ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: AUTOMATYKA z. 36 Nr kol. 481

Jan Piotr Słuszkiewicz

MODEL MATEMATYCZNY SKOKOWEGO SILNIKA RELUKTANCYJNEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono matematyczny model skokowego silnika reluktancyjnego, którego równania dzięki aproksymacji wielomianem zależności strumienia skojarzonego od kąta obrotu wirnika i prądu płynącego w uzwojeniach sterujących, można łatwo analizować wykorzystując numeryczne metody całkowania w oparciu o maszyny cyfrowe.

1. Sformułowanie problemu

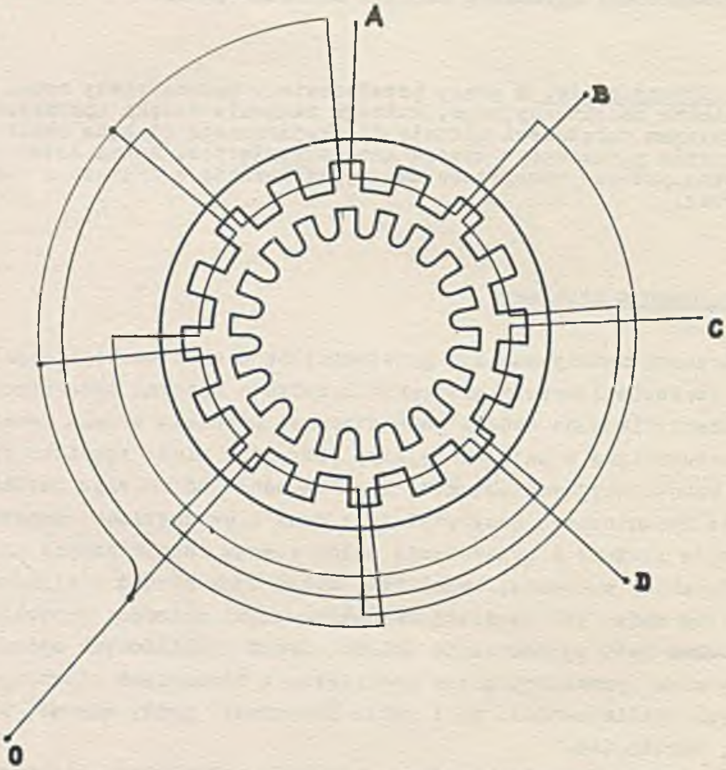
Współczesne metody analizy przetworników elektromechanicznych wykorzystują w szerokim zakresie analogowe i cyfrowe maszyny matematyczne w oparciu o zidentyfikowane modele matematyczne. Równania modelu matematycznego tych przetworników w najogólniejszym przypadku wiążą zjawiska fizyczne z cechami konstrukcyjnymi obiektu. W zależności od rodzaju obiektu, opis własności dynamicznych uwzględniający dane o parametrach konstrukcyjnych jest bardzo złożony i przedstawia układ równań różniczkowych nieliniowych, względnie zbiór wykresów, tabel itp. Układ tych równań nieliniowych rozwiązuje się mniej lub bardziej skomplikowanymi metodami przybliżonymi. Innym sposobem jest uproszczenie układu równań nieliniowych opisujących rzeczywisty stan dynamiczny przez pominięcie w równaniach niektórych zjawisk wnoszących nieliniowości, np.: pętla histerezy, prądy wirowe, zjawisko nasycenia, tarcia itd.

Wyniki analizy przebiegów dynamicznych przetworników elektromechanicznych, a zwłaszcza silników skokowych mają wtedy znacznie zawężony charakter.

Otrzymanie bardziej adekwatnego modelu matematycznego silnika skokowego przydatnego do analizy z zastosowaniem maszyn cyfrowych, zaproponowano tak, że równania opisujace zachodzące przemiany energii elektrycznej na mechaniczną ruchu obrotowego rozpatrywanego silnika uzyskano w oparciu o przeprowadzony eksperyment.

2. Równania stanu dynamicznego silnika skokowego

Rozpatrywany jest jednopakietowy czterofazowy silnik skokowy (rys. 1) z wirnikiem biernym, którego każde uzwojenie sterujące składa się z dwóch cewek włączonych zgodnie i zajmujących dwie jednakowe strefy zębowe na stojanie.



