ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976
Seria: AUTOMATYKA z. 36 Nr kol. 481

Franciszek Marecki

O DIAGNOSTYCE PROBABILISTYCZNEJ PROCESU WALCOWANIA

Streszczenie. W referacie przedstawiono formuły teoretyczne i programy na EMC probabilistycznej diagnostyki procesu walcowania. Zaproponowana metoda stanowi uogólnienie wzorów Bayesa.

1. Sformułowanie zadania

W procesie walcowania występuje wiele czynników zakłócających, natury probabilistycznej. Stąd też w praktyce przemysłowej w zagadnieniach jakości walcowania wykorzystuje się rachunek prawdopodobieństwa i statystykę matematyczną. Przedstawiona niżej diagnostyka procesu walcowania jest również oparta na metodach probabilistycznych.

Obiektem analizowanym jest system równolegle pracujących walcarek. Wyroby walcowane winny mieć prostokątny przekrój poprzeczny o wymiarach w granicach dopuszczalnych tolerancji. Prawdopodobieństwo uzyskania wadliwego wyrobu walcowanego zmniejsza się poprzez stosowanie korekcji ustawienia walca. Jest to jednak związane z dodatkowym czasem pracy, a więc zmniejszaniem wydajności. Ponadto prawdopodobieństwo uzyskania wadliwego wyrobu walcowanego jest na ogół różne dla różnych walcarek.

W związku z tym interesującą sprawą jest określenie prawdopodobieństwa uzyskania wadliwego wyrobu walcowanego dla całej walcowni. Jest to zależne od liczby przewalcowań i prawdopodobieństw uzyskania wadliwego wyrobu walcowanego na każdej walcarce. Ponadto istotnym zadaniem jest określenie prawdopodobieństwa pochodzenia wadliwego wyrobu walcowanego z wybranej walcarki.

W rozwiązaniu tak postawionych zadań wyróżnione zostaną dwa przypadki:

- wyrób walcowany jest traktowany jako wadliwy jeśli równocześnie obydwa wymiary przekroju poprzecznego nie mieszczą się w granicach dopuszczalnych tolerancji;
- wyrób walcowany jest traktowany jako wadliwy jeśli jeden wymiar przekroju poprzecznego nie mieści się w granicach dopuszczalnych tolerancji

Rozwiązania tych przypadków są oparte na uogólnieniu wzoru Bayesa.

2. Koniunkcja wadliwych wymiarów

Przyjmijmy do analizy następujące założenia podstawowe:

1) Dane są niezależne zdarzenia losowe:

$$\{A_i\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

tworzące układ zupełny, tzn.:

$$A_i \cap A_j = 0 \quad \text{dla } i \neq j \ (i,j=1,2\ldots n) \tag{1}$$

$$\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i = \Omega \tag{2}$$

gdzie Ω- jest zdarzeniem pewnym.

Zdarzenia "A_i" interpretujemy jako uzyskanie wyrobu walcowanego z "i-tej" walcarki.

2) Dane są niezależne i niewykluczające się zdarzenia losowe:

$$\{B_k\} \quad (k = 1, 2 \ldots, m)$$

takie, że:

$$B = \bigcap_{k=1}^{k=m} B_k \neq 0 \tag{3}$$

Zdarzenia "B_k" interpretujemy jako uzyskanie wadliwego wyrobu walcowanego, w którym "k-ty" wymiar przekroju poprzecznego nie mieści się w granicach tolerancji.

3) Dane są prawdopodobieństwa "a priori" zdarzeń $\{A_i\}$ spełniające warunek:

$$P(A_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

Jest to prawdopodobieństwo pochodzenia wyrobu walcowanego z "i-tej" walcarki.

4) Dane są odpowiednie prawdopodobieństwa warunkowe spełniające warunek:

$$P(B_k/A_i) > 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{5}$$

Jest to prawdopodobieństwo, że "k-ty" wymiar przekroju poprzecznego wyrobu walcowanego nie mieści się w granicach tolerancji - pod warunkiem,że wyrób pochodzi z "i-tej" walcarki.

