

ZESZYTY NAUKOWE
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

PRACE HABILITACYJNE

Nr 3



P. 3349/61

ENERGETYKA

Nr 6

JÓZEF SZPILECKI

Wpływ przewodnictwa cieplnego
na zmiany objętości w ciele ku-
listym dwuwarstwowym.

GLIWICE 1961



POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 31

P. 3349 | 61

JOZEF SZPILECKI

**WPŁYW PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO
NA ZMIANY OBJĘTOŚCI
W CIELE KULISTYM DWUWARSTWOWYM**

PRACA HABILITACYJNA

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 21. XII. 1960 r.

GLIWICE 1961



REDAKTOR ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Prof. dr inż. Andrzej Grossman

REDAKTOR DZIAŁU

Doc. dr inż. JAN SZARGUT

ADRES REDAKCJI

Gliwice, ul. Konarskiego 19

PY. 300/61

Oddano do wyk. 6. III. 1961 r.	N-12	Nakład 300+30 egz.
Arkuszy druku 4½	Pap. powielacz. kl. V 61×86, 70 g.	Zamówienie nr 330

Zakład Produkcji Pomocy Naukowych Politechniki Śląskiej w Gliwicach

JÓZEF SZPILECKI

Katedra Fizyki B

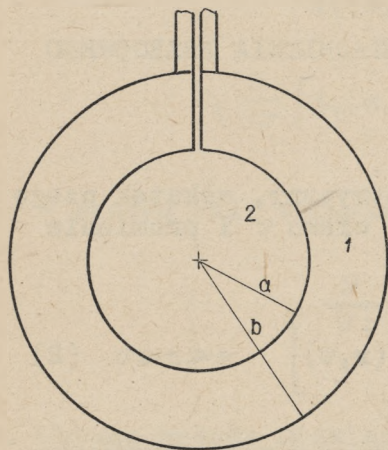
WPLYW PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO NA ZMIANY OBJĘTOŚCI
W CIELE KULISTYM DWUWARSTWOWYM

1. Cel oraz treść pracy

W pracy sformułowano i rozwiązano następujące zagadnienie brzegowe z dziedziny przewodnictwa cieplnego:

Ciało ogrzewane 1 posiada postać warstwy kulistej o promieniu zewnętrznym b i wewnętrznym a (rys.1), z materiału jednorodnego, charakteryzowanego za pomocą współczynników: przewodzenia ciepła λ_1 i przewodzenia temperatury $\bar{a}_1 = \lambda_1 / c_1 \rho_1$, przy czym

c_1 ciepło właściwe materiału,
 ρ_1 gęstość materiału.



Rys.1. Aparatura

Warstwa kulista jest wypełniona cieczą 2, której stałe fizyczne oznaczano symbolami: λ_2 , \bar{a}_2 , c_2 , ρ_2 .

Układ powyższy poddany jest działaniu zmiennej z czasem τ , temperatury otoczenia $t(\tau)$, o której zakładamy, że jest ciągła i posiada transformowaną Laplace'a. W praktyce są to przeważnie funkcje, których transformowana Laplace'a jest funkcją meromorficzną.

Należy wyznaczyć przebieg temperatur t_1 i t_2 składników układu w funkcji czasu i promienia bieżącego.

Ze względu na rozszerzalność cieplną, granice składników układu są ruchome, są funkcjami czasu.

W pracy znaleziono zależność temperatur składników układu od czasu i promienia bieżącego, bez uwzględnienia konwekcji. Kryterium nie występowania konwekcji przedyskutowano oddzielnie w końcowej części pracy.

Otrzymane rozwiązanie zastosowano, przy pewnych uproszczeniach, do przypadku czujnika w postaci termometru kontaktowego, przy czym jako temperaturę otoczenia przyjęto

$$t(\tau) = \sum_{k=1}^n B_k e^{\alpha_k \tau} + \theta \quad (1)$$

gdzie:

B_k, α_k, θ są wielkościami rzeczywistymi stałymi.

Stałe α_k są ujemne i różne od siebie.

W pracy zdefiniowano i obliczono opóźnienia, spowodowane przewodnictwem cieplnym w dyskutowanym wyżej układzie.

I. SFORMUŁOWANIE I ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

2. Równania różniczkowe problemu

Problem zakładamy kulisto symetryczny, wskutek czego temperatury t_1, t_2 są funkcjami czasu τ i promienia bieżącego r

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[r t_1(r, \tau) \right] = \bar{a}_1 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[r t_1(r, \tau) \right] \quad a \leq r \leq b \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[r t_2(r, \tau) \right] = \bar{a}_2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[r t_2(r, \tau) \right] \quad 0 \leq r \leq a \quad (2)$$

3. Warunki początkowe

$$t_1(r,0) = t_{1,0}(r) \quad t_2(r,0) = t_{2,0}(r) \quad (3)$$

Przedyskutowano dwa przypadki $t_{i0} = \text{const}$, $i = 1,2$ oraz $t_{i,0}(r)$, zmienne z r .

4. Warunki graniczne

Na powierzchni kuli zewnętrznej $r=b(\tau)$ spełniony jest warunek:

$$\frac{\partial}{\partial r} [t_1(b,\tau)] = -\frac{\alpha}{\lambda_1} [t_1(b,\tau) - t(\tau)] \quad (4)$$

Wymianę ciepłą przyjmujemy według prawa Newtona, przy czym α oznacza współczynnik wnikania ciepła. Inne oznaczenia jak wyżej.

Na granicy obu ciał $r=a(\tau)$ spełnione są warunki następujące:

$$t_1(a,\tau) = t_2(a,\tau) \quad (5)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} [t_1(a,\tau)] = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial r} [t_2(a,\tau)]$$

W środku kuli strumień cieplny jest równy zeru, więc

$$\frac{\partial}{\partial r} [t_2(0,\tau)] = 0 \quad (6)$$

5. Obrona metoda rozwiązania problemu

Ze względu na ruchomość granic, na których podane są warunki brzegowe, obrano następującą metodę: Przedział zmienności temperatur dla danego procesu ogrzewania czy ostygnięcia (więc i przedział zmienności czasu) dzielimy

na dostatecznie dużą ilość podprzedziałów. Wartości a_i , b_i promieni a , b uważamy w przedziale i -ym za stałe. Przy przejściu od jednego do drugiego podprzedziału zmieniają się one skokowo. Podział przyjmujemy tak drobny, by stosowane dalej przybliżenia były słuszne.

Na granicach poszczególnych przedziałów zakładamy ciągłość funkcji temperatur, przyjmując jako wartości początkowe w przedziale $i+1$ końcowe wartości temperatur t_1, t_2 z przedziału i .

6. Sformułowanie problemu dla k -tego odcinka czasowego

Zupełnie podobnie do równań (2-6) możemy napisać analogiczne sformułowanie problemu dla k -tego przedziału czasowego z następującymi różnicami:

a) Granice a_k, b_k określające przedziały zmienności r_k , są stałe.

b) W miejsce r, a, b wchodzi odpowiednio r_k, a_k, b_k .

c) Szukane temperatury oznaczamy $t_{i,k}$, $i = 1, 2$.

d) Czas liczymy każdorazowo od początku każdego podprzedziału czasowego.

e) Ze względu na ostatnie założenie, funkcja $t(\tau)$ której przedział zmienności czasowej obejmuje wszystkie podprzedziały częściowe, zmienia swą postać w poszczególnych podprzedziałach, jak to podano explicite w P*). W miejsce więc $t(\tau)$ wprowadzamy $t_k(\tau)$.

W przypadku równania (1) postać ta jest następująca:

$$t_k(\tau) = \sum_{s=1}^n B_s e^{\alpha_s(\tau + \sum_{r=1}^{k-1} \tau_r)} + \theta = \sum_{s=1}^n \bar{B}_{s,k} e^{\alpha_s \tau} + \theta(1')$$

f) Ze względu na dalsze trudności oznaczeniowe, nie wprowadzamy dla czasu w przedziale k -tym osobnego oznaczenia.

*) Symbol P oznacza przypisy.

7. Metoda rozwiązania problemu dla k-tego podprzedziału czasowego

Układ równań (2-6) z modyfikacjami, podanymi w punkcie 6 rozwiązujemy metodą całki Laplace'a, przy czym parametr transformacji ze względu na czas oznaczamy przez p . Transformowaną funkcji $t(\tau)$ oznaczono $T(p)$. Szczegóły przeliczenia podane są w przypisach.

8. Wyrażenia dla temperatur

Na podstawie (P 24) możemy napisać rozwiązanie problemu dla k-tego podprzedziału w postaci następującej:

$$\begin{aligned}
 t_{1,k}(r_k, \tau) = & \sum_{w=0}^k \sigma_{1,1,k}(r_k, \sum_{r=w+1}^k \tau_r + \tau) + \\
 & + \sum_{w=0}^k \sigma_{1,2,k}(r_k, \sum_{r=w+1}^k \tau_r + \tau) + \theta \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$i = 1, 2$$

$$w + 1 \leq k$$

9. Oznaczenia

9.1. Funkcje $\sigma_{1,x,k}(r_k, \tau)$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1,1,k}(r_k, \tau) = & \sum_{s=1}^n \left[\Lambda_{s,k} \cdot \text{sh}[p_{1,s}(a_k - r_k)] + \right. \\
 & + B_{s,k} \cdot \text{sh}[p_{1,s}(b_k - r_k)] + C_{s,k} \cdot \text{ch}[p_{1,s}(a_k - r_k)] + \\
 & \left. + D_{s,k} \cdot \text{ch}[p_{1,s}(b_k - r_k)] \right] e^{\alpha_s \tau} / r_k \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{2,1,k}(r_k, \tau) = \sum_{s=1}^n E_{s,k} \cdot \text{sh}[p_{2,s} r_k] \cdot e^{\alpha_s \tau} / r_k$$

$$\sigma_{1,2,k}(r_k, \tau) = \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{u_v} \left[A_{v,u_v,k} \cdot \text{sh}[p_{1,v}(a_k - r_k)] + \right.$$

$$+ B_{v,u_v,k} \cdot \text{sh}[p_{1,v}(b_k - r_k)] + C_{v,u_v,k} \cdot \text{ch}[p_{1,v}(a_k - r_k)] +$$

$$\left. + D_{v,u_v,k} \cdot \text{ch}[p_{1,v}(b_k - r_k)] \right] \tau^{u_v} e^{\alpha_v \tau} / r_k$$

$$\sigma_{2,2,k}(r_k, \tau) = \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{u_v} E_{v,u_v,k} \cdot \tau^{u_v} \cdot \text{sh}[p_{2,v} r_k] \cdot e^{\alpha_v \tau} / r_k$$

9.2. Współczynniki funkcji $\sigma_{i,x,k}(r_k, \tau)$

9.2.1. Współczynniki zależne od indeksu s .

$$A_{s,k} = 2 \left[p_{2,s} a_k \text{ch}[p_{2,s} a_k] - \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \cdot \text{sh}[p_{2,s} a_k] \right] \cdot$$

$$\cdot F_{1,1,k,s}(\alpha_s) / M_k(\alpha_s) \quad (9)$$

$$B_{s,k} = 2 \left(b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha} \right) \cdot F_{2,1,k,s}(\alpha_s) / M_k(\alpha_s)$$

$$C_{s,k} = -2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_k p_{1,s} \text{sh}[p_{2,s} a_k] \cdot F_{1,1,k,s}(\alpha_s) / M_k(\alpha_s)$$

$$D_{s,k} = 2 \frac{\lambda_1}{\alpha} b_k p_{1,s} F_{2,1,k,s}(\alpha_s) / M_k(\alpha_s)$$

$$E_{s,k} = \frac{2}{M_k(\alpha_s) \cdot \text{sh}[p_{2,s} a_k]} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_k p_{1,s} \text{sh}[p_{1,s} a_k] \cdot \right. \\ F_{1,1,k,s}(\alpha_s) + \left[\frac{\lambda_1}{\alpha} b_k p_{1,s} \text{ch}[p_{1,s}(b_k - a_k)] + \right. \\ \left. + (b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}) \text{sh}[p_{1,s}(b_k - a_k)] \right] \cdot F_{2,1,k,s}(\alpha_s) + \\ \left. + M_k(\alpha_s) \cdot a_k \left[\Xi_{1,1,k,s}(a_k, \alpha_s) - \Xi_{2,1,k,s}(a_k, \alpha_s) \right] \right\}$$

We współczynnikach napisano dla skrócenia $M_k(\alpha_s)$.

