ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: AUTOMATYKA z. 36 Nr kol. 481

Zbigniew Bortliczek

O BEZWYMIAROWYCH CHARAKTERYSTYKACH DYNAMICZNYCH SILNIKÓW WYKONAWCZYCH PRĄDU STAŁEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę właściwości dynamicznych silnika wykonawczego prądu stałego sterowanego twornikowo - metodą wielkości względnych. Wyprowadzono równania bezwymiarowych charakterystyk dynamicznych silnika w ogólnym przypadku obciążenia tłumieniem zewnętrznym i stałym momentem. Podano przykłady bezwymiarowych charakterystyk dynamicznych.

1. Wstęp

Silniki elektryczne prądu stałego stosowane w układach automatyki stanowią - obok silników prądu przemiennego - podstawową grupę elektrycznych sterowanych elementów wykonawczych. Z uwagi na właściwości ruchowe i regulacyjne wyróżnia się tu korzystnie silnik obcowzbudny, dobrze spełniający większość wymagań stawianych silnikom wykonawczym.

Teoria obcowzbudnego silnika wykonawczego prądu stałego posiada szereg opracowań. Najbardziej rozpowszechnione jest ujęcie J.S. CZECZETA, przedstawione w monografii [2]. Sposób analizy właściwości statycznych silnika metodą wielkości względnych wraz z wynikami w postaci rodzin bezwymiarowych charakterystyk statycznych przytaczany jest za CZECZETEM przez wielu - szczególnie polskich - autorów opracowań z dziedziny elektromaszynowych elementów automatyki (por. np. [1], [6], [7], [8]).

Istnieje możliwość zastosowania metody wielkości względnych do analizy właściwości dynamicznych silników wykonawczych prądu stałego. Przykład takiego podejścia znaleźć można w publikacji Z. PASKA [5], dotyczącej szczególnego przypadku silnika nieobciążonego. Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie równań bezwymiarowych charakterystyk dynamicznych dla ogólnego przypadku silnika wykonawczego prądu stałego obciążonego tłumieniem zewnętrznym i stałym momentem obciążenia.

2. Równania wyjściowe

Obcowzbudny silnik wykonawczy prądu stałego w wykonaniu najczęściej spotykanym posiada dwa niezależne obwody elektryczne:

- obwód uzwojenia wzbudzającego, umieszczonego na stojanie,
- obwód uzwojenia twornika, umieszczonego na wirniku i wyprowadzonego na zewnątrz przez komutator i pojedynczy układ szczotek.

Zakładając, że obwody elektryczne silnika są liniowe, a działanie komutatora jest takie, iż uzwojenie twornika jest uzwojeniem pseudo-stacjonarnym o osi elektrycznie prostopadłej do osi uzwojenia wzbudzającego, można przyjąć, że rozpatrywany przetwornik stanowi szczególny przypadek uogólnionej maszyny elektrycznej KRONA [3]. Stan równowagi dynamicznej silnika opisują w związku z tym równania następujące (por. np. [4]):

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} \\ U_2 &= R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + n\,\omega_r\, L_{12m} I_1 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

oraz

$$M_e - M_z = B\,\omega_r + J\frac{d\omega_r}{dt}, \tag{2}$$

gdzie:

$$M_e = nL_{12m} I_1 I_2 . \tag{3}$$

W równaniach (1), (2), (3) przyjęto oznaczenia zmiennych i parametrów jak na rys. 1a:

U_1, U_2 – napięcia doprowadzone do uzwojeń (wartości chwilowe),

I_1, I_2 – prądy w uzwojeniach (wartości chwilowe),

R_1, R_2 – rezystancje uzwojeń,

L_1, L_2 – indukcyjności własne uzwojeń,

L_{12m} – największa wartość indukcyjności wzajemnej uzwojeń,

oraz

ω_r – prędkość kątowa wirnika (wartość chwilowa),

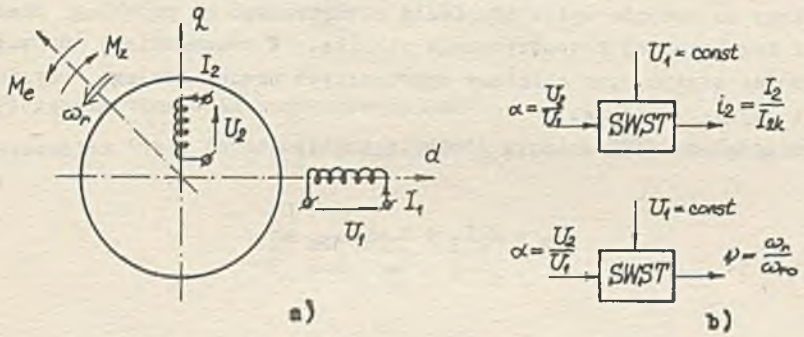
M_e – moment elektromagnetyczny wytworzony w silniku (wartość chwilowa),

