoznacznie określona.
Dysponując sferą podstawową związku $/A_0^3/$ wyznaczmy z kolei sferę φ_p akolineacyjnie przyporządkowaną płaszczyźnie tnącej φ. Okrąg przekroju c_p sferą φ_p płaszczyzny Φ_p jest akolineacyjny względem krzywej przekroju c hiperboloidy Φ płaszczyzną φ. Rozwiązanie przedstawia więc rzut środkowy okręgu c_p z punktu W na płaszczyznę φ.

Zadanie 7. Dana jest dowolna elipsoida trójosiowa Φ i zewnętrzna względem niej prosta m. Należy wyznaczyć płaszczyzny styczne do elipsoidy - μ i ν przechodzące przez prostą m.

Rozwiązanie (rys. 30).

Wyznaczmy ustawienie k^∞ płaszczyzn przecinających elipsoidę w okręgu. Rozważmy punkt styczności W elipsoidy Φ do jednej z płaszczyzn pęku (k^∞). Traktując punkt W za środek, przekształćmy akolineacyjnie elipsoidę Φ w dowolną płaszczyznę Φ_p pęku (k^∞). Za pośrednictwem pomocniczej płaszczyzny $\delta \in (k^\infty)$ stycznej do elipsoidy w punkcie D i odpowiadającej jej sfery δ_p stycznej do Φ_p w punkcie D_p wyznaczmy okrąg $\omega_d = \delta\delta_p$, który wraz z okręgiem $\omega_f = \Phi\Phi_p$ określa zjednoczoną sferę Ω związku $/A_0^3/$. Dysponując nią przekształćmy akolineacyjnie prostą m na okrąg m_p (incydentny z punktami przebicia sfery Ω prostą m i punktem W). Zadanie sprowadza się do wyznaczenia sfer μ_p i ν_p incydentnych z okręgiem m_p i stycznych do płaszczyzny Φ_p. Konstrukcję tę realizuje się w oparciu o sposób wyznaczania okręgów przechodzących przez dane dwa punkty stycznie do nierozdzielającej ich prostej (por. zad. 3). Wystarczy w tym celu rozważyć przekrój okręgu m_p i płaszczyzny Φ_p płaszczyzną ψ prostopadłą do krawędzi $k = \Phi_p\varphi$ i przechodzącą przez środek okręgu m_p $(m_p \in \varphi)$.
Jeżeli: $\psi\Phi_p = p$, $\psi m_p = M, N$ należy wyznaczyć okręgi ω_m i ω_n zawierające punkty M i N oraz styczne do p. Okręgi ω_m i ω_n wraz z okręgiem m_p ustalają odpowiednio sfery μ_p i ν_p. Sfery te są obrazami szukanych płaszczyzn μ i ν.

4.3.3. Inwersja w przestrzeni jako szczególny przypadek związku $/A_0^3/$

Rozważmy taki szczególny przypadek przestrzennego związku akolineacji środkowej $/A_0^3/$, w którym środek akolineacji W jest środkiem sfery podstawowej Ω. Dokonując przekroju przestrzeni Σ i Σ_p przyporządkowanych sobie w związku $/A_0^3/$ dowolną płaszczyzną π_i przechodzącą przez środek W otrzymujemy układ ω_i i obraz ω_{ip} złączone płaskim związkiem akolineacji środkowo-osiowej $/A_0/_i$. Ponieważ środkiem takiego związku jest punkt W, a jego osią $t_i = \pi_i\Omega$ -

okrąg o środku W wnosimy, że ω_i i ω_{ip} są z sobą w inwersji (por. ust. 3.3.3). Z znanych własności inwersji zachodzącej w każdym przekroju przestrzeni Σ i Σ_p płaszczyzną wiązki (W) wynika, że rozpatrywany, szczególny przypadek związku $/A_0^3/$ dodatkowo charakteryzują:

1) przyporządkowanie każdej sferze Φ non $\in W$ sfery Φ_p,

2) przekształcenie sfery Φ ortogonalnej względem sfery podstawowej Ω w sferę Φ_p z nią zjednoczoną,

3) zachowanie równości kątów pomiędzy dowolnymi płaszczyznami α i β oraz przyporządkowanymi im w związku $/A_0^3/$ sferami α_p, β_p.

Cechy powyższe wraz z zależnościami wynikającymi z własności ogólnych związku $/A_0^3/$ oraz własności przekształceń inwersyjnych zachodzących w każdej płaszczyźnie wiązki (W) pozwalają traktować przestrzenny związek akolineacji środkowej $/A_0^3/$, w którym środek akolineacji W jest środkiem sfery podstawowej, jako identyczny z przekształceniem przez promienie odwrotne (inwersję) w przestrzeni.

LITERATURA

[1] Palej M.: "Odwzorowanie przestrzeni na płaszczyźnie przy pomocy paraboloidy obrotowej" - praca w przygotowaniu.

[2] Kounovsky J., Vycichlo F.: "Deskriptivni geometrie" Praha 1953 Nakladatelstvi Cesko-slovenske Akademie VED, str. 442.