9,2,2. Współczynniki funkcji $\sigma_{i,k}(r_k, \tau)$ zależne od indeksu v ,

$$A_{v,u_v,k} = (1/u_v!) \frac{d^{u_v}}{dp^{u_v}} \left\{ 2 \left[a_k p_{2,v} \text{ch}[p_{2,v} a_k] - \right. \right. \\ \left. \left. - (1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) \text{sh}[p_{2,v} a_k] \right] \cdot F_{1,k}(\alpha_v) \cdot \right. \\ \left. \cdot (p - \alpha_v)^x \left(\frac{-\Delta_k M_o(\alpha_v)}{M_o(\alpha_v)} \right)^{z-1} \cdot \frac{1}{M_o(\alpha_v)} \right\} \quad (10)$$

$$B_{v,u_v,k} = (1/u_v!) \frac{d^{u_v}}{dp^{u_v}} \left\{ 2(b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}) \cdot F_{2,k}(\alpha_v) (p - \alpha_v)^x \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\frac{-\Delta_k M_o(\alpha_v)}{M_o(\alpha_v)} \right)^{z-1} \cdot \frac{1}{M_o(\alpha_v)} \right\}$$

$$C_{v,u_v,k} = (1/u_v!) \frac{d^{u_v}}{dp_v} \left\{ -2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_k p_{1,v} \operatorname{ch}[p_{2,v} a_k] \cdot \right. \\ \left. \cdot F_{1,k}(\alpha_v)(p - \alpha_v)^x \cdot \left(\frac{-\Delta_k M_o(\alpha_v)}{M_o(\alpha_v)} \right)^{z-1} / M_o(\alpha_v) \right\}$$

$$D_{v,u_v,k} = (1/u_v!) \frac{d^{u_v}}{dp_v} \left\{ 2 \frac{\lambda_1}{\alpha} b_k p_{1,v} F_{2,k}(\alpha_v)(p - \alpha_v)^x \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\frac{-\Delta_k M_o(\alpha_v)}{M_o(\alpha_v)} \right)^{z-1} / M_o(\alpha_v) \right\}$$

$$E_{v,u_v,k} = (1/u_v!) \frac{d^{u_v}}{dp_v} \left\{ \frac{2(p - \alpha_v)^x}{M_o(\alpha_v) \operatorname{sh}[p_{2,v} a_k]} \left[a_k p_{1,v} \operatorname{sh}[p_{1,v} a_k] \cdot \right. \right. \\ \left. \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot F_{1,k}(\alpha_v) \right] + \left[\frac{\lambda_1}{\alpha} b_k p_{1,v} \operatorname{sh}[p_{1,v}(b_k - a_k)] + \right. \\ \left. + (b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}) \operatorname{sh}[p_{1,v}(b_k - a_k)] \right] \cdot F_{2,k}(\alpha_v) \left. \right\} \left(\frac{-\Delta_k M_o(\alpha_v)}{M_o(\alpha_v)} \right)^{z-1} + \\ + M_o(\alpha_v) \cdot a_k \left[f_{1,k}(a_k, \alpha_v) - f_{2,k}(a_k, \alpha_v) \right]$$

Wzory są ważne dla $k = 1, 2 \dots \dots$

Oznaczono w nich

$$\Delta_k M_o(\alpha_v) = M_k(\alpha_v) - M_o(\alpha_v) \quad (11)$$

9.3. Uwagi dotyczące wzorów (9) i (10)

Pewnej uwagi wymaga przypadek $k = 0$, pierwszego kroku iteracji. Dla $k = 0$ $B_{s,0} = D_{s,0} = 0$, w miejsce $F_{1,1,k,s}(\alpha_s)$ należy wstawić $-b_k B_{s,k}$. We wzorze na $E_{s,k}(\alpha_s)$ znika $F_{2,1,k,s}(\alpha_s)$ oraz ostatni człon $\Xi_{1,1,k,s}(a_k, \alpha_s) = \Xi_{2,1,k,s}(a_k, \alpha_s)$.

Omówienia wymaga sposób tworzenia współczynników funkcji (10). Występują tu funkcje $F_{i,k}(p)$, które są zbudowane z członów, posiadających jako bieguny miejsca zerowe $M(\alpha_v) = 0$. Jeżeli więc w odpowiednim członie $F_{i,k}(p)$ występuje wartość α_v , wtedy dla tego członu należy podstawić $x = z$. Jeżeli zachodzi równość $\alpha_s = \alpha_v$, należy podstawić $z = 3$. W innych przypadkach $z = 1, 2$.

Jeżeli w członach $F_{i,k}(p)$ występują α_v , różne od rozpatrywanego, należy podstawić $x = z-1$. Indeks u_v w pierwszym przypadku przybiera wartości od 0 do $z-1$, w drugim od 0 do $z-2$. d/dp^0 oznacza funkcję nieróżniczkowaną.

9.4. Sposób tworzenia funkcji $f_{i,k}(r_k, p)$

Zgodnie z warunkami początkowymi spełnione są równania:

$$f_{i,0}(r_0, p) = r_0 t_{i,0}/p, \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

$$f_{i,k}(r_k, p) = L \left\{ t_{i,k-1}(r_k, \tau) \right\} \quad (12')$$

$$k = 1, 2 \dots$$

Funkcja $L \left\{ t_{i,k-1}(r_k, \tau) \right\}$ jest podobnie zbudowana, jak transformata Laplace'a ze względu na czas τ , z tym wszakże, że każdy człon wykładniczy przed transformacją

posiada stały czynnik $e^{\alpha_s \tau_k}$ względnie $e^{\alpha_v \tau_k}$, przy czym τ_k oznacza koniec podprzedziału $k=1$.

Inaczej możemy napisać:

$$f_{i,k}(r_k, p) = r_k \left[\sum_{w=0}^k \Xi_{i,1,k}(r_k, \sum_{r=w+1}^k \tau_{r,p}) + \sum_{w=0}^k \Xi_{i,2,w}(r_k, \sum_{r=w+1}^k \tau_{r,p}) + \theta/p \right] \quad (13)$$

$$w + 1 \leq k$$

Funkcje $\Xi_{i,x,k}(r_k, p)$ są tworzone według podobnego przepisu jak transformaty Laplace'a ze względu na czas, z tym, że wyrazy wykładnicze zostały odpowiednio pomnożone przez $e^{\alpha_s \tau_k}$ albo przez $e^{\alpha_v \tau_k}$. We wzorach (9) występują funkcje $\Xi_{i,w,k,s}(a_k, \alpha_s)$. Są to człony odpowiednich funkcji $\Xi_{i,x,k}(a_k, \alpha_s)$, przynależne do danego s .

9.5. Sposób tworzenia funkcji $F_{i,k}(p)$

Na podstawie (P 10) otrzymujemy

$$F_{1,k}(p) = b_k^2 T_k(p) - \frac{\lambda_1}{\alpha} \left[b_k \frac{df_{1,k}(b_k)}{dr_k} - f_{1,k}(b_k) \right] - b_k f_{1,k}(b_k) \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 F_{2,k}(p) &= f_{2,k}(a_k) \cdot a_k p_2 \operatorname{ch} [p_2 a_k] - \\
 &- f_{1,k}(a_k) \left[a_k p_2 \operatorname{ch} [p_2 a_k] - \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \operatorname{sh} [p_2 a_k] \right] - (14) \\
 &- a_k \operatorname{sh} [p_2 a_k] \cdot \left[\frac{df_{2,k}(a_k)}{da_k} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{df_{1,k}(a_k)}{da_k} \right]
 \end{aligned}$$

Ponieważ funkcje $f_{i,k}(p)$ są sumami członów zależnych od indeksu s i v , możemy równania (14) napisać w postaci

$$F_{i,k}(p) = F_{i,1,k}(p) + F_{i,2,k}(p) \quad (15)$$

$$i = 1, 2$$

$$k = 1, 2 \dots$$

Pierwsza funkcja zawiera człony, przynależne do indeksu s , druga do indeksu v .

Charakterystyczne dla równań (15) jest to, że nie występuje tu temperatura stanu ustalonego θ , jeżeli przyjmiemy dla $T_k(p)$ wyrażenie (P 13). W części rozwiązania przynależnej do indeksu s , wygodnie jest przyjąć

$$F_{i,1,k}(p) = \sum_{s=1}^n F_{i,1,k,s}(p) \quad (16)$$

przy czym przez $F_{i,1,k,s}(p)$ oznaczono zespół członów, przynależnych do tego samego s ,

9.6. Uwagi o wartościach własnych problemu

Wartości α_s są biegunami funkcji transformowanej funkcji $t_k(\tau)$, którą przyjmujemy w postaci (P 13)

$$T_k(p) = \sum_{s=1}^n \bar{B}_{s,k} / (p - \alpha_s) + \theta/p \quad (17)$$

Przy tym założono, że bieguny te są pojedyncze.

Wartości α_v są rozwiązaniami równania, które otrzymujemy, podstawiając w wyrażeniu poniższym $k = 0$, i porównując je do zera

$$\begin{aligned} M_k(p) = & 2 \left\{ b_k p_1 \frac{\lambda_1}{\alpha} \left[a_k p_2 \operatorname{ch}[p_2 a_k] - \right. \right. \\ & - \left. \left. \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \operatorname{sh}[p_2 a_k] \right] \cdot \operatorname{ch}[p_1(b_k - a_k)] + \right. \\ & + a_k b_k p_1^2 \frac{\lambda_1^2}{\alpha \lambda_2} \operatorname{sh}[p_2 a_k] \cdot \operatorname{sh}[p_1(b_k - a_k)] + \\ & + \left. \left(b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha} \right) \cdot \left[a_k p_2 \operatorname{ch}[p_2 a_k] - \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \operatorname{sh}[p_2 a_k] \right] \cdot \right. \\ & \cdot \operatorname{sh}[p_1(b_k - a_k)] + \left. \left(b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha} \right) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_k \cdot p_1 \operatorname{sh}[p_2 a_k] \cdot \right. \\ & \left. \left. \cdot \operatorname{ch}[p_1(b_k - a_k)] \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

Graficzną metodę rozwiązania powyższego równania przedyskutowano w przypisach punkt P II 2 równania (P 15) do (P 22).

Ze sposobu rozwiązania wynika, że wartości λ_v są pojedyncze, rzeczywiste, ujemne.

10. Fizykalna interpretacja rozwiązania równania (7)

W rozwiązaniu równania (7) stały człon oznacza stan ustalony, zgodny ze stanem ustalonym temperatury otoczenia.

Pozostałe człony zanikają z biegiem czasu wykładniczo, przy uczynionych założeniach o wartościach własnych zagadnienia.

Ze względu na sposób obliczania, człony przynależne do indeksu $k = 0$ wyróżniają się od pozostałych, funkcje bowiem $t_{i,0}(r_0, \tau)$ posiadają jako stałą wartość początkową, wartość $t_{i,0}$ w pozostałych zaś funkcjach

jako wyraz stały figuruje θ , przy czym człony wykładnicze nie są od niego zależne.

Interpretacja członów, przynależnych do indeksu $k=0$ jest następująca: przedstawiają one razem z wartością θ rozwiązanie problemu przy granicach nieruchomych. Stąd wynika, że gdybyśmy stosowali w przypadku stałych granic sposób podobny jak zastosowano w pracy, otrzymalibyśmy wartość członów, odpowiadających $k = 1, 2, \dots$ równą zeru. Fakt, że one są w naszym przypadku różne od zera, ujawnia wpływ tego, że w obliczeniu przyjęto granice ruchome. Odpowiednie człony są więc członami poprawkowymi.

Ze względu na warunki początkowe, które zakładają ciągłość temperatur na granicy dwu sąsiednich podprzedziałów, wynika, że dla $\tau = 0$ muszą dla $k = 1, 2, \dots$ zniknąć człony przynależne do najwyższego indeksu k , ponieważ w tym przypadku otrzymujemy funkcję z poprzedniego podprzedziału, obliczoną dla chwili końcowej.