M_z - moment obciążenia (wartość chwilowa),

B - współczynnik tłumienia zewnętrznego,

J - moment bezwładności mas wirujących.

Indeksy 1, 2 przy oznaczeniach wskazują, że dana wielkość odnosi się do uzwojenia wzbudzającego (indeks 1) lub uzwojenia twornika (indeks 2), n oznacza liczbę par biegunów, t - czas.



Rys. 1. Obcowzbudny silnik wykonawczy prądu stałego sterowany twornikowo a) schemat ideowy, b) schemat funkcjonalny

Równania (1), (2), (3) obowiązują niezależnie od sposobu sterowania silnika. W dalszym ciągu rozpatrywany będzie przypadek sterowania twornikowego (por. [2]). W równaniach wyjściowych można zatem uwzględnić, że:

$$U_1 = \text{const} \tag{4}$$

oraz

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \text{const} \tag{5}$$

Końcowa postać równań wyjściowych przyjmuje teraz postać następującą:

$$U_2 = R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + n\,\omega_r L_{12m} \frac{U_1}{R_1} \tag{6}$$

oraz

$$M_e - M_z = B\,\omega_r + J\,\frac{d\,\omega_r}{dt}\,, \tag{7}$$

gdzie:

$$M_e = nL_{12m} \frac{U_1}{R_1} I_2 \, . \tag{8}$$

3. Właściwości regulacyjne SWST[x)]

Zbadamy na wstępie wpływ tłumienia zewnętrznego na przebieg charakterystyki regulacyjnej rozpatrywanego silnika. W rozważaniach dotyczących właściwości statycznych silników wykonawczych prądu stałego zagadnienie to jest zwykle pomijane.

Stan ustalony SWST opisują równania następujące:

$$U_2 = R_2 I_2 + n\,\omega_r L_{12m} \frac{U_1}{R_1} \tag{9}$$

oraz

$$M_e - M_z = B\,\omega_r \, , \tag{10}$$

gdzie:

$$M_e = nL_{12m} \frac{U_1}{R_1} I_2 \, . \tag{11}$$

Zgodnie z wyrażeniami (11) i (9) moment elektromagnetyczny silnika:

$$M_e = nL_{12m} \frac{U_1}{R_1} I_2 = nL_{12m} \frac{U_1 U_2}{R_1 R_2} - n^2 L_{12m}^2 \frac{U_1^2}{R_1^2 R_2} \omega_r \, . \tag{12}$$

Oznaczając:

$$M_{ek} = \left[M_e\right]_{\substack{\omega_r = 0 \\ U_2 = U_1}} = nL_{12m} \frac{U_1^2}{R_1 R_2} \tag{13}$$

– moment rozruchowy SWST [2],

x) W dalszym ciągu "obcowzbudny silnik wykonawczy prądu stałego sterowany twornikowo" oznaczać będziemy skrótem SWST.

$$\omega_{ro} = \left[\omega_r\right]_{\substack{M_e = 0 \\ U_2 = U_1}} = \frac{R_1}{nL_{12m}} \tag{14}$$

- prędkość kątowa idealnego biegu jałowego SWST [2],

oraz

$$D = \frac{M_{ek}}{\omega_{ro}} = n^2 L_{12m}^2 \frac{U_1^2}{R_1^2 R_2} \tag{15}$$

- współczynnik tłumienia wewnętrznego SWST

i podstawiając (13), (14) i (15) do (11), wyrażenie (11) przepiszemy w postaci:

$$M_e = M_{ek} \frac{U_2}{U_1} - D\,\omega_r \,. \tag{16}$$

Podstawiając z kolei (16) do (10) po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$\nu = \xi(\alpha - m_z) \,, \tag{17}$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{U_2}{U_1} \,; \qquad \nu = \frac{\omega_r}{\omega_{ro}} \,; \qquad m_z = \frac{M_z}{M_{ek}} \,, \tag{18}$$