Przy powyższych założeniach można obliczyć:

- całkowite prawdopodobieństwo "P(B)" uzyskania wadliwego wyrobu walcowanego w trakcie rozpatrywanego procesu dla całej walcowni;
- prawdopodobieństwo warunkowe a posteriori "$P(A_i/B)$" pochodzenia wadliwego wyrobu walcowanego z "i-tej" walcarki.

Zdarzenia

$$\{A_i\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

oraz $\{B\}$ są zależne, zatem napiszemy:

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i) = P(B) \cdot P(A_i/B) \tag{6}$$

Szukane prawdopodobieństwo warunkowe a posteriori wyznaczamy z zależności (6) jako:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)} \tag{7}$$

ponieważ:

$$B = B \cap \Omega \tag{8}$$

zatem podstawiając (2) do (8) otrzymamy:

$$B = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right) \tag{9}$$

skąd:

$$B = \bigcup_{i=1}^{i=n} (B \cap A_i) \tag{10}$$

Ponieważ zdarzenia:

$$\{A_i\} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

tworzą układ zupełny, więc (10) jest alternatywą zdarzeń wykluczających się.
Na podstawie (10) określamy prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{i=n} P(B \cap A_i) \tag{11}$$

lub po uwzględnieniu (6) w (11):

$$P(B) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A_i) \cdot P(B/A_i) \tag{12}$$

Podstawiając (12) do (7) otrzymamy:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)} \tag{13}$$

Do wzoru (13) należy wprowadzić prawdopodobieństwa warunkowe określone w założeniu 4.

Dlatego zapiszemy:

$$P(B/A_i) = P\left(\bigcap_{k=1}^{k=m} B_k/A_i\right) \tag{14}$$

Uwzględniając (6) w (14) otrzymamy:

$$P(B/A_i) = \frac{P(\bigcap_{k=1}^{k=m} B_k \cap A_i)}{P(A_i)} \tag{15}$$

Wyrażenie (15) przekształcimy w następujący sposób:

$$P(B/A_i) = \frac{P\left[\bigcap_{k=1}^{k=m} (B_k \cap A_i)\right]}{P(A_i)} \tag{16}$$

Zdarzenia losowe:

$$\left\{B_k \cap A_i\right\} \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{17}$$

są na podstawie założenia 2 niezależne. Zatem można wyrażenie (16) przekształcić do postaci:

$$P(B/A_i) = \frac{\prod_{k=1}^{k=m} P(B_k \cap A_i)}{P(A_i)}, \tag{18}$$

czyli na podstawie (6) i (18):

$$P(B/A_i) = \left[P(A_i)\right]^{m-1} \prod_{k=1}^{k=m} P(B_k/A_i). \tag{19}$$

Podstawiając (19) do (12) i (13) otrzymamy ostatecznie:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{i=n} \left\{\left[P(A_i)\right]^m \cdot \prod_{k=1}^{k=m} P(B_k/A_i)\right\} \tag{20}$$

$$P(A_i/B) = \frac{\left[P(A_i)\right]^m \prod_{k=1}^{k=m} P(B_k/A_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} \left\{\left[P(A_i)\right]^m \cdot \prod_{k=1}^{k=m} P(B_k/A_i)\right\}} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{21}$$

Na podstawie wzoru (20) można określić dla całej walcowni prawdopodobieństwo całkowite uzyskania wadliwego wyrobu walcowanego, którego obydwa wymiary nie mieszczą się w granicach dopuszczalnych tolerancji. Wzór (21) pozwala wyznaczyć prawdopodobieństwo pochodzenia wadliwego wyrobu z "i-tej" walcarki.

3. Alternatywa wadliwych wymiarów

Jeżeli przyjąć założenia 1, 3 i 4 przedstawione w punkcie 2, natomiast dla zdarzeń:

$$\left\{B_k\right\} \quad (k = 1, \ldots, m),$$

założyć, że się wykluczają, to w dalszym ciągu rozważania będą dotyczyć alternatywy:

$$B = \bigcup_{k=1}^{k=m} B_k \neq \Omega. \tag{22}$$

Wykonując analogiczne wyprowadzenia jak w punkcie 2 przy określaniu wyrażenia (13) otrzymamy:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(\bigcup_{k=1}^{k=m} B_k/A_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} P(A_i).P(\bigcup_{k=1}^{k=m} B_k/A_i)}. \tag{23}$$