II. ZASTOSOWANIE WZORÓW DLA TEMPERATUR DO OBLICZENIA ZMIAN WYMIARÓW I OBJĘTOŚCI

11. Wzory rekurencyjne dla zmiany wymiarów

Jeżeli współczynnik rozszerzalności liniowej materiału 1 oznaczymy przez γ_1 , możemy ze względu na małe przy-

rosty temperatur użyć następujących wzorów rekurencyjnych dla a_k i b_k :

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^{a_{k-1}} \left\{ 1 + \gamma_1 [t_{2,k-1}(r_{k-1}, \tau) - t_{2,k-1}(r_{k-1}, 0)] \right\} dr_{k-1} = \\ &= a_{k-1} + \int_0^{a_{k-1}} \gamma_1 [t_{2,k-1}(r_{k-1}, \tau) - t_{2,k-1}(r_{k-1}, 0)] dr_{k-1} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} b_k &= \int_0^{b_{k-1}} \left\{ 1 + \gamma_1 [t_{2,k-1}(r_{k-1}, \tau) - t_{2,k-1}(r_{k-1}, 0)] \right\} dr_{k-1} + \\ &+ \int_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} \left\{ 1 + \gamma_1 [t_{1,k-1}(r_{k-1}, \tau) - t_{1,k-1}(r_{k-1}, 0)] \right\} dr_{k-1} = \\ &= b_{k-1} + \gamma_1 \int_a^{a_{k-1}} [t_{2,k-1}(r_{k-1}, \tau) - t_{2,k-1}(r_{k-1}, 0)] dr_{k-1} + \\ &+ \gamma_1 \int_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} [t_{1,k-1}(r_{k-1}, \tau) - t_{1,k-1}(r_{k-1}, 0)] dr_{k-1} \end{aligned} \quad (20)$$

12. Wzór dla zmian objętości cieczy

Jeżeli oznaczymy współczynnik rozszerzalności objętościowej cieczy przez β_2 , możemy analogicznie otrzymać dla zmiany objętości cieczy

$$\begin{aligned} V_k &= V_{k-1} + 4\pi(\beta_2 - 3\gamma_1) \int_0^{a_{k-1}} r_{k-1}^2 [t_{2,k-1}(r_{k-1}, \tau) - \\ &- t_{2,k-1}(r_{k-1}, 0)] dr_{k-1} \end{aligned} \quad (21)$$

Jako objętość początkową przyjmujemy

$$V_0 = 4\pi a_0^3 / 3 \quad (22)$$

13. Wyliczenie całek, występujących w równaniach (19), (20) i (21)

Przy pomocy równania (7) otrzymujemy

$$t_{i,k}(r_k, \tau) - t_{i,k}(r_k, 0) = \sum_{w=0}^k \sum_{x=1}^2 \left[\sigma_{i,x,k}(r_k, \sum_{r=w+1}^k \tau_r + \tau) - \sigma_{i,x,k}(r_k, \sum_{r=w+1}^k \tau_r) \right]$$

$i = 1, 2 \qquad w + 1 \leq k \quad (23)$

Podstawienie wielkości (23) do równań (19 - 21) daje

$$I_i = \int \left\{ t_{i,k-1}(r_{k-1}, \tau) - t_{i,k-1}(r_{k-1}, 0) \right\} dr_{k-1} =$$

$$= \sum_{w=0}^k \sum_{x=1}^2 \left\{ \int \left[\sigma_{i,x,k-1}(r_{k-1}, \sum_{r=w+1}^k \tau_r + \tau) - \sigma_{i,x,k-1}(r_{k-1}, \sum_{r=w+1}^k \tau_r) \right] \frac{dr_{k-1}}{r_{k-1}} \right\} \quad (24)$$

$i = 1, 2$

$$I_3 = \int r_{k-1} \left[t_{2,k-1}(r_{k-1}, \tau) - t_{2,k-1}(r_{k-1}, 0) \right] dr_{k-1} =$$

$$= \int r_{k-1} \sum_{w=0}^k \sum_{x=1}^2 \left[\sigma_{i,x,k-1}(r_{k-1}, \sum_{r=w+1}^k \tau_r + \tau) - \sigma_{i,x,k-1}(r_{k-1}, \sum_{r=w+1}^k \tau_r) \right] \cdot dr_{k-1} \quad (25)$$



Występujące w I_i całki, otrzymujemy przy pomocy równania (8), zastępując tam p_1, p_2 przez $m_1 = p_1/i, m_2 = p_2/i$ i $i = \sqrt{-1}$. Funkcje sh i ch dzielone przez r_k zastępujemy przez sinus i cosinus całkowy

$$\begin{aligned} Si\ x &= \int_0^x \sin t \cdot dt/t & Si\ 0 &= 0 \\ Ci\ x &= - \int_x^\infty \cos t \cdot dt/t \end{aligned} \quad (26)$$

τ zastępujemy przez τ_k , oraz $e^{\alpha\tau}$ przez $(e^{\alpha\tau_{k-1}}) e^{\alpha \sum_{r=1}^{k-1} \tau_r}$

Całka (25) wyraża się za pomocą funkcji hiperbolicznych. Wykonując całkowanie przez części otrzymuje się

$$\begin{aligned} \int r_{k-1} sh [p_2 r_{k-1}] dr_{k-1} &= r_{k-1} ch [p_2 r_{k-1}] / p_2 - \\ &= sh [p_2 r_{k-1}] / p_2^2 \end{aligned} \quad (27)$$

Wyrażenie to wchodzi w miejsce $sh [p_{2,v} r_k]$ lub $sh [p_{2,s} r_{k-1}]$. Ponadto wielkość τ zastępujemy przez τ_k , wielkość zaś $e^{\alpha\tau}$ przez $(e^{\alpha\tau_{k-1}}) e^{\alpha \sum_{r=1}^{k-1} \tau_r}$.

14. Kilka uwag

W dotychczasowych rozumowaniach nie robiono żadnych uproszczeń. Jeżeli to uczyniono przy przejściu od $M_k(\alpha_v)$ do $M_0(\alpha_v)$, to podana metoda pozwala posługiwać się k -rozwinięciem tego wyrażenia z dowolną dokładnością.

Otrzymane wyrażenia możemy nieco uprościć, korzystając z założenia uczynionego na początku, mianowicie, że czasy τ_k , mierzące długości poszczególnych podprzedziałów czasowych, są bardzo krótkie. Wskutek tego możemy funkcje wykładnicze zastąpić ich rozwinięciami w szereg, co jest specjalnie ważne w tym przypadku, gdy mamy rozwiązać otrzymane wyrażenia ze względu na czas.

Z dalszych rozważań wynika, że należy uwzględnić czło-
ny do co najmniej drugiego stopnia włącznie.

15. Wyprowadzenie przybliżonych zależności

Korzystamy z następującego przybliżonego wzoru

$$e^{\alpha\tau} - 1 = \alpha\tau + \alpha^2\tau^2 / 2 \quad (28)$$

Podstawiając wartość (28) w funkcjach (8) zmodyfikowa-
nych według uwag punktu 14, otrzymujemy po uporządko-
waniu względem τ

$$a_k = a_{k-1} + \gamma_1\tau \Delta a_{k-1} + \gamma_1^2\tau^2 \Delta^2 a_{k-1} \quad (29)$$

$$b_k = b_{k-1} + \gamma_1\tau \Delta b_{k-1} + \gamma_1^2\tau^2 \Delta^2 b_{k-1} \quad (30)$$

$$V_k = V_{k-1} + \tau(\beta_2 - 3\gamma_1)\Delta V_{k-1} + (\beta_2 - 3\gamma_1)^2\tau^2 \Delta^2 V_{k-1} \quad (31)$$

przy czym wprowadzono następujące oznaczenia:

Symbole Δa_{k-1} , Δb_{k-1} , ΔV_{k-1} oznaczają prawe strony
(19) do (21), w których czynniki $e^{\alpha\tau} - 1$ zastąpiono
przez odpowiednią wielkość α_s albo α_v . Analogicznie
otrzymujemy $\Delta^2 a_{k-1}$, $\Delta^2 b_{k-1}$, $\Delta^2 V_{k-1}$, gdzie w miej-
sce czynników $e^{\alpha\tau} - 1$ wprowadzono $\alpha_s^2/2$ lub $\alpha_v^2/2$.

16. Związki między a_k, b_k, V_k i a_0, b_0, V_0

Przez eliminację wartości pośrednich otrzymujemy

$$a_k = a_0 + \gamma_1 \tau \sum_{p=0}^{k-1} \Delta a_p + \gamma_1 \tau^2 \sum_{p=w}^{k-1} \Delta^2 a_p \quad (32)$$

$$b_k = b_0 + \gamma_1 \tau \sum_{p=0}^{k-1} \Delta b_p + \gamma_1 \tau^2 \sum_{p=0}^{k-1} \Delta^2 b_p \quad (33)$$

$$V_k = V_0 + \tau(\beta_2 - 3\gamma_1) \sum_{p=0}^{k-1} \Delta V_p + (\beta_2 - 3\gamma_1) \tau^2 \sum_{p=0}^{k-1} \Delta^2 V_p \quad (34)$$

Przy tej dokładności, wystarczy wielkości $\Delta a_k, \Delta b_k, \Delta V_k$ wyliczyć z dokładnością do pierwszych potęg τ^k , wielkości zaś $\Delta^2 a_k, \Delta^2 b_k, \Delta^2 V_k$ obliczać z dokładnością do potęg zerowych (wartości początkowe).

17. Warunek na osiągnięcie określonej objętości

Warunek osiągnięcia określonej objętości ma następującą postać

$$V_k = V_{k,0} \quad (35)$$

przy czym $V_{k,0}$ jest wielkością znaną (np. określoną przez położenie kontaktów termometru kontaktowego). Równanie (35) określa koniec danego procesu ogrzewania lub ostygnięcia.

Ogólne rozwiązanie równania (35) metodą graficzną podano w [6].

Głównie ze względu na możliwość prostego rozwiązania tego równania, przyjęto upraszczające założenie (28). Najwygodniej przy tym przyjąć równanie drugiego stopnia.

III. OSCYLACJE TEMPERATURY W ROZPATRYWANYM UKŁADZIE

18. Formuły dla oscylacji temperatury otoczenia

Jeżeli przedstawiony we wstępie układ przedstawia np, termometr kontaktowy, odbywają się w nim oscylacje temperatury, wywołane kolejnym wzrostem i obniżeniem się temperatury otoczenia.

Zmiany te przyjmujemy podobnie jak w [6] gdzie rozpatrzono oscylacje temperatur układu n składnikowego przy kolejnych załączaniach i wyłączaniach źródła ciepła. Załączanie i wyłączenie jest związane ze zmianami objętości cieczy 2. W pracy [6] znajdujemy dla kolejnej s-tej fazy procesu następujące wyrażenia dla temperatur poszczególnych składników (podobne zależności zachodzą również dla wprowadzonej w tej pracy temperatury równoważnej). (Do ogrzewania odnoszą się indeksy nieparzyste, do ostygnięcia parzyste).

$$t(2s) = \sum_{r=1}^n B_r \varepsilon_{r,(2s)} \cdot e^{\alpha_r \tau} + \theta(2s) \quad (36)$$

$$t(2s+1) = \sum_{r=1}^n B_r \varepsilon_{r,(2s+1)} \cdot e^{\alpha_r \tau} + \vartheta_0$$

przy czym

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r(0)} &= 1, \varepsilon_{r,(1)} = e^{\alpha_r \tau_1} - 1 \\ \varepsilon_{r,(s)} &= e^{\alpha_r(\tau_1 + \dots + \tau_s)} - e^{\alpha_r(\tau_2 + \dots + \tau_s)} + \dots \\ &\dots + (-1)^s e^{\alpha_r \tau_s} - (-1)^s \end{aligned} \quad (37)$$

Stan ustalony w przypadku ogrzewania wyznaczony jest przez $\theta_{(2s)}$, w przypadku ostygnięcia, temperaturę ϑ_0 otoczenia układu.

19. Wprowadzenie nowych oznaczeń

Jeżeli rozpatrujemy oscylacje temperatur w opisanym na wstępie układzie, musimy oznaczyć kolejne procesy ogrzewania i ostygnięcia. Do tego celu służy indeks (ϱ).

20. Kilka słów o fizykalnych własnościach procesów oscylacji

W pracy [6] wykazano dla szeregu układów następujące własności oscylacji temperaturowych.

Jeżeli np. przyjmiemy układ ciał, które jak w [6] posiadały początkową temperaturę równą temperaturze otoczenia, wtedy przebiegi czasowe temperatur, od pierwszego ostygnięcia począwszy, wykazują ekstrema. Podobną własność posiada temperatura t , zdefiniowana w równaniu (3). Własność ta przejawia się we wzroście temperatury po wyłączeniu źródła, po czym następuje malenie, oraz w podobnym maleniu po załączeniu źródła.