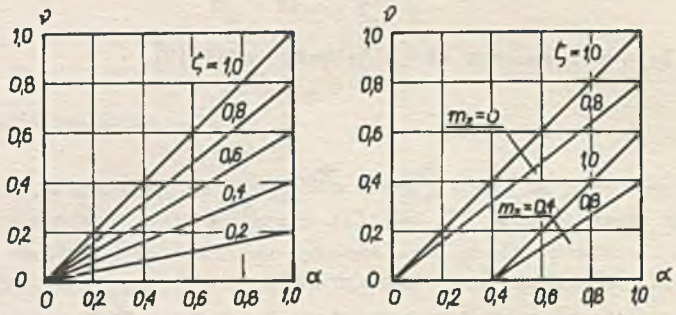
są to - znane z [2] - współczynnik sygnału (α), względna prędkość kątowa wirnika (ν) oraz względny moment obciążenia (m_z) zaś:

$$\xi = \frac{D}{D + B} \tag{19}$$

jest współczynnikiem uwzględniającym wpływ tłumienia zewnętrznego. Zauważmy, że dla $0 \leqslant B < \infty$, $1 \geqslant \xi > 0$.

Wyrażenie (17) jest równaniem bezwymiarowej charakterystyki regulacyjnej rozpatrywanego SWST z uwzględnieniem tłumienia zewnętrznego. Dla $B = 0$ czyli $\xi = 1$ wyrażenie (17) przyjmuje postać znaną z [2].

Wykresy zależności $\nu(\alpha)$ dla idealnego biegu jałowego silnika (m_z=0) i obciążenia (m_z = const) przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Bezwymiarowe charakterystyki regulacyjne SWST
a) dla m_z = 0, b) dla m_z = const

4. Stan nieustalony SWST

4.1. Równania wyjściowe w postaci bezwymiarowej

Stan nieustalony rozpatrywanego silnika opisują równania (6), (7), (8). Wprowadźmy do równań (6), (7), (8) wielkości względne (18) oraz względny prąd twornika

$$i_2 = \frac{I_2}{I_{2k}}, \tag{20}$$

gdzie:

$$I_{2k} = \left[I_2\right]_{\omega_r = 0} = \frac{U_1}{R_2} \tag{21}$$
$$U_2 = U_1$$

– ustalony prąd zwarcia SWST [1], [2].

Oznaczmy ponadto:

$$T_e = \frac{L_2}{R_2} \tag{22}$$

– elektromagnetyczna stała czasowa SWST,

$$T_{em} = \frac{J}{D} \tag{23}$$

– elektromechaniczna stała czasowa SWST.

Uwzględniając powyższe w równaniach (6), (7), (8) otrzymujemy po prostych przekształceniach następującą bezwymiarową postać równań wyjściowych SWST:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= i_2 + T_e \frac{di_2}{dt} + \nu \\ i_2 &= \frac{1-\zeta}{\zeta}\nu + T_{em}\frac{d\nu}{dt} + m_z \,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Dla B = 0 czyli $\zeta = 1$ równania (24) przyjmują postać znaną z [1].

Dalsze uproszczenie równań (24) uzyskamy wprowadzając do (24) za [5] czas względny

$$\tau = \frac{t}{T_e} \,. \tag{25}$$

Równania (24) przepisać teraz można w następującej postaci końcowej:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= i_2 + \frac{di_2}{d\tau} + \nu \\ i_2 &= \frac{1-\zeta}{\zeta}\nu + \varepsilon\frac{d\nu}{d\tau} + m_z \,, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

gdzie:

$$\varepsilon = \frac{T_{em}}{T_e} \,. \tag{27}$$

W równaniach (26) zmienne α, i_2, ν, m_z są teraz funkcjami czasu względnego τ.

4.2. Postać operatorowa odpowiedzi

Zdefiniujemy poszukiwane bezwymiarowe charakterystyki dynamiczne rozpatrywanego SWST jako odpowiedzi silnika w postaci funkcji $i_2(\tau)$ oraz $\nu(\tau)$ na wymuszenie skokowe $\alpha(\tau) = \alpha\mathbf{1}(\tau)$ przy m_z = const (por. rys. 1b).

Równania opisujące bezwymiarowe charakterystyki dynamiczne w takiej postaci są rozwiązaniami równań wyjściowych (26). Równania (26) są równaniami liniowymi, zatem rozwiązania te można wyznaczyć metodą operatorową.