Na podstawie (6) otrzymamy:

$$P(\bigcup_{k=1}^{k=m} B_k/A_i) = \frac{P(\bigcup_{k=1}^{k=m} B_k \cap A_i)}{P(A_i)}, \tag{24}$$

a więc

$$P(\bigcup_{k=1}^{k=m} B_k/A_i) = \frac{P\left[\bigcup_{k=1}^{k=m} (B_k \cap A_i)\right]}{P(A_i)}. \tag{25}$$

Ponieważ zdarzenia

$$\left\{B_k \cap A_i\right\} \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{26}$$

wykluczają się, więc z (25) otrzymymy:

$$P(\bigcup_{k=1}^{k=m} B_k/A_i) = \frac{\sum_{k=1}^{k=m} P(B_k \cap A_i)}{P(A_i)}. \tag{27}$$

Zdarzenia losowe:

$$\left\{B_k\right\} \quad (k = 1, \ldots, m),$$

są zależne od zdarzeń losowych:

$$\left\{A_i\right\} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Zatem można napisać:

$$P(B_k \cap A_i) = P(A_i).P(B_k/A_i) \ . \qquad (28)$$

Podstawiając (28) do (27) otrzymamy:

$$P(\bigcup_{k=1}^{k=m} B_k/A_i) = \sum_{k=1}^{k=m} P(B_k/A_i). \qquad (29)$$

Na podstawie (23) i (29) określamy prawdopodobieństwo a posteriori:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot \sum_{k=1}^{k=m} P(B_k/A_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} P(A_i) \cdot \sum_{k=1}^{k=m} P(B_k/A_i)} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Natomiast prawdopodobieństwo całkowite wynosi:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[P(A_i)\right] \sum_{k=1}^{k=m} P(B_k/A_i). \qquad (31)$$

Wzór (31) pozwala obliczyć prawdopodobieństwo całkowite uzyskania wadliwego wyrobu walcowanego (z uwagi na odchyłkę jednego wymiaru od dopuszczalnej tolerancji) w procesie walcowania na całej walcowni. Natomiast wzór (30) określa prawdopodobieństwo pochodzenia wadliwego wyrobu walcowanego z "i-tej" walcarki.

4. Algorytmy i programy

Algorytmy obliczeń prawdopodobieństw całkowitych i prawdopodobieństw a posteriori wynikają wprost ze wzorów odpowiednio: (20), (31) oraz (21) i (30). Do programów należy przygotować następujące dane:

- liczby: "n"-zdarzeń "A", oraz "m"-zdarzeń "B";
- prawdopodobieństwa a priori "$P(A_i)$"; n-liczb;
- prawdopodobieństwa warunkowe "$P(B_k/A_i)$"; n x m-liczb;

W wyniku obliczeń otrzymujemy następujące wyniki:

- prawdopodobieństwo całkowite;
- prawdopodobieństwa a posteriori; n-liczb.

Program dla koniunkcji wadliwych wymiarów, napisany w języku MAT-532 na maszynę "Mińsk-32" ma następującą postać:

```
INTEGER I : J : K : N : M
REAL X/10/ : Z/100/ : Y/10/ : R/3/
REF 1
1) OUTDEVICE 3
   FOR I = 0 : 1 : = 3
       RI = 0
   REPEAT I
   READ N
   READ M
   FOR I = 1 : 1 : = N
       READ XI
   REPEAT I
   FOR I = 1 : 1 : = N
       J = I - 1
       J = J.N
       FOR K = 1 : 1 : = M
           J = J + K
           READ ZJ
       REPEAT K
   REPEAT I
   FOR I = 1 : 1 : = N
       J = I - 1
       J = J.N
       R = 1
       FOR K = 1 : 1 : = M
           J = J + K
           R1 = ZJ.XI
           R = R.R1
```

```
    REPEAT K
    YI = R
    R3 = R3 + R
REPEAT I
LINE 10
SPACE 20
TITLE PRAWDOPODOBIEŃSTWO CAŁKOWITE #
LINE 3
SPACE 40
TITLE P/B/ = #
WRITE R3,9/
LINE 10
SPACE 20
TITLE PRAWDOPODOBIEŃSTWA A POSTERIORI #
LINE 3
SPACE 40
FOR I = 1 : 1 : = N
    TITLE P(A
    WRITE I,2
    TITLE /B) = #
    R = YI/R3
    WRITE R,9/
REPEAT I
STOP
END
START 1
```