Do tego efektu dodaje się efekt drugi, polegający na tym, że nawet gdy temperatura otoczenia zaczyna maleć, mamy w rozpatrywanym przez nas układzie dalszy wzrost temperatury, ponieważ temperatura zewnętrzna jest wyższa od temperatury we wnętrzu. Podobne opóźnienie występuje również przy ostygnięciu.

Wynika stąd, że wartość nominalna V_{ko} jest przekraczana w obie strony, temperatury więc układu rozpatrywanego, zamiast być stałe, zmieniają się w pewnych granicach. Efekt ten był celem niniejszej pracy.

Możemy również inaczej zinterpretować zjawisko, powołując się na znany powszechnie fakt, że wskutek skończonego czasu przenikania ciepła do układu, mamy pozorne kurczenie się cieczy przy ogrzewaniu i rozszerzanie przy ostygnięciu.

Potrzeba stworzenia przybliżonej teorii, uwzględniającej powyższe własności fizykalne procesu, zmusza nas do stosowania co najmniej drugiego przybliżenia w rozwinięciu funkcji wykładniczych. Stosowanie wyższych po-

tęg jest ze względów obliczeniowych niewygodne, gdyż wtedy równanie (35) nie daje się prosto rozwiązać ze względu na czas.

IV. OBLICZENIE OPÓZNIENI WYSTĘPUJĄCYCH W ROZPATRYWANYM UKŁADZIE

21. Uwagi o definicji opóźnienia, wywołanego przewodnictwem cieplnym

Jeżeli chodzi o opóźnienie wywołane przewodnictwem cieplnym, to jako temperaturę porównawczą przyjmujemy temperaturę, wszędzie w danym ciele jednakową, jaką przyjmowałoby ciało bez uwzględnienia przewodnictwa cieplnego. Przy takim założeniu rozwiązano problem w [6].

22. Zmiana objętości bez uwzględnienia przewodnictwa cieplnego (pierwsze ogrzewanie)

Jeżeli pojemność cieplną układu przedstawionego na rys.1 oznaczymy przez K , współczynnik wymiany ciepła z otoczeniem przez $Sh\alpha$, gdzie S powierzchnia, h, α stałe, charakteryzujące proces wymiany ciepła (oznaczenia analogiczne do przyjętych w [6]) i oznaczymy układ rozpatrywany numerem $n + 1$ możemy zachowanie się układu pod wpływem zmian temperatury t otoczenia opisać równaniem

$$K \cdot dt_{n+1} / d\tau + S h\alpha(t_{n+1} - t) = 0 \quad (38)$$

przy czym t zmienia się według równania (3).

Rozwiązanie równania (38) możemy napisać w postaci

$$t_{n+1,k}(\tau) - t_{n+1,k}(0) = \sum_{s=1}^n A_{s,k} (e^{\alpha_s \tau} - 1) + A_{n+1,k} (e^{\alpha_{n+1} \tau} - 1)$$

(39)

przy czym

$$A_{s,k} = \bar{B}_{s,k} / (K\alpha_s / S h + 1)$$

$$A_{n+1,k} = \sum_{s=1}^n \bar{B}_{s,k} / (\alpha_{n+1} - \alpha_s) + \frac{\theta}{\alpha_{n+1}} + K t_{n+1,k}^{(0)} / S h \alpha \quad (40)$$

$$\alpha_{n+1} = - S h \alpha / K$$

Rozwiązanie to odnosi się do k-tego podprzedziału czasowego.

Stałe $\bar{B}_{s,k}$ zostały zdefiniowane za pomocą równania (3).

Podstawienie rozwiązania (39) do wzoru (21) daje

$$V_k = V_0 + (\beta_2 - 3\gamma_1) \sum_{\chi=1}^k \left[\sum_{s=1}^n A_{s,\chi} (e^{\alpha_s \tau} - 1) + \right. \\ \left. + A_{n+1,\chi} (e^{\alpha_{n+1} \tau} - 1) \right] V_{\chi-1} \quad (41)$$

Dla spełnienia warunku (35) potrzebny jest na ogół inny czas, niż w przypadku równania (7) i (21 do 27).

Jeżeli podobnie, jak w poprzednim przypadku przyjmujemy przybliżenie

$$e^{\alpha \tau'} = 1 + \alpha \tau' + \alpha^2 \tau'^2 / 2 \quad (42)$$

możemy napisać równanie (41) w postaci (31) z tym, że wielkości $\Delta V_k, \Delta^2 V_k$ otrzymujemy podstawiając w prawej stronie równania (41) w miejsce $e^{\alpha \tau'} - 1$, odpowiednią wartość α lub $\alpha^2 / 2$. Daje to

$$V_k = V_0 + (\beta_2 - 3\gamma_1) \tau' \cdot \Delta V_0 + (\beta_2 - 3\gamma_1) \tau'^2 \Delta^2 V_p$$

Jeżeli analogicznie napiszemy równanie odnoszące się do ϱ fazy, dodamy jeszcze indeks (ϱ).

23. Rozwiązanie równania (34) względnie (34') ze względu na czas

Jeżeli wartość lewej strony równania jest znana, możemy je napisać w postaci

$$f \tau^2 + d\tau' = g \quad (43)$$

przy czym

$$f = (\beta_2 - 3\gamma_1) \Delta^2 v_p, \quad d = (\beta_2 - 3\gamma_1) \Delta v_p, \quad g = v_{ko} - v_o \quad (44)$$

Rozwiązanie równania ma następującą postać

$$\tau'_{1,2} = (1/2 f)(-d \pm \sqrt{d^2 + 4 f g}) \quad (45)$$

przy czym ze względów fizykalnych oba rozwiązania są rzeczywiste.

Ekstremum funkcji (34) zachodzi dla

$$\tau' = -d / 2 f \quad (46)$$

Założenie nasze, że proces możemy opisać parabolą drugiego stopnia oznacza założenie przebiegu krzywej, symetrycznego względem ekstremum.

Wartość ekstremum wynosi

$$-d^2 / 4 f - g \quad (47)$$

Jeżeli utworzymy różnicę wartości τ i τ' , wyznaczonych z (46), otrzymamy opóźnienie spowodowane przewodnictwem cieplnym.

Współczynniki f i d równania (43) mają prosty sens fizyczny, mianowicie są to wartości drugiej i pierwszej pochodnej funkcji objętości, obliczonej dla chwili $\tau = 0$. Mały efekt otrzymamy, jeżeli w obu przypadkach będziemy mieli małe d , albo duże f .

Ponieważ wartość (46) powinna być dodatnia, wielkości d i f muszą mieć przeciwne znaki. O rodzaju ekstremum decyduje znak wielkości d . W przypadku d dodatniego, występuje maximum i f jest ujemne.

V. WPŁYW KONWEKCJI NA ROZKŁAD TEMPERATUR W CIECZY

Zjawiskiem, które komplikuje bardzo poważnie zagadnienie jest konwekcja. Zjawiska, jakie tu zachodzą, zwłaszcza w stanie nieustalonym, są bardzo skomplikowane i nie dają się ująć w sposób przejrzysty, bez stosowania przybliżonej teorii.

24. Kilka sposobów uwzględnienia wpływu konwekcji

Dwa przypadki są stosunkowo proste

a) Wpływ konwekcji można pominąć

Przypadek taki zachodzi, jeżeli jesteśmy dostatecznie blisko stanu ustalonego oscylacji, przy czym ich amplituda nie jest duża. Wtedy można stosować wyprowadzone w pracy wzory bez zmian. Co należy rozumieć pod słowami: "dostatecznie blisko" i "amplituda nie jest duża", wyjaśniono niżej, pod postacią pewnego kryterium.

b) Wpływ konwekcji jest bardzo duży, powodując dobre wymieszanie się cieczy

Przypadek ten może stosunkowo łatwo wystąpić w początkowych stadiach procesu, gdy amplituda oscylacji temperatury jest duża.

W przypadku tym powinny wystąpić największe różnice w stosunku do wyników teorii, podanej w pracy.

Jak należałoby zmienić w tym przypadku sformułowanie zagadnienia możemy zorientować się na podstawie rozpatrzonego u [1] przypadku dobrze mieszanej cieczy, styka-

jącej się z ciałem stałym. W pracy tej przyjęto warunek brzegowy na granicy ciecz-ciało stałe, który wyraża bilans cieplny i który w naszym przypadku możemy napisać w postaci następującej:

$$\int_{M_2} c_2 \frac{\partial t_2}{\partial \tau} dM_2 = \lambda_1 \int_S \frac{\partial t_1}{\partial r} dS \quad (48)$$

przy czym oznaczono:

- M_2 masa całkowita cieczy,
- c_2 ciepło właściwe cieczy,
- t_1 temperatura naczynia,
- t_2 temperatura cieczy,
- λ_1 współczynnik przewodzenia ciepła,
- S pole powierzchni wspólnej cieczy i ciała stałego.

Wzór możemy zinterpretować prosto fizykalnie. Pierwszy człon przedstawia ilość ciepła, pochłoniętą przez ciecz. W przypadku stałej przestrzennie temperatury t_2 możemy wzór napisać prościej, mianowicie

$$M_2 c_2 \frac{dt_2(a, \tau)}{d\tau}$$

Drugi człon przedstawia ilość ciepła dostarczoną przez ciało 1 przez przewodzenie. Założono przy tym, że przenikanie ciepła jest przestrzennie niejednostajne. W naszej uproszczonej teorii, ze względu na to, że temperatury założono zależne jedynie od promienia, człon ten możemy zastąpić następującym

$$\lambda_1 S \frac{t_1(a, \tau)}{\partial r}$$

Jako drugi warunek brzegowy na granicy ciecz-ciało stałe, fizykalnie zgodny z poprzednim, możemy przyjąć za [1] albo w postaci

$$t_1(a, \tau) = t_2(a, \tau)$$

jak przyjęto w tej pracy, albo też w postaci:

$$\frac{\partial t_1(a, \tau)}{\partial r} = - \frac{\alpha_2}{\lambda_1} \left[t_1(a, \tau) - t_{2. \text{śred.}}(\tau) \right]$$

przy czym

α_2 oznacza współczynnik wnikania ciepła.

W tak zmienionym sformułowaniu zagadnienia brzegowego należy oczekiwać tego samego charakteru rozwiązania, ze zmienionym jedynie pewnymi stałymi.

c) Przypadek ogólny

W [2,4,7] znajdujemy pewne dane, dotyczące konwekcji swobodnej i jej wpływu na przewodnictwo ciepłe.

Jeżeli oznaczymy

$$\alpha_2 h_2 / \lambda_2 = Nu_2$$

przy czym

α_2 współczynnik wnikania ciepła,

h_2 charakterystyczny dla danego ciała wymiar (dla kuli równy promieniowi)

λ_2 współczynnik przewodzenia ciepła

Nu_2 kryterium Nusselta, wtedy w przypadku konwekcji swobodnej mamy zależność

$$Nu_2 = C (Pr_2 Gr_2)^n$$

przy czym

Pr_2 kryterium Prandtla, wielkość rzędu 1,

Gr_2 kryterium Grasshofa.

Wszystkie wielkości, występujące w ostatnim równaniu należy obliczyć dla średniej temperatury ciała.

Według [4,7]

dla $Pr_2 Gr_2 < 10^{-3}$	$C = 0,45,$	$n = 0$
$= 10^{-3} \div 5 \cdot 10^2$	$C = 1,18,$	$n = 1/8$
$= 5 \cdot 10^2 \div 2 \cdot 10^7$	$C = 0,54,$	$n = 1/4$
$> 2 \cdot 10^7$	$C = 0,135,$	$n = 1/3$

Według [4] wielkości te są mało wrażliwe na kształt ciała.