Załóżmy, że transformatory LAPLACE'A-CARSONA wszystkich zmiennych w równaniach (26) istnieją. Przy wymuszeniu $\alpha(s) = \alpha$ i obciążeniu $m_z(s) = m_z$ postać operatorowa równań (26) będzie następująca:

$$\alpha = (1 + s)\, i_2(s) - s\, i_2(0) + \nu(s)$$
$$i_2(s) = \left(\frac{1 - \varsigma}{\varsigma} + \varepsilon s\right) \nu(s) - s\, \nu(0) + m_z. \tag{28}$$

przy czym $i_2(0)$, $\nu(0)$ - warunki początkowe.

Dla wyznaczenia wartości $i_2(0)$, $\nu(0)$ zauważmy, że odpowiedź silnika obciążonego momentem m_z = const przebiega różnie w dwóch przedziałach czasu względnego τ:

- przedział I: $0 < \tau < \tau_d$, w którym $m_e < m_z$ wobec czego $\nu = 0$; tu zatem

$$i_2(0) = 0, \qquad \nu(0) = 0, \tag{29}$$

- przedział II: $\tau_d < \tau < \infty$, w którym $m_e > m_z$ wobec czego $\nu \neq 0$; tu

$$\left.\begin{aligned} \nu(0) &= \nu(\tau_d) = 0 \\ i_2(0) &= i_2(\tau_d) = m_z . \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Zgodnie z powyższym w przedziale I obowiązuje równanie

$$\alpha = (1 + s)\, i_2(s), \tag{31}$$

skąd

$$i_2(s) = \frac{\alpha}{1 + s}, \tag{32}$$

albo

$$i_2(\tau) = \alpha(1 - e^{-\tau}). \tag{33}$$

Dla $\tau = \tau_d$ będzie więc:

$$m_z = \alpha(1 - e^{-\tau_d}) \tag{34}$$

skąd

$$\tau_d = \ln \frac{1}{\xi}, \tag{35}$$

gdzie:

$$\xi = 1 - \frac{m_z}{\alpha} \tag{36}$$

jest współczynnikiem uwzględniającym wpływ obciążenia m_z = const. Zauważmy, że dla $0 \leqslant m_z < \alpha$, $1 \geqslant \xi > 0$ oraz $0 \leqslant \tau_d < \infty$. Wykres zależności $\tau_d(\xi)$ przedstawia rys. 3.

Rys. 3. Wykres zależności $\tau_d(\xi)$

Z kolei w przedziale II równania wyjściowe (28) przyjmują postać następującą:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= (1+s)\, i_2(s) - m_z s + \nu(s) \\ i_2(s) &= \left(\frac{1-\xi}{\xi} + \varepsilon s\right) \nu(s) + m_z. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Na podstawie (37) będzie:

$$i_2(s) = \alpha \frac{1-\xi\xi + \left[(1-\xi)(1-\xi') + \xi\varepsilon\right] s + (1-\xi)\xi\varepsilon s^2}{1 + (1-\xi+\xi\varepsilon)\, s + \xi\varepsilon s^2} \tag{38}$$

oraz

$$\nu(s) = \alpha \frac{\xi\xi}{1 + (1-\xi+\xi\varepsilon)\, s + \xi\varepsilon s^2} \tag{39}$$

Wyrażenia (32) oraz (38) i (39) przedstawiają równania bezwymiarowych charakterystyk dynamicznych rozpatrywanego silnika w postaci operatorowej.

4.3. Postać czasowa odpowiedzi

Odpowiedzi czasowe SWST w przedziale I, obliczone w p. 4.2, wynoszą:

$$i_2(\tau) = \alpha(1 - e^{-\tau}) \tag{40}$$

oraz
$$v(\tau) = 0. \tag{41}$$

W przedziale II obowiązują wyrażenia (38) i (39). Zauważmy, że mianowniki tych wyrażeń są jednakowe i wynoszą:

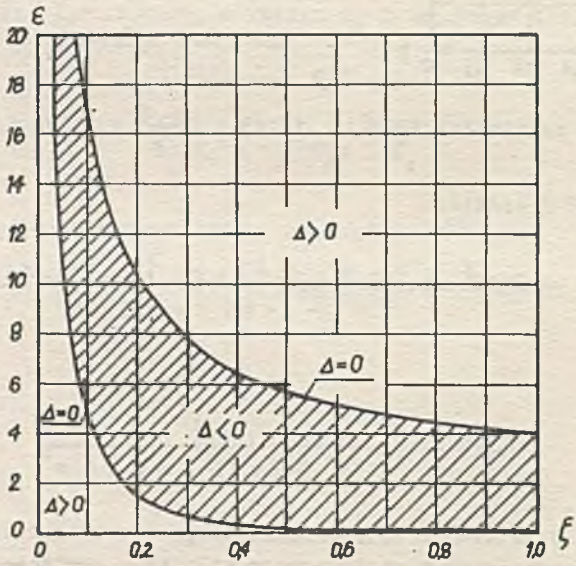
$$M(s) = 1 + (1 - \xi + \xi\varepsilon)\, s + \xi\varepsilon\, s^2 . \tag{42}$$

Charakter odpowiedzi $i_2(\tau')$ oraz $v(\tau')$, gdzie $\tau' = \tau - \tau_d$, zależy oczywiście od pierwiastków równania $M(s) = 0$, które wynoszą:

$$s_{1,2} = -\frac{1 - \xi + \xi\varepsilon}{2\xi\varepsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \xi + \xi\varepsilon}{2\xi\varepsilon}\right)^2 - \frac{1}{\xi\varepsilon}} . \tag{43}$$

Można wykazać, że odpowiedzi te będą aperiodyczne, gdy:

$$\frac{1 + \xi + 2\sqrt{\xi}}{\xi} \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1 + \xi - 2\sqrt{\xi}}{\xi} . \tag{44}$$



Rys. 4. Wykres zależności $\varepsilon(\xi)$

Wykres zależności $\varepsilon(\xi)$ narysowany na podstawie (44) przedstawia rys. 4, na którym

$$\Delta = \left(\frac{1 - \xi + \xi\varepsilon}{2\xi\varepsilon}\right)^2 - \frac{1}{\xi\varepsilon} . \tag{45}$$

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy przypadek $\Delta \geqslant 0$, tj. przypadek odpowiedzi aperiodycznych. Zgodnie z wyrażeniami (38) i (39) odpowiedzi czasowe silnika w przedziale II będą następujące:

a) w przypadku $\Delta > 0$

$$i_2(\tau') = \alpha \left[1 - \varsigma\xi + \frac{\xi}{s_1 - s_2}(1 + s_2 - \varsigma s_2)\, e^{s_1\tau'} - \right.$$
$$\left. - \frac{\xi}{s_1 - s_2}(1 + s_1 - \varsigma s_1)\, e^{s_2\tau'}\right] \tag{46}$$

oraz

$$\omega(\tau') = \alpha\varsigma\xi \left(1 + \frac{s_2}{s_1 - s_2} e^{s_1\tau'} - \frac{s_1}{s_1 - s_2} e^{s_2\tau'}\right), \tag{47}$$

przy czym maksimum krzywej (46)

$$i_{2M}(\tau') = \left[i_2(\tau')\right]_{\tau' = \tau'_M}, \tag{48}$$

gdzie:

$$\tau'_M = \frac{1}{s_1 - s_2} \ln \frac{s_2 + (1 - \varsigma)\, s_1 s_2}{s_1 + (1 - \varsigma)\, s_1 s_2}, \tag{49}$$