[3] Skopec Z.A.: "Stierieograficzeskaja i izotropnaja projekcja paraboloida wraszczenja na kasatielnuju płoskost w jewo wierszynie" - Uczonyje zapiski Oriechowo-Zuewskowo Pedinstituta, 1957 t. 7. str. 73-92.

[4] Grochowski B.: "Pojęcie rzutu rozciągłego punktu i jego zastosowanie do rzutu skośnego" - Warszawa, 1961, str. 40.

[5] Plamitzer A.: "Geometria rzutowa układów płaskich i powierzchni stopnia drugiego" - Warszawa, 1938. Nakł. Komitetu Wydawniczego Podręczników Akademickich, str. 136, 3.

[6] Otto E.: "Geometria wykreślna" - Warszawa, 1954, Wyd. II. PWN, str. 165, 160.

[7] Borsuk K., Szmielew W.: "Podstawy geometrii" - Warszawa, 1955. PWN, str. 190.

[8] **Kostin W.: "Podstawy geometrii" - Warszawa, 1952. PZWS str. 178.**

[9] **Ryżow N.N.: "O tieoriemie Mongea" - Trudy moskowskowo seminara po nacziertatielnoj geometrii i inżeniernoj grafikie, Moskwa, 1958. Izdatielstwo "Sowietskaja Nauka", str. 97.**

ОБ ОДНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ "АКОЛЛИНЕАЦИИ"

В работе рассмотрено некоторое, неколлинеарное соответствие между:

а) плоским полем и поверхностью второго порядка,

б) двумя совмещенными в одной плоскости полями,

в) двумя совмещенными пространствами.

В этом соответствии, подобном гомологии но несохраняющим коллинеарности точек (отсюда назва "центральная аколлинеация") соответствуют: точкам, прямым и плоскостям одного пространства - точки, кривые и поверхности второго порядка в другом пространстве. В некотором случае, особенно подчеркнутом в работе, упомянутыми кривыми и поверхностями являются всегда окужности и поверхности шара.

Свойства центральной аколлинеации высказаны в десяти теоремах, из которых самые главные утверждают возможность преобразования произвольной кривой второго порядка в прямую, а нелинейчатой поверхности второго порядка - в плоскость. Преобразования кривых в прямые, а поверхностей 2-го порядка в плоскости может быть использовано для решения некоторых задач по начертательной геометрии. В работе показано применение центральной аколлинеации в конструкции точек пересечения кривых второго порядка прямыми и кривыми второго порядка, а также в конструкции линии пересечения поверхностей второго порядка плоскостями и поверхностями. Доказано, что рассматриваемое соответствие является обобщением инверсионного соответствия в плоскости и в пространстве.

PERSPEKTIVE AKOLLINEATION

Man hat eine nichtlineare, geometrische Abhängigkeit besprochen die zwischen:

a) einem ebenen System und einer Fläche 2. Ordnung,

b) zweier auf einer, gemeinsamen Ebene liegenden Systeme,

c) zwei Räumen
besteht.

In dieser Abhängigkeit, die einer perspektiven Kollineation ähnlich ist, die aber Inzidenz von Punkten zu einer Geraden nicht bewahrt (daher die Benennung "Akollineation") - den Punkten, Geraden und Ebenen eines Raumes - die Punkte, Kurven 2. Ordnung und Flächen 2. Ordung des anderen Raumes entsprechen.
In einem speziellen Falle, der in der Arbeit bezeichnet ist, sind die erwähnten Kurven und Flächen 2. Ordnung immer Kreise und Kugeln.

Die Eigenschaften der perspektiven Akollineation sind in 10 Sätze beschrieben, aus denen die wichtigsten die Möglichkeit der Umbildung von Kurven und Flächen 2. Ordnung auf Geraden und Ebenen feststellen. Kurven- und Flächenumbildungen können zu vielen Konstruktionen der darstellenden Geometrie angewandt werden.
Man hat die Anwendung der perspektiven Akollineation in den Konstruktionen von Durchschnittspunkten der Kurven 2. Ordnung (mit Geraden und Kurven 2. Ordnung), der Durchschnittslinien und Durchdringungslinien der Flächen 2. Ordnung bewiesen.

Man hat bewiesen, dass die betrachtete Abhängigkeit eine Verallgemeinerung der ebenen und räumlichen Inversion bildet.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
ukazują się w następujących seriach:

A. AUTOMATYKA
B. BUDOWNICTWO
Ch. CHEMIA
E. ELEKTRYKA
En. ENERGETYKA
G. GÓRNICTWO
IS. INŻYNIERIA SANITARNA
MF. MATEMATYKA-FIZYKA
M. MECHANIKA
NS. NAUKI SPOŁECZNE

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty serii MF.:

Matematyka-Fizyka z. 1, 1961 r., s. 48, zł 3,—
Matematyka-Fizyka z. 2, 1963 r., s. 91, zł 5,65
Matematyka-Fizyka z. 3, 1963 r., s. 56, zł 3,—
Matematyka-Fizyka z. 4, 1964 r., s. 96, zł 5,15
Matematyka-Fizyka z. 5, 1964 r., s. 79, zł 4,90
Matematyka-Fizyka z. 6, 1965 r., s 143, zł 6,—

Cena zł 4.75