Jak wynika z powyższych równań tylko w pierwszym przypadku ω_2 jest proporcjonalne do λ_2 , w pozostałych przypadkach zależność od λ_2 wyraża się potęgą $\lambda_2^{7/8}$, $\lambda_2^{3/4}$, $\lambda_2^{1/2}$, przy czym równocześnie występuje wpływ różnicy temperatur. Ostatnia zależność jest w poszczególnych przypadkach następująca:

$$(\Delta t)^0, \quad (\Delta t)^{1/8}, \quad (\Delta t)^{1/4}, \quad (\Delta t)^{1/3}$$

Aby otrzymać lepszy wgląd w wielkość Gr_2 , wygodnie jest przekształcić ją za [2]. Możemy ją mianowicie przedstawić następująco:

$$Gr_2 = V \cdot h^3 / \nu_z^3$$

Wprowadzono tu następujące oznaczenia:

$$V = \beta \cdot \Delta t$$

- β - współczynnik rozszerzalności objętościowej
- Δt - różnica temperatur
- ν_z - wymiar poprzeczny

W tabeli podajemy kilka danych liczbowych, wziętych z [2]

Temperatura °C	woda $\nu \cdot 10^6$ m	powietrze (1 atm) $\nu \cdot 10^6$ m
0	68,83	268
50	31,59	327
100	20,63	385

VI. DANE LICZBOWE

SŁUŻĄCE DLA ZILUSTROWANIA ROZDZIAŁÓW I-V

25. Przykład liczbowy

W celu zilustrowania, jakiego rzędu wielkości występują w podanych wyżej rozwiązaniach, obliczono pewne z nich, dobierając w możliwie szerokich granicach parametry wyjściowe [5]. Specjalny nacisk położono na wielkości występujące w równaniu (18).

Tabela I

Wielkości pomocnicze

Lp.	Materiał	t °C	ρ kg/m ³	c kcal/kg grd	λ kcal/m h grd	\bar{a} m ² /h
1.	srebro	20	10500	0,0559	353	0,602
2.	mosiądz	20	8600	0,091	100	0,13
3.	żelazo	0	7850	0,111	51	0,0585
4.	szamot	100	2000	0,20	1,0	0,0025
5.	bakelit	20	1270	0,38	0,200	0,00041
6.	rtęć	20	13550	0,0333	8	0,018
7.	woda	20	998,2	0,9980	0,515	5,16
8.	benzol	20	879,1	0,415	0,132	3,62
9.	powietrze	20	1,161	0,240	0,022	0,0787

Tabela II

Względne współczynniki przewodzenia ciepła

λ_1/λ_2	srebro	mo- siądz	żelazo	szamot	bakelit
rtęć	44,1	12,5	6,4	0,125	0,025
woda	609	194	99	1,94	0,388
benzol	2670	757	370	7,57	1,52
powietrze	16000	4545	2200	454	9,09

Tabela III

Względna pojemność cieplna

c_1^0/c_2^0	srebro	mosiądz	żelazo	szamot	bakelit
rtęć	1,296	0,182	0,193	0,887	1,07
woda	0,589	0,079	0,875	0,402	0,485
benzol	1,587	0,212	0,187	1,08	1,305
powietrze	2106	280,9	313	1436	1732

Tabela IV

Względny współczynnik przewodzenia temperatury

\bar{a}_1/\bar{a}_2	srebro	mosiądz	żelazo	szamot	bakelit
rtęć	33,4	7,22	3,25	0,11	0,138
woda	1160	193,8	113	4,84	0,79
benzol	1660	359,1	161	6,90	1,13
powietrze	7,64	1,65	0,743	0,031	0,0052

Tabela V

Wielkość $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1$

	srebro	mosiądz	żelazo	szamot	bakelit
rtęć	43,1*	11,5	5,4*	-0,875	- 0,975
woda	608	193	98	0,94	- 0,612
benzol	2669 *	756*	369	6,57	0,52
powietrze	15999	4544	2199	453	8,09

Tabela VI

Wielkość $(c_1 \rho_1 / c_2 \rho_2) \cdot (\lambda_1 / \alpha)$

$(c_1 \rho_1 / c_2 \rho_2) \cdot (\lambda_1 / \alpha)$	srebro	mosiądz	żelazo	szamot	bakelit
rtęć	114,3*	4,1	2,45*	0,13	0,053
woda	51,9	1,77	11,1	0,06	0,024
benzol	140*	4,77*	2,371	0,16	0,065
powietrze	185700	6320	3975	215,4	86,61
λ_1 / α	88,2	22,5	12,7	0,15	0,05

Uwagi do tabeli V i VI,

Wartości oznaczone * zostały przyjęte w dalszych obliczeniach. Występująca w tabeli VI w ostatnim wierszu wielkość wymaga objaśnienia, jest bowiem uzależniona od parametru α . Jako reprezentujący konwekcję, współczynnik ten jest zależny od bardzo wielu czynników. Na podstawie [2,4] możemy podać rząd jego wielkości, mianowicie mieści się on między 4 i 4000 kcal/m² h grd. W tabeli VI przyjęto wartość $\alpha = 4$ kcal/m² h grd. Inne wartości możemy otrzymać mnożąc λ_1 / α przez 10⁻¹ i 10⁻³.

Tabela VII zawiera współczynniki równań (P 18) i (P 19) dla dwu przypadków zmiennych wymiarów ciała, biorących udział w procesie. Ponieważ obrane wartości są raczej przypadkowe przeto na końcu przeprowadzono ogólną dyskusję zależności odpowiednich wielkości od wymiarów a i $b = a + \Delta$. (rys. 2a, 2b, 2c).

Tabela VII

Rodzaj przewodnika	$\frac{b a (\lambda_1/\alpha) (c_1 \rho_1/c_2 \rho_2)}{(b - \lambda_1/\alpha)}$		$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1$
	$b = 1 \text{ cm}$ $\Delta = 0,5 \text{ cm}$	$b = 2 \text{ cm}$ $\Delta = 0,5 \text{ cm}$	
srebro/rtęć	- 0,64	- 3,8	43,1
srebro/benzol	- 0,78	- 4,3	2669
mosiądz/benzol	- 0,106	- 0,63	756
żelazo/rtęć	- 0,096	- 0,58	5,4

Tabela VII (c.d.)

Rodzaj przewodnika	$(b - \lambda_1/\alpha) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a / \frac{\lambda_1}{\alpha} b$		$z = \sqrt{\bar{a}_2/\bar{a}_1} (b-a)/a$	
	$b = 1 \text{ cm}$ $\Delta = 0,5 \text{ cm}$	$b = 2 \text{ cm}$ $\Delta = 0,5 \text{ cm}$	$b = 1 \text{ cm}$ $\Delta = 0,5 \text{ cm}$	$b = 2 \text{ cm}$ $\Delta = 0,5 \text{ cm}$
srebro/rtęć	- 22	- 3,8	5,8	17,3
srebro/benzol	- 1334	- 4,3	40,7	122,2
mosiądz/benzol	- 333,9	- 567,2	19,0	56,9
żelazo/rtęć	- 2,7	- 4,1	1,8	5,4

26. Dyskusja wyrażenia $b(b-\Delta)/(b-\lambda_1/\alpha)$ w funkcji b

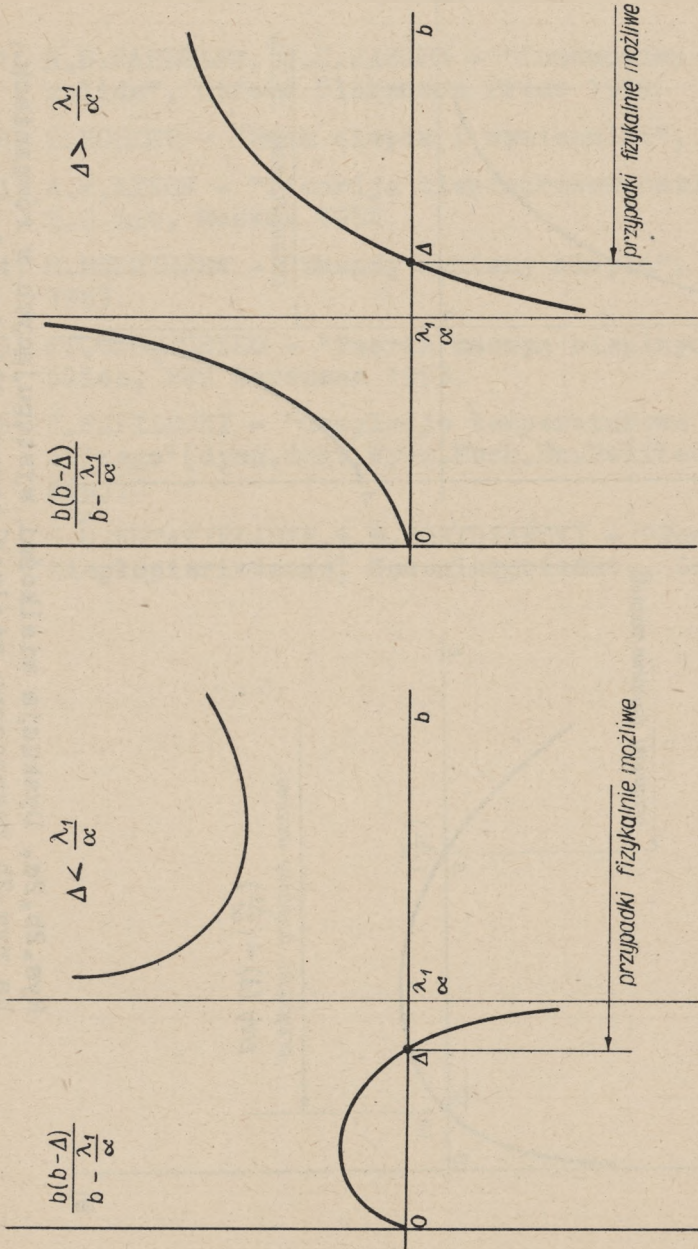
Na rysunku 2a przedstawiono orientacyjny przebieg funkcji. Posiada ona dwa miejsca zerowe $b = 0$ oraz $b = \Delta$ i staje się nieskończona ze zmianą znaku dla $b = \lambda_1/\alpha$. Są możliwe dwa przypadki, zależnie od spełnienia nierówności $\Delta \leq \lambda_1/\alpha$. Ze względów fizykalnych wchodzi w grę część wykresu, dla której $b > \Delta$.

27. Dyskusja wyrażenia $(b-\lambda_1/\alpha) \cdot (b-\Delta)/b$ w funkcji b

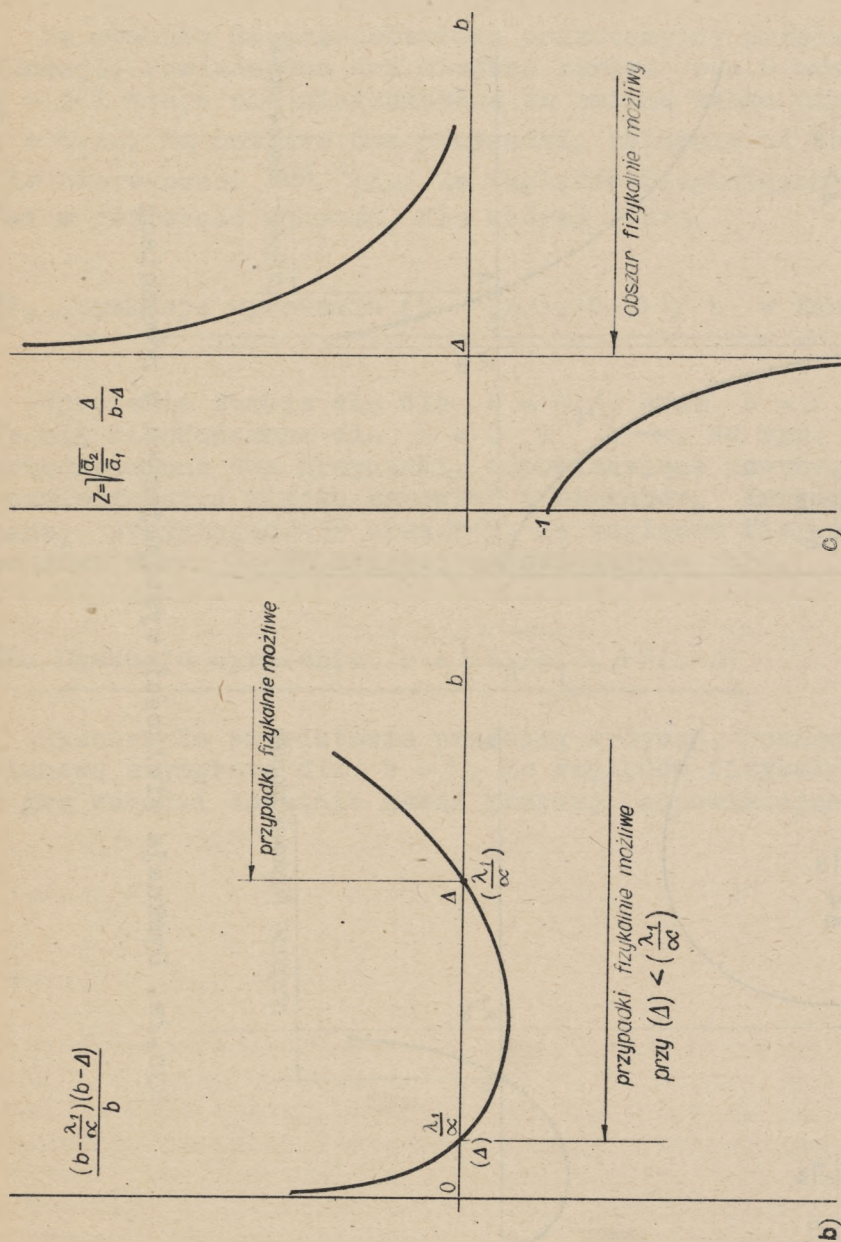
Wyrażenie zeruje się dla $b = \lambda_1/\alpha$ oraz $b = \Delta$ i staje się nieskończone dla $b = 0$ i $b \rightarrow \infty$. Na rys. 2b przedstawiono dwa przypadki, odpowiadające powyższemu rozmieszczeniu miejsc zerowych i biegunów. Krzywą opisano, przyjmując $\Delta < \frac{\lambda_1}{\alpha}$ oraz $\Delta > \frac{\lambda_1}{\alpha}$. Ze względów fizykalnych wchodzi w grę część krzywej odpowiadająca $b > \Delta$.