b) w przypadku $\Delta = 0$

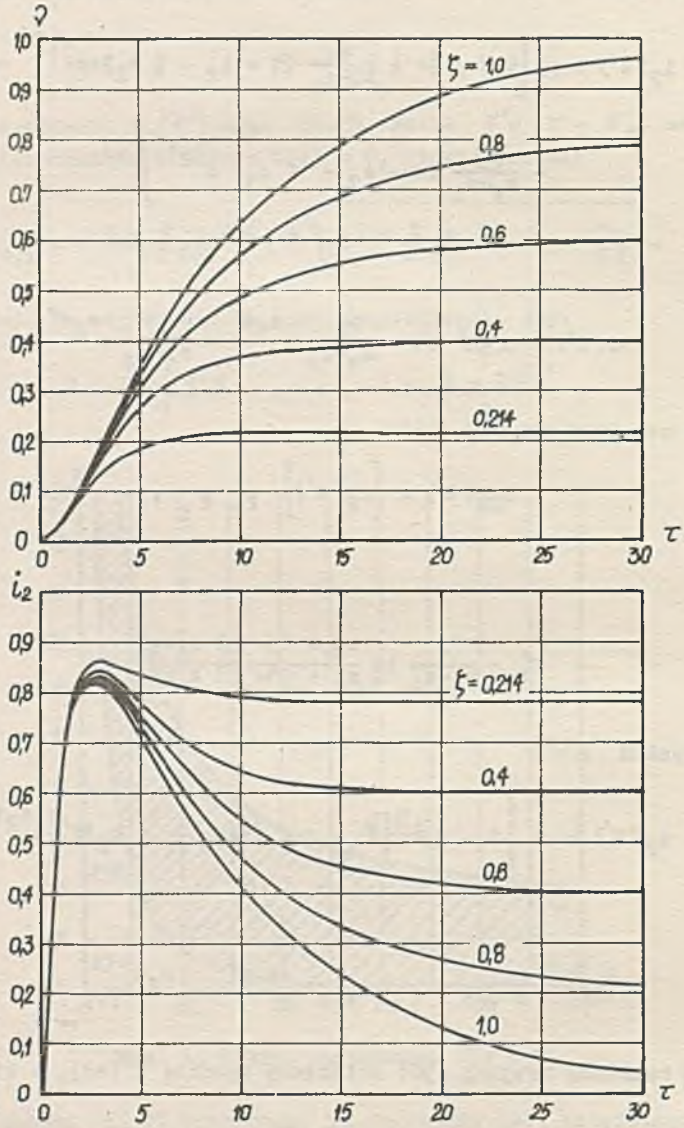
$$i_2(\tau') = \alpha \left\{1 - \varsigma\xi \left[\varsigma - 1 + (1 + s_2 - \varsigma s_2)\tau'\right] e^{s_2\tau'}\right\} \tag{50}$$

oraz

$$\omega(\tau') = \alpha\varsigma\xi \left(1 + s_2\tau' e^{s_2\tau'} - e^{s_2\tau'}\right), \tag{51}$$

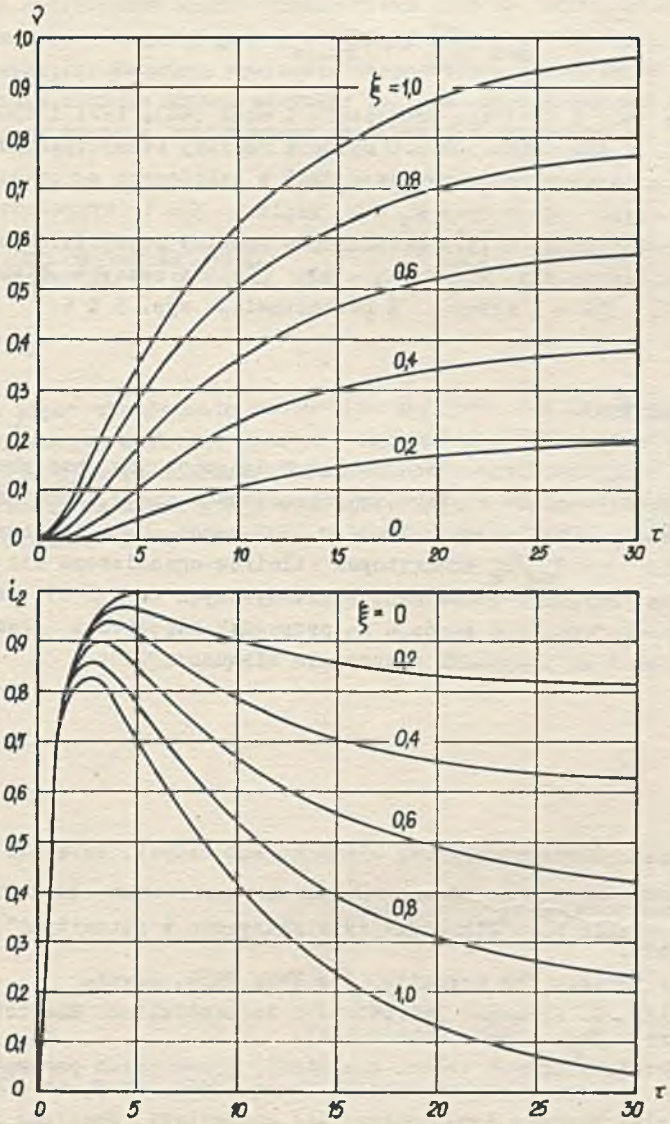
przy czym maksimum krzywej (50) obliczamy zgodnie z (48), w którym teraz

$$\tau'_M = -\frac{1}{s_2(1 + s_2 - \varsigma s_2)}. \tag{52}$$



Rys. 5. Bezwymiarowe charakterystyki dynamiczne SWST w przypadku $\alpha = 1$, $\varepsilon = 10$, $\xi = 1$