Program dla alternatywy wadliwych wymiarów wyrobów walcowanych napisany w języku MAT-532 na maszynę "Mińsk-32" ma następującą postać:

```
INTEGER I : J : K : N : M
REAL X/10/ : Z/100/ : Y/10/ : R/3/
REF 1
1) OUTDEVICE 3
   FOR I = 0 : 1 : = 3
      RI = 0
   REPEAT I
   READ N
   READ M
   FOR I = 1 : 1 : = N
      READ XI
   REPEAT I
   FOR I = 1 : 1 : = N
      J = I - 1
      J = J,N
      FORK K = 1 : 1 : = M
```

```
        J = J + K
        READ ZJ
        REPEAT K
    REPEAT I
    FOR I = 1 : 1 : = N
        J = I - 1
        J = J.N
        FOR K = 1 : 1 : = M
            J = J + K
            R1 = XI.ZJ
            R2 = R2 + R1
        REPEAT K
            YI = R2
        R3 = R3 + R2
    REPEAT I
    LINE 10
    SPACE 20
    TITLE PRAWDOPODOBIEŃSTWO CAŁKOWITE ≠
    LINE 3
    SPACE 40
    TITLE P/B/ = ≠
    WRITE R3,9/
    LINE 10
    SPACE 20
    TITLE PRAWDOPODOBIEŃSTWA A POSTERIORI ≠
    LINE 3
    SPACE 40
    FOR I = 1 : 1 : = N
        TITLE P(A ≠
        WRITE I,2
        TITLE /B) = ≠
        R = YI/R3
        WRITE R3,9/
    REPEAT I
    STOP
    END
    START 1
```

Całkowity czas liczenia przedstawionych programów wynosi kilka sekund (czas wydruku).

5. Uwagi końcowe

W przeprowadzonych rozważaniach przedstawiono formuły teoretyczne i programy diagnostyki probabilistycznej na przykładzie procesu walcowania. Do rozwiązania zadania trzeba określić dane: prawdopodobieństwa a priori "$P(A_i)$" oraz prawdopodobieństwa warunkowe "$P(B/A_i)$". Prawdopodobieństwa warunkowe określa się na podstawie statystycznych danych o zużywaniu się walca. Natomiast prawdopodobieństwa a priori można określić jako:

$$P(A_i) = \frac{l_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} l_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{32}$$

gdzie:

l_i – liczba wyrobów walcowanych uzyskanych z "i-tej" walcarki.

Diagnostyka probabilistyczna procesu walcowania pozwala określić prawdopodobieństwo uzyskania wadliwego wyrobu walcowanego oraz prawdopodobieństwo pochodzenia tego wyrobu z określonej walcarki. Jest to istotne ponieważ np. w procesie walcowania kęsisk, kontrola wyrobów odbywa się w kilka godzin po odwalcowaniu i ochłodzeniu materiału. Jeżeli prawdopodobieństwo pochodzenia wyrobu walcowanego z pewnej walcarki jest znacznie większe niż z pozostałych to należy przeprowadzać częściej korekcje lub regeneracje walców rozpatrywanej walcarki.

Z uwagi na zawiłe formuły matematyczne, do obliczeń należy wykorzystać maszynę cyfrową.

LITERATURA

[1] M. Fisz: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1967.

[2] W. Feller: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa. PWN Warszawa 1966.

ПРОБАБИЛИСТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА ПРОКАТНОГО ПРОЦЕССА

Р е з ю м е

В работе представлены теоретические основания и программы на ЭВМ пробабилистической диагностики прокатного процесса. Предлагаемый метод является обобщением формулы Баеса.

THE PROBABILITY DIAGNOSTICS OF SLABING PROCESS

S u m m a r y

In the paper some theoretical bases and programmes for a computer of probability diagnostics of slabing process has been given. This method is generalization of Bayes formulae.