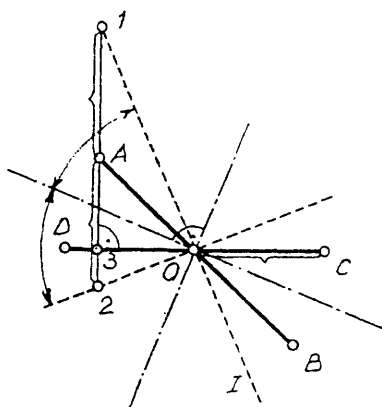


O PEWNYM UZUPEŁNIENIU KONSTRUKCJI PAPIERKOWEJ ELIPSY

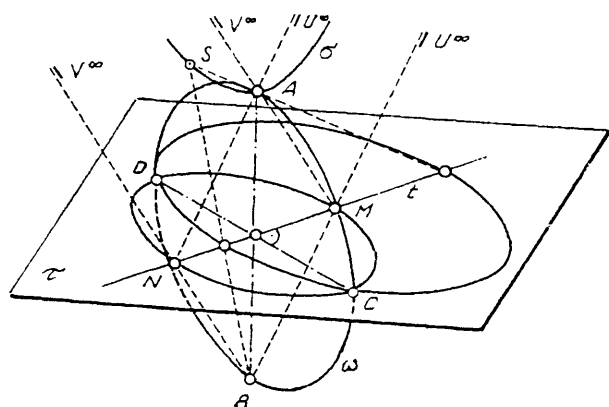
Konstrukcja papierkowa elipsy jest jednym z najczęściej używanych sposobów kreślenia tej krzywej. Obok danych w założeniu średnic sprzężonych wymaga bowiem jednej tylko dodatkowej prostej i nie pozostawia zbędnych dla wyniku elementów pomocniczych. Jest przytaczana nieomal we wszystkich krajowych i obcojęzycznych podręcznikach. Dziwi jednak fakt, że jak dotąd, nie została ona wykorzystana w pełni, t.j. że nie zwrócono uwagi na możliwość łatwego, pojawiającego się niejako na marginesie tej konstrukcji dodatkowego uzupełnienia informacji o kreślonej elipsie - informacji ustalającej kierunku jej osi. Niniejszy przyczynek jest próbą usunięcia tej luki.



Rys. 1

papierkowej.

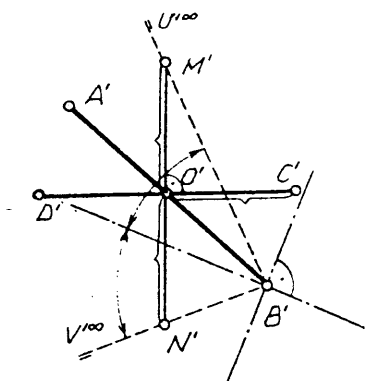
Dowód słuszności opisaney konstrukcji mieści się w dowodach uzasadniających pełniejsze rozważania dotyczące jednocześnie długości osi. Tak np. w podręczniku /2/ Autor wyprowadza go z relacji geometrycznych odwołujących się do współśrodkowych okręgów opisanych na osiach elipsy, natomiast w pracy /3/ podstawą dowodu są zależności wynikające z interpretacji elipsy jako rzutu równoległego okręgu.



Rys. 2

Wydaje się nie od rzeczy wspomnieć w tym miejscu o możliwości wykorzystania w dowodzie niektórych krajowych wyników dotyczących przekształceń krzywych stopnia drugiego. W szczególności, w pracach /4/, /5/ wykazano, że dla dowolnej stożkowej ω o średnicach sprzężonych AB i CD /rys.2/ istnieje taki zbiór punktów S , z których rzuty tej stożkowej na płaszczyznę $\tau \in CD$ tworzą pęk okręgów /punkty C i D są punktami podstawowymi tego pęku/. Zbiór

punktów S jest stożkową σ , której jedną z średnic jest AB . Jest oczywiste, że jeżeli ω jest elipsą to do zbioru S należą także dwa punkty niewłaściwe U^∞ i V^∞ - istnieją bowiem rzuty równoległe przeprowadzające elipsę ω na okrąg pęku /okrąg o średnicach CD i MN /. Stożkowa σ jest więc hiperbolą. Zauważmy, że punkty U^∞ , V^∞ to kierunki prostych łączących końce średnicy AB stożkowej ω z końcami MN średnicy okręgu sprzężonej z CD . Kierunki te ustalają kierunki asymptot hiperboli σ . Zinterpretujmy powyższe ustalenia na płaskim rysunku /rys.3/ rozumiejąc, że obydwie stożkowe ω i σ zostały zrzutowane na płaszczyznę rysunku. W rysunku takim średnice $A'B'$ i $C'D'$ są średnicami sprzężonymi elipsy - ω , a kierunki $B'M'$, $B'N'$ kierunkami asymptot hiperboli - σ .



Rys. 3

W pracach /5/, /6/ udowodniono, że stożkowe ω i σ są współosiowe. Wnosimy więc, że kierunki osi elipsy jako identyczne z kierunkami osi hiperboli są ustalone przez dwusieczne kątów utworzonych przez kierunki asymptot, tj. proste $B'M'$ i $B'N'$. Jeżeli potraktujemy rysunek 1 jako taki, który powstaje z przesunięcia w rys.3 układu prostych zaczepionych w punkcie B' o wektor $\vec{B'O'}$, otrzymamy opisaną na wstępie konstrukcję, którą należało udowodnić.

Dodajmy jeszcze, że w określonych sytuacjach może nie być bez znaczenia, iż prezentowana metoda pozwala na znalezienie osi elipsy bez użycia cyrkla /w połowieniu kąta można posłużyć się prostymi równoodległymi od jego ramion/, co w innych znanych konstrukcjach /powinowactwo, metoda Ritza/ nie jest możliwe.

Literatura:

- /1/ S.Szerszeń - „Nauka o rzutach” - PWN, Warszawa, 1977
- /2/ J.Kounovsky - F. Vycichlo - „Deskriptivni geometrie”- Nakladatelstvi Ceskoslovenske Akademie VED, Praha, 1953
- /3/ J.Simek - „O nektrech konstrukcich elipsy odvozenych z prostoru” - Sbornik Vysoke Skoly Pedagogicke v Olomouci, Prirodni Vedy IV. Statni Pedagogicke Nakladatelstvi, Praha, 1958.
- /4/ A.Pogonowska - „Stożkowe środkowo-podobne jako rzuty krzywych stopnia drugiego i kwadryk krzywoliniowych” - rozprawa doktorska - Gliwice-Warszawa, 1985.
- /5/ T.Dyduch - „O pewnych współosiowych przekształceniach środkowo-kolineacyjnych w E^3 ” - Wybrane zagadnienia geometrii wykreślnej - Monografia 64 - Politechnika Krakowska, Kraków, 1988.
- /6/ M.Palej, A.Pogonowska - „O relacjach zachodzących pomiędzy rzutami t.zw.stożkowych środków i stożkowych podstawowych” - Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej s.Matematyka-Fizyka Z.53, Gliwice, 1989.

A SUPPLEMENT OF THE SO CALLED ‘PAPER CONSTRUCTION OF ELLIPSE’

Well known paper construction of ellipse is completed. The author shows how to find the direction of the axes of ellipses if a pair of conjugated diameters of this curve is given.