<u>Uwaga:</u> $\xi = 0{,}214 = [\xi]_{\Delta = 0}$



Rys. 6. Bezwymiarowe charakterystyki dynamiczne SWST w przypadku $\alpha = 1$, $\varepsilon = 10$, $\zeta = 1$

Wartości funkcji $i_2(\tau')$ oraz $\nu(\tau')$ w stanie ustalonym wynoszą:

$$i_{2ust} = \left[i_2(\tau')\right]_{\tau'\to\infty} = \alpha(1 - \varsigma\,\xi) \tag{53}$$

oraz

$$\nu_{ust} = \left[\nu(\tau')\right]_{\tau'\to\infty} = \alpha\,\varsigma\,\xi . \tag{54}$$

Wyrażenia (40) i (41) dla przedziału I oraz (46), (47) i (50),(51) dla przedziału II i przypadku $\Delta \geqslant 0$ opisują rodziny bezwymiarowych charakterystyk dynamicznych rozpatrywanego SWST w założonych warunkach. W przypadku $B = 0$ czyli $\varsigma = 1$ oraz $M_z = 0$ czyli $\xi = 1$ wyprowadzone wzory przyjmują postać znaną z [5]. Przykładowe rodziny bezwymiarowych charakterystyk dynamicznych dla $\alpha = 1$, $\varepsilon = 10$, $\xi = 1$ i różnych ς oraz dla $\alpha = 1$, $\varepsilon = 10$, $\varsigma = 1$ i różnych ξ przedstawiają rys. 5 i 6.

5. Uwagi końcowe

Równania bezwymiarowych charakterystyk dynamicznych obcowzbudnych silników wykonawczych prądu stałego, wyprowadzone v pracy, obowiązują w typowym przypadku sterowania twornikowego. Z uwagi na spotykane wartości współczynnika $\varepsilon = T_{em}/T_e$ konkretnych silników ograniczono się również do rozpatrywania przypadku odpowiedzi aperiodycznych ($\Delta \geqslant 0$). Przeprowadzoną analizę można uogólnić zarówno na przypadek odpowiedzi oscylacyjnych ($\Delta < 0$), jak i na przypadek sterowania biegunowego.

LITERATURA

[1] Z. Bajorek: Elektromaszynowe elementy automatyki. Warszawa 1969, WNT.

[2] Ю.С. Чечет: Электрические микромашины автоматических устройств. Москва 1957, Госэнергоиздат.
(tłum. polskie pt. "Mikromaszyny elektryczne w automatyce", Warszawa 1968, WNT).

[3] G. Kron: Tensors for Circuits. New York 1959, Dover.

[4] D. O'Kelly, S. Simmons: Introduction to Generalized Electrical Machine Theory. London 1968. McGraw-Hill.

[5] Z. Pasek: Nový zpusob určeni zakladnich dynamickych parametru stejnosměrneho motoru. Elektrotechnicky Obzor, 1962, nr 3, str. 109-113.

[6] J. Pustoła: Maszyny komutatorowe dla automatyki. Warszawa 1971, WNT.

[7] S. Roszczyk, Z. Manitius: Elektromaszynowe elementy automatyki. Warszawa 1969, PWN.

[8] T. Wróbel: Mikromaszyny elektryczne. Warszawa 1966, MON.

О БЕЗРАЗМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Р е з ю м е

В работа представлен анализ динамических свойств исполнительного двигателя постоянного тока с якорным управлением при использованию метода относительных величин. Выведены уравнения безразмерных динамических характеристик двигателя в общем случае нагрузки внешним демпфированием и постоянным моментом. Даны примеры безразмерных динамических характеристик.

ON THE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF A D-C SERVOMOTOR IN PER-UNIT FORM

S u m m a r y

In this paper the dynamic properties analysis in per-unit system of the d-c servomotor with the armature control has been presented. The equations for the dynamic characteristics in paper-unit form of a servomotor with an external damping and a constant torque load were derived. The examples of dynamic characteristics in per-unit form were given.