28. Dyskusja wyrażenia $z = \sqrt{\bar{a}_2/\bar{a}_1} \cdot \Delta/(b-\Delta)$

Rysunek 2c przedstawia przebieg krzywej. Posiada ona pionową asymptotę dla $b = \Delta$. Ze względów fizykalnych w grę wchodzi dodatnia gałąź krzywej, odpowiadająca $b > \Delta$.



Rys.2a. Dyskusja wielkości występujących w równaniach



Rys. 2b, 2c. Dyskusja wielkości występujących w równaniach.
Na rys. 2b zaznaczono miejsca zerowe dla dwu alternatyw.

LITERATURA

- [1] H.S.CARLSLAW, J.C.JAEGER - "Conduction of heat in solids", Oxford Clarendon Press 1959.
- [2] T.HOBLER - "Ruch ciepła i wymienniki", PWT W-wa 1959.
- [3] A.W.ŁYKOW - "Teorija ciepłoprowodnosti" Gos.Izd. T.T.Lit. Moskwa 1952.
- [4] M.MICHIEJEW - "Zasady wymiany ciepła", PWN W-wa 1953.
- [5] ST.OCHEDUSZKO - "Teoria maszyn cieplnych" t.I, Tablice, PWT Warszawa 1953.
- [6] J.SZPILECKI - "Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego" (dyss.dokt.Wydz.Mech.En.Politechniki Śląskiej).
- [7] S.S.KUTATIEŁADZE, W.M.BORYSZAŃSKI - "Sprawocznik po ciepłopieriedacze", Gosenergoizdat., Leningrad, 1958.

PRZYPISY

P I. Rozwiązanie układu równań (2-6) z uwzględnieniem uwag z punktu 6. metodą całki Laplace a

P I-1. Transformacja równań różniczkowych i warunków brzegowych

Oznaczamy parametr transformacji przez p , funkcje temperatur przetransformowane przez $\theta_{i,k}$, $i = 1, 2$, przetransformowaną funkcji $t(\tau)$ przez $T(p)$. Układ równań (2-6) po transformacji przybiera następującą postać

$$p r_k \theta_{1,k} - r_k t_{1,0,k} = \bar{a}_1 \frac{d^2}{dr_k^2} [r_k \theta_{1,k}], \quad (P-1)$$

$$a_k \leq r_k \leq b_k$$

$$p r_k \theta_{2,k} - r_k t_{2,0,k} = \bar{a}_2 \frac{d^2}{dr_k^2} [r_k \theta_{2,k}] \quad \forall \quad (P-2)$$

$$0 \leq r_k \leq a_k$$

dla $r_k = b_k$ (P-3)

$$\frac{\lambda_1}{\alpha} \cdot \frac{d\theta_{1,k}}{dr_k} + \theta_{1,k} = T(p)$$

dla $r_k = a_k$

$$\theta_{1,k} = \theta_{2,k} \quad (P-4)$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{d\theta_{1,k}}{dr_k} = \frac{d\theta_{2,k}}{dr_k}$$

dla $\underline{r_k = 0}$

$$\frac{d\theta_{2,k}}{dr_k} = 0 \quad (P-5)$$

W rozwiązaniu układu równań (P 1-5) oznaczamy

$$\sqrt{p/\bar{a}_i} = p_i, \quad i = 1, 2$$

Rozwiązanie możemy napisać w postaci

$$r_k \theta_{i,k} = A_{1,i,k} e^{+p_i r_k} + A_{2,i,k} e^{-p_i r_k} + f_{i,k}(r_k) \quad (P-6)$$

$i = 1, 2$

przy czym

$$f_{i,k}(r_k) = - e^{p_i r_k} / r_k \int r_k t_{i,o,k} \cdot e^{-p_i r_k} \cdot dr_k / 2 p_i \bar{a}_i + \quad (P-7)$$

$$+ e^{-p_i r_k} / r_k \int r_k t_{i,o,k} \cdot e^{p_i r_k} \cdot dr_k / 2 p_i \bar{a}_i$$

Stałe $A_{1,i,k}$ $A_{2,i,k}$ wyznaczamy z warunków (P 3-5).

Przy wykonywaniu całkowania w równości (P 7) przedkujemy analitycznie rozwiązania, ważne w przedziale $(0, a_{k-1})$, (a_{k-1}, b_{k-1}) , przyjmując w nich dla $t_{i,o,k}$, $i = 1, 2$ te same wyrażenia analityczne.

W przypadku, gdy $t_{i,o,k} = \text{const}$, $i = 1, 2$, otrzymujemy

$$f_{i,k}(r_k) = r_k t_{i,o,k} / p \quad (P-7')$$

P I-2. Rozwiązanie przetransformowane

Podstawienie wyrażeń (P 6) do równań (P 3-5) i eliminacja stałych $A_{1,i,k}$, $A_{2,i,k}$ daje następujące rozwiązania przetransformowane

$$\begin{aligned}
 r_k^{\theta} \cdot M_k = F_{1,k} & \left[- \left\{ a_k p_2 \operatorname{ch} [p_2 a_k] - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \cdot \operatorname{sh} [p_2 a_k] \right\} \cdot 2 \operatorname{sh} [p_1 (a_k - r_k)] + \right. \\
 & \left. + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_k p_1 \operatorname{sh} [p_2 a_k] \cdot 2 \operatorname{ch} [p_1 (a_k - r_k)] \right] + \\
 & + F_{2,k} \left[\frac{\lambda_1}{\alpha} b_k p_1 \cdot 2 \operatorname{ch} [p_1 (b_k - r_k)] + \right. \\
 & \left. + \left(b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha} \right) \cdot 2 \operatorname{sh} [p_1 (b_k - r_k)] \right] + M_k \cdot f_{1,k}(r_k)
 \end{aligned} \tag{P-8}$$

$$\begin{aligned}
 r_k^{\theta} \cdot M_k \cdot \operatorname{sh} [p_2 a_k] = 2 & \left\{ F_{1,k} \cdot \right. \\
 & \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_k p_1 \operatorname{sh} [p_2 a_k] + F_{2,k} \left[\frac{\lambda_1}{\alpha} \cdot b_k p_1 \cdot \right. \\
 & \left. \left. \cdot \operatorname{ch} [p_1 (b_k - a_k)] + \left(b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha} \right) \cdot \operatorname{sh} [p_1 (b_k - a_k)] \right] - \right. \\
 & \left. - M_k [f_{2,k}(a_k) - f_{1,k}(a_k)] \right\} \cdot \operatorname{sh} [p_2 r_k] + \\
 & + f_{2,k}(r_k) M_k \operatorname{sh} [p_2 a_k]
 \end{aligned} \tag{P-9}$$

przy czym oznaczono

$$F_{1,k}(p) = b_k^2 T_k(p) - \frac{\lambda_1}{\alpha} \left[b_k \frac{df_{1,k}(b_k)}{dr_k} - f_{1,k}(b_k) \right] - b_k f_{1,k}(b_k) \quad (P-10)$$

$$F_{2,k}(p) = f_{2,k}(a_k) \cdot a_k p_2 \operatorname{ch} [p_2 a_k] - f_{1,k}(a_k) \cdot \left[a_k p_2 \operatorname{ch} [p_2 a_k] - \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \cdot \operatorname{sh} [p_2 a_k] \right] - a_k \operatorname{sh} [p_2 a_k] \cdot \left[\frac{df_{2,k}(a_k)}{dr_k} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{df_{1,k}(a_k)}{dr_k} \right] \quad (P-11)$$

$$M_k = \frac{\lambda_1}{\alpha} b_k p_1 \left[a_k p_2 \operatorname{ch} [p_2 a_k] - \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \cdot \operatorname{sh} [p_2 a_k] \right] \cdot 2 \operatorname{ch} [p_1(b_k - a_k)] + b_k p_1 \cdot \frac{\lambda_1^2}{\alpha \lambda_2} a_k p_1 \cdot \operatorname{sh} [p_2 a_k] \cdot 2 \operatorname{sh} [p_1(b_k - a_k)] + \left(b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}\right) \left[a_k p_2 \cdot \operatorname{ch} [p_2 a_k] - \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \cdot \operatorname{sh} [p_2 a_k] \right] \cdot 2 \operatorname{sh} [p_1(b_k - a_k)] + \left(b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}\right) \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_k \cdot p_1 \operatorname{sh} [p_2 a_k] \cdot 2 \operatorname{ch} [p_1(b_k - a_k)] \quad (P-12)$$

W przypadku funkcji przedstawionej za pomocą równania (1) otrzymujemy przetransformowaną

$$T_k(p) = \sum_{s=1}^n \bar{B}_{s,k} / (p - \alpha_s) + \theta/p \quad (P-13)$$

P I-3. Dyskusja rozwiązań przetransformowanych

Na podstawie (P 8-12) rozwiązania przetransformowane są funkcjami parametrów p_i , $i = 1, 2$ i wskutek tego - gdy p przybiera wartości zespolone, są funkcjami algebraicznymi parametru p , posiadają więc punkty rozgałęzienia. Do takich funkcji nie stosuje się twierdzenie o residuach w normalnie stosowanej postaci. Wyjątek stanowią przypadki [3], gdy licznik i mianownik funkcji algebraicznej są parzyste w p_i albo, jeżeli są nieparzyste - ich iloraz jest funkcją parzystą. Ponieważ w naszym przypadku warunki te są spełnione, możemy do nich stosować twierdzenie o residuach, z tym że równanie charakterystyczne posiada w tym przypadku nieskończenie wiele pierwiastków.

P II. Przejsście do funkcji czasowych

P II-1. Wyznaczenie wartości własnych problemu

Otrzymujemy je przez zerowanie mianowników (P 8 i 9). Wartości własne problemu są trójakiego rodzaju. Oznaczono je następująco:

- 1) $p = \alpha_s$, $s = 1, 2 \dots n$. Są to wartości własne, przynależne do funkcji $T_k(p)$.

Nie ulegają one zmianie przy przejściu od jednego przedziału czasowego do drugiego.

- 2) $p = \alpha_w$, $w = 1, 2 \dots$ pierwiastki równania

$$\text{sh} [p_2 a_k] = 0 \quad (P-14)$$

Położenie tych pierwiastków jest zmienne z indeksem k ,

W dalszym ciągu nie uwzględniamy ich, ponieważ w rozwinięciu Heaviside'a współczynniki przy odpowiednich członach są równe zero.

- 3) $p = \alpha_v$, $v = 1, 2 \dots$ pierwiastki równania $M_k = 0$,
zmiennie z indeksem k .

Aby wykazać, że równanie posiada tylko pierwiastki α_v -urojone, podstawiamy

$$p_r = i m_r, \quad r = 1, 2 \quad i = \sqrt{-1}$$

i jeżeli założenie jest słuszne, otrzymujemy rzeczywiste wartości dla m_r . Przynależne do nich wartości oznaczamy $p_{1,v}$, $p_{2,v}$, α_v .

- 4) $p = 0$ wyznacza stan ustalony temperatur. Obliczenie odpowiednich współczynników rozwinięcia Heaviside'a wymaga przejścia granicznego, ponieważ w tym przypadku zeruje się równocześnie licznik i mianownik funkcji (P 8-9).

P II-2. Obliczenie pierwiastków równania $M_k = 0$

Równanie (P-12) doprowadzamy do postaci, wygodniejszej do graficznego rozwiązania

$$\begin{aligned} m_1(b_k - a_k) / \operatorname{tg}[m_1(b_k - a_k)] &= -(b_k - a_k) \cdot \\ &\cdot \left[m_2 a_k (b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}) / \operatorname{tg} m_2 a_k - b_k a_k m_1^2 \frac{\lambda_1^2}{\alpha \lambda_2} \cdot \right. \\ &\cdot (b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}) (\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1) \Big] / \left[m_2 a_k b_k / \operatorname{tg} m_2 a_k + \right. \\ &\left. + (b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_k + \frac{\lambda_1}{\alpha} b_k (\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1) \right] \quad (\text{P-15}) \end{aligned}$$

Kładąc lewą względnie prawą stronę równania równą y , znajdziemy pierwiastki równania (P-15) jako przecięcia otrzymanych w ten sposób w płaszczyźnie $(y, m_2 a_k)$ względnie $(y, m_1 (b_k - a_k))$ krzywych.

Z obu stron równania występują funkcje

$$y = \mu / \operatorname{tg} \mu \quad (\text{P-16})$$

przy czym

$$\mu = m_2 a_k \quad \text{lub} \quad \mu = m_1 (b_k - a_k)$$

Miejsca zerowe tego rodzaju funkcji są wyznaczone przez $\mu = (2u + 1) \frac{\pi}{2}$ dla których $\operatorname{tg} \mu$ staje się nieskończenie duży. Bieguny funkcji są wyznaczone przez $\mu = u\pi$, $u = 0, 1, 2, \dots$, dla których $\operatorname{tg} \mu = 0$. Dla $\mu = 0$ funkcja przybiera wartość 1. Powyższe wartości pozwalają nakreślić orientacyjny przebieg krzywej. Jest ona podobna do funkcji $\operatorname{ctg} \mu$, z tym że w miarę wzrostu argumentu, przebieg staje się bardziej stromy i wartość dla $\mu = 0$ równa się 1. Za pomocą krzywych (P-16) budujemy krzywą prawej strony równania (P-15). Ma ona następującą postać:

$$y = - (b_k - a_k) \left[m_2 a_k (b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}) / \operatorname{tg} m_2 a_k - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_1}{\alpha} b_k a_k m_1^2 \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + (b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}) (\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1) \right] / \\ / \left[m_2 a_k b_k \frac{\lambda_1}{\alpha} / \operatorname{tg} m_2 a_k + (b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_k + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_1}{\alpha} b_k (\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1) \right] \quad (\text{P-17})$$

Miejsca zerowe krzywej (P-17) wyznaczamy z równania

$$m_2 a_k / \operatorname{tg} m_2 a_k = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + b_k a_k \frac{\lambda_1^2}{\alpha \lambda_2} m_1^2 / (b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}) \quad (\text{P-18})$$

Bieguny funkcji wyznaczamy za pomocą równania

$$m_2 a_k / \operatorname{tg} m_2 a_k = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - (b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}) \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_k / \frac{\lambda_1}{\alpha} b_k \quad (\text{P-19})$$

Oba równania rozwiązujemy graficznie na rysunku 3. Możliwych jest kilka przypadków, zależnie od znaku wyrażeń

$$1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{ i } b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}.$$

Aby nie komplikować dyskusji rozpa-

trywaniem zbytecznych przypadków, rozpatrzono tylko te przypadki, które odpowiadają danym, wyliczonym w przykładzie zamieszczonym na końcu, odpowiadającym szerokiemu wachlarzowi zmienności parametrów występujących w praktyce.

Wynikają stąd dwa przypadki, odpowiadające na rysunku 3 przecięciu się krzywych b2) oraz Ic) lub IIc). To wskazuje drogę, jak postępować w przypadku innych kombinacji.

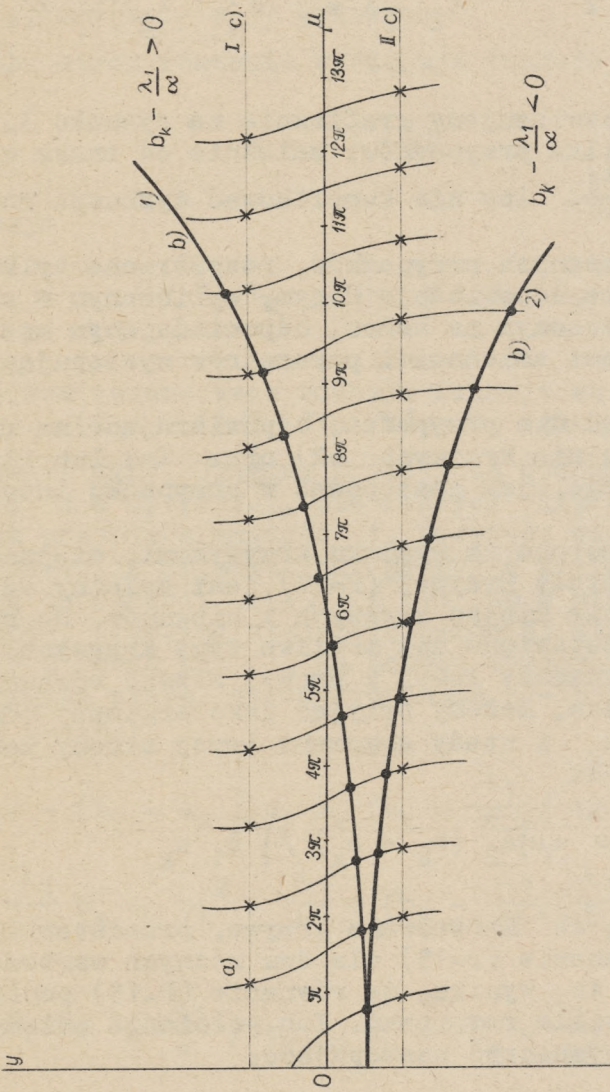
Bieguny oznaczono na rysunku krzyżykami, miejsca zerowe kółkiem. Kształt krzywej (P-17) jest zależny od wzajemnego położenia miejsc zerowych i biegunów. Na rysunku 4a, 4b przedstawiono dwa możliwe typy krzywych.

Ponieważ argumenty lewej i prawej strony równania (P 1-15) są różne, możemy przyjąć jako argument odniesienia $\mu = m_2 a_k$ i wtedy argument lewej strony możemy napisać w postaci

$$z \mu = \mu \sqrt{\bar{a}_2} (b_k - a_k) / \sqrt{\bar{a}_1} a_k$$

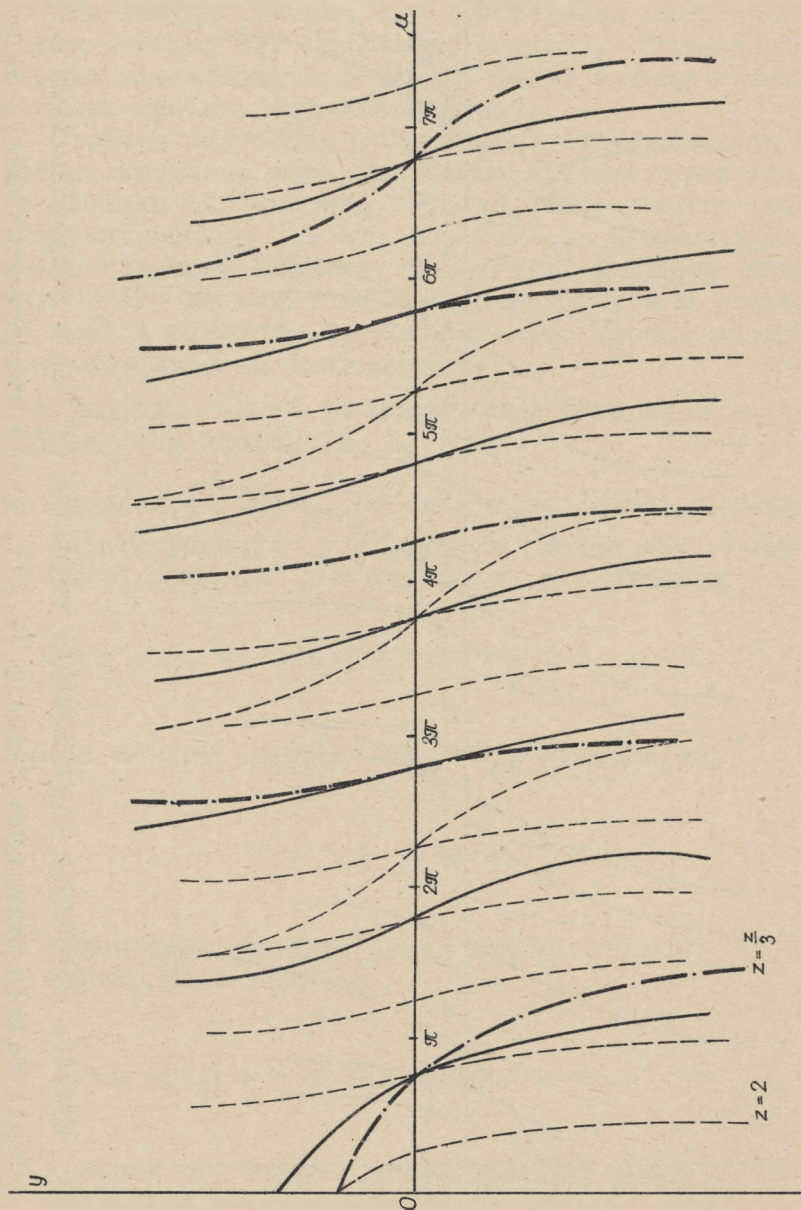
Na rysunku 4a, 4b narysowano krzywe, przedstawiające lewą stronę równania (P-15) dla dwu różnych wartości z. Z rysunku 4a, 4b wynika, że równanie (P-15) posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Ich położenie możemy orientacyjnie wyznaczyć następująco:

Jako punkty orientacyjne przyjmujemy punkty $\mu = u\pi$, $u = 1, 2 \dots$ odpowiadające miejscom zerowym funkcji lewych stron równań (P-18) i (P-19). Miejsca zerowe i bieguny funkcji prawej strony równania (P-15) mogą leżeć albo po jednej stronie albo po przeciwnych stronach punktów $\mu = u\pi$. Leżą one niesymetrycznie. Stąd wynika w pierwszym przypadku kształt krzywych podobny do funkcji $u/\operatorname{tg} u$ z ry-

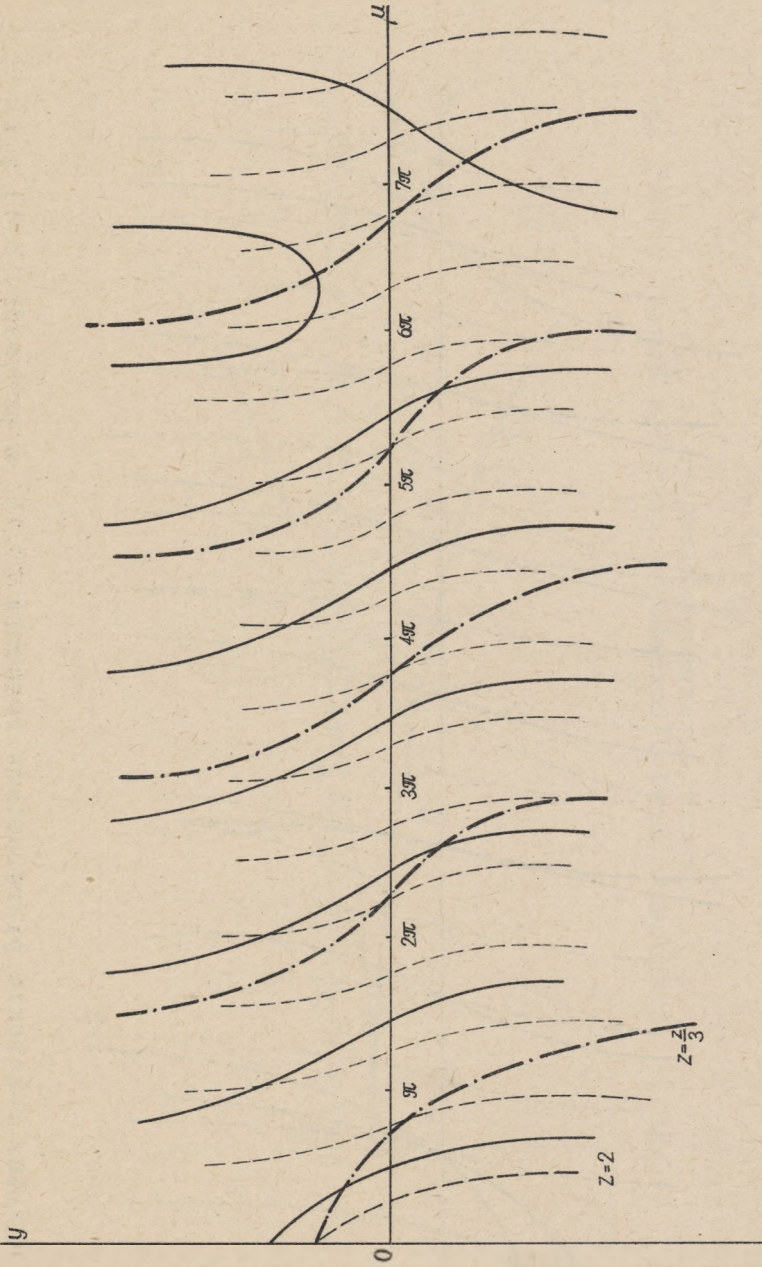


Rys.3. Wyznaczenie miejsc zerowych i biegunów prawej strony równania charakterystycznego (P 15)

a) $y = \mu / \text{tg} \mu$; b) $y = (1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) + \frac{\frac{\lambda_1}{\alpha} a_k b_k \lambda_2 \bar{a}_1 m_2^2 / \bar{a}_2}{b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}}$; c) $y = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{(b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha}) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_k}{\frac{\lambda_1 b_k}{\alpha}}$



Rys.4a. Położenie pierwiastków równania (P 15) w przypadku b 1) c I)
 Linia ciągłą oznaczono funkcje (P 17). Linia przerywaną oznaczono funkcję
 $y = \mu z / \text{tg} \mu z$ dla dwu wartości z



Rys.4b. Położenie pierwiastków równania (P 15) w przypadku b 2) c II)
 Linia ciągłą oznaczono funkcję (P 17), linią przerywaną funkcję $y = uz / tg uz$
 dla dwu wartości z

sunku 3. W drugim przypadku z chwilą przecięcia paraboli prawej strony równania (P-18) z prostą prawej strony równania (P-19), charakter krzywych ulega zmianie (rys. 4b).

Obserwacja rysunku 4a i 4b pozwala zorientować się, jakie powinny być spełnione warunki, by nastąpiło przecięcie się krzywych prawej i lewej strony równania (P-15). Warunek ogólny jest następujący:

Odcinek osi odciętych, zawarty między dwoma biegunami jednej krzywej, musi znajdować się wewnątrz analogicznego odcinka dla krzywej drugiej. Jako punkty orientacyjne obieramy punkty $\mu = k\pi$, $k = 1, 2 \dots$. Wyznaczają one położenie biegunów krzywej $y = \mu/\operatorname{tg}\mu$. Ponieważ bieguny krzywej (P-17) są względem nich przesunięte o pewne zmienne na ogół z numerem k , dodatnie lub ujemne odcinki δ_i , możemy odróżnić tu trzy przypadki:

Przyjmujemy $z > 1$ (w przeciwnym przypadku należy zamienić ze sobą liczby k i m).

1) Rysunek 4a. δ_1, δ_2 są dodatnie. Jeżeli w k -tym przedziale funkcji $y = \mu/\operatorname{tg}\mu$ mieści się m -ty przedział funkcji $y = \mu z/\operatorname{tg}\mu z$ otrzymujemy

$$k\pi z + \delta_1 z < m\pi < (k+1)\pi z + \delta_2 z - \pi \quad (\text{P-20})$$

Jeżeli możemy przyjąć $\delta_1 \approx \delta_2$, otrzymujemy

$$k z < m < (k+1) z - 1 \quad (\text{P-21})$$

2) Rysunek 4b, krzywe lewej części rysunku. Tu $\delta_1 < 0$, możemy więc napisać

$$k\pi z - |\delta_1| z < m\pi < (k+1)\pi z + \delta_2 z - \pi \quad (\text{P-22})$$

3) Rysunek 4b, krzywe prawej części rysunku. Tu jako przedział odniesienia możemy przyjąć przedział bez przesunięć, gdyż ze względu na kształt krzywych, przesunięcia nie powinny odgrywać roli. Otrzymujemy w tym przypadku warunek (P-21).

Z faktu, że istnieją rzeczywiste rozwiązania m_i , wynika fakt, że odpowiednie p muszą być ujemne, ponieważ $p/\bar{a}_i = -m_i^2$. Rozwiązania więc problemu są stateczne.

P II-3. Obliczenie temperatur stanu ustalonego

Stan ustalony temperatur t_1 i t_2 zależy od stanu ustalonego temperatury t . Jeżeli przyjmiemy ją jak podano we wstępie taką, że jej transformowana jest funkcją meromorficzną, wtedy w przypadku układów statecznych fizykalnie dających się zrealizować, postać tej ostatecznej możemy przyjąć jak w (P-13).

Stan ustalony znajdujemy w ten sposób, że w wyrażeniach (P-8) i (P-9) wybieramy te czynniki, które mają w mianowniku czynnik p .

Jak wykazano dalej, funkcje $f_{i,k}(r_k)$, czy to odpowiadające $t_{i,o,k}$ stałym, czy to zmiennym z czasem - zawierają zawsze takie czynniki. W pierwszym przypadku są one kształtu $r_k t_{i,o,k}$ w drugim $r_k \theta$. Postępowanie w obu przypadkach jest jednakowe.

Ze względu na to, że liczniki i mianowniki wyrażeń (P-8) i (P-9) zerują się dla $p = 0$, wskutek czego wyrażenia te stają się nieoznaczone, w celu usunięcia nieoznaczoności rozwijamy licznik i mianownik tych wyrażeń w szereg potęg p_i i urywamy szereg na pierwszych potęgach.

Otrzymujemy w ten sposób następujące wyrażenia na mianowniki

$$2 b_k^2 p_{1,k} p_{2,k} a_k \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \text{lub} \quad 2 b_k^2 p_{1,k} p_{2,k} a_k^2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Dla liczników otrzymujemy

$$2 F_{1,k} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_k r_k p_{1,k} p_{2,k} + 2 F_{2,k} p_{1,k} \left[\frac{\lambda_1}{\alpha} b_k + \left(b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha} \right) (b_k - r_k) \right]$$

lub

$$2 r_k p_{1,k} p_{2,k} \left[F_{1,k} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_k^2 p_{2,k} + F_{2,k} \left[\frac{\lambda_1}{\alpha} b_k + \left(b_k - \frac{\lambda_1}{\alpha} \right) (b_k - a_k) \right] \right]$$

przy czym

$$F_{1,k} = b_k^2 \theta - p \left[b_k \frac{df_{1,k}(b_k)}{dr_k} - f_{1,k}(b_k) \right] - b_k p f_{1,k}(b_k)$$

$$F_{2,k} = a_k p p_{2,k} f_{2,k}(a_k) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_k p p_{2,k} f_{1,k}(a_k) - a_k^2 p p_{2,k} \left[\frac{df_{2,k}(a_k)}{dr_k} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{df_{1,k}(a_k)}{dr_k} \right]$$

Dla obu temperatur we wszystkich przedziałach czasowych otrzymujemy wartość ustaloną θ , równą wartości ustalonej temperatury otoczenia t .

P II-4. Uwagi dotyczące krotności pierwiastków równania charakterystycznego i związanej z tym postaci rozwiązania

Jak wynika ze sposobu znalezienia miejsca zerowego funkcji (P-12) pierwiastki są pojedyncze. Podobnie wynika z założenia o funkcji (P-13), że pierwiastki α_s są pojedyncze. W tych warunkach mogą wystąpić najwyżej bieguny dwukrotne, jeżeli jakies α_v jest równe jakiemuś α_s .

Niewygoda metody jest to, że postać równania $M_k(\alpha_v) = 0$ zmienia się z indeksem k , wskutek zmiany wymiarów układu. Ponieważ jednak współczynniki rozszerzalności ciał stałych i cieczy są bardzo małe, nawet przy zmianach

temperatur rzędu kilkudziesięciu stopni, człony poprawkowe są małe. Możemy więc tak przekształcić mianowniki $M_k(\alpha_v)$, by otrzymać mianownik wspólny dla wszystkich podprzedziałów. Jeżeli ograniczymy się do pierwszych potęg małych z założenia członów poprawkowych, możemy napisać

$$1/M_k(\alpha_v) = 1/M_0(\alpha_v) - \Delta_k M_0(\alpha_v) / [M_0(\alpha_v)]^2 \quad (P-23)$$

przy czym $\Delta_k M_0(\alpha_v)$ oznacza człon poprawkowy, zależny od indeksu k .

Ten sposób pisania mianownika wprowadza bieguny podwójne, ze względu na występowanie mianownika $M_0(\alpha_v)$ w kwadracie. Gdybyśmy chcieli osiągnąć większą dokładność, moglibyśmy uwzględnić dalsze człony rozwinięcia.

W dalszym ciągu więc będziemy przyjmować α_s pojedyncze, α_v mogą być dwukrotne, jeżeli żadne α_s nie jest równe żadnemu α_v i trzykrotne, jeżeli taka równość zachodzi.

Występowanie biegunów wielokrotnych oznacza wprowadzenie w rozwiązaniu członów sekularnych w postaci wielomianów t przy funkcjach wykładniczych. Ze względu jednak na własności funkcji wykładniczej człony te nie wpłyną ujemnie na stateczność układu.

P-II.5. Postać rozwiązania

Za pomocą indukcji zupełnej możemy podać postać rozwiązania problemu dla k -tego podprzedziału:

$$t_{i,k}(r_k, \tau) = \sigma_{i,1,k}(r_k, \tau) + \sigma_{i,2,k}(r_k, \tau) + \\ + t_{i,k-1}(r_k, \tau_k + \tau) \quad (P-24)$$

$$i = 1, 2, \quad k = 1, 2 \dots \dots$$

$$t_{i,0}(r_0, \tau) = \sigma_{i,1,0}(r_{c,0}, \tau) + \sigma_{i,2,0}(r_0, \tau) + \theta \quad (P-24)$$

przy czym $\tau_0 = 0$. Symbol τ_k dla $k = 1, 2 \dots$ oznacza końcowe chwile poszczególnych podprzedziałów.

Dla oszczędności miejsca nie podajemy tu znaczenia $\sigma_{i,x,k}(r_k, \tau_k + \tau)$. Występują one w równaniach (7) i (18).

Влияние теплопроводности на изменения объема двух-слоистой сферической системы

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается двух-слоистая сферическая береговая проблема теплопроводности при изменениях температуры окружающих тел и решается при помощи интеграла Лапласа. Главное затруднение при решении проблемы в том, что вследствие тепловой расширяемости, границы системы подвижны.

Вследствие громоздкости конечных результатов делается приближение, состоящее в том, что экспоненциальные функции решения заменяются их рядами до 2-их мощностей включительно.

Потом вычисляются опоздания системы, вследствие теплопроводности, если система употребляется как н. п. контактный термометр, который регулирует изменения температуры окружающих тел. В конце вычисляется влияние конвекции в двух частных случаях.

Численный пример дает ориентировку об влиянии некоторых, содержащихся в работе, параметров.

В дополнении даются подробности метода решения проблемы.

The influence of heat conduction on the volume variations
in the two layer spherical body

SUMMARY

In the paper is the two layer spherical boundary problem of heat conduction under the influence of ambient temperature variations by use of Laplace integral solved. The difficulty of the problem is, that the boundaries of the body are in spite of thermal expansion mobile.

The end formulae are tedious. In the applications is the approximation made, that the exponentials are in the solution of problem in power series including squares expanded.

The solutions were in the discussion of retardations in a system as contact thermometer used, that governs the ambient temperature oscillations.

At the end is the problem of heat convection discussed in two particular cases.

Some of quantities, appearing in the paper, are in the numerical exemple discussed.

The appendix gives the complete solution method.



BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej

P 3349 | 61