Rys. 1. Schemat ideowy czterofazowego silnika reluktancyjnego

Układ sterowania silnika realizuje symetryczną komutację parami 12-23-34-41... Na podstawie drugiego prawa Kirchoffa i prawa indukcji elektromagnetycznej, równania równowagi przedstawionego silnika skokowego mają postać:

$$u_1(t) = R_1\, i_1(t) + \frac{d\,\psi_1}{dt}$$

$$u_2(t) = R_2\, i_2(t) + \frac{d\,\psi_2}{dt} \qquad (1)$$

$$u_3(t) = R_3\, i_3(t) + \frac{d\,\Psi_3}{dt} \tag{1}$$

$$u_4(t) = R_4\, i_4(t) + \frac{d\,\Psi_4}{dt}$$

Strumień skojarzony (Ψ) dla k-tej fazy można określić w ogólnym przypadku z zależności [1], [2], [3]:

$$\Psi_k(\Theta,\, i_k) = L_k(\Theta,\, i_k)\, .\, i_k \tag{2}$$

gdzie:

L_k – indukcyjność k-tej fazy

Θ – kąt niezgodności pomiędzy osiami zębów stojana i wirnika.

Pomijając zjawisko nasycenia rdzenia zależność (2) upraszcza się do postaci:

$$\Psi_k(\Theta,\, i_k) = L_k(\Theta)\, .\, i_k \tag{3}$$

Dzięki odpowiednio dobranej geometrii zębów wirnika oraz uzwojeń stojana można znacznie ograniczyć wyższe harmoniczne w przebiegach pól. Wtedy permeancja dla strumienia wzbudzonego przez uzwojenie k-tej fazy jest okresową funkcją o przebiegu kosinusoidalnym:

$$\lambda_k = \lambda_{ko} + \lambda_{k1}\, .\, \cos\left[Z_2\Theta - \frac{2\pi}{m}(k-1)\right], \tag{4}$$

gdzie:

λ_{ko}, λ_{k1} – są funkcjami wymiarów geometrycznych zębów stojana i wirnika

Z_2 – liczba zębów wirnika

m – liczba faz.

Na podstawie (3), (4) indukcyjność każdej fazy określona jest zależnością

$$L_k = L_{ko} + L_{k1}\, .\, \cos\left[Z_2\Theta - \frac{2\pi}{m}(k-1)\right]. \tag{5}$$

W ogólnym przypadku jeżeli poszczególne pasma fazowe stojana silnika są identyczne, ich osie magnetyczne są przesunięte względem siebie o taki sam kąt, a szczelina na obwodzie jest równomierna to wówczas:

$$\begin{aligned} L_{10} &= L_{20} = \dots L_{ko} = L_o \\ L_{11} &= L_{21} = \dots L_{k1} = L_1\, . \end{aligned} \tag{6}$$

Znając zależności analityczne na λ_{ko} i λ_{k1} w funkcji wymiarów geometrycznych, to można wyliczyć

$$L_o = \frac{z^2\ \lambda_o}{q}$$
$$L_1 = \frac{z^2\ \lambda_1}{q}, \tag{7}$$

gdzie:

z – liczba zwojów przypadająca na jedną fazę,
q – liczba biegunów stojana przypadająca na jedną fazę.

Jeżeli przybliżone wzory obliczeniowe lub zależności funkcyjne λ_{ko}, λ_{k1} nie są znane, to zgodnie z (4) L_o i L_1 można otrzymać z pomiarów przy zahamowanym wirniku, mierząc indukcyjność uzwojenia dowolnej fazy dla dwu różnych położeń wirnika.

Na podstawie pomierzonych wartości indukcyjności maksymalnej (L_d) i minimalnej (L_q) przy obrocie wirnika silnika o pół podziałki zębowej można wyznaczyć:

$$L_o = \frac{L_d + L_q}{2}$$
$$L_1 = \frac{L_d - L_q}{2}. \tag{8}$$

Równanie ruchu silnika skokowego otrzymuje się z równań dynamiki przy założeniu, że silnik skokowy jest układem elektromechanicznym o jednym stopniu swobody mechanicznej:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + K\frac{d\theta}{dt} + M_{ob} = M_e\quad (i_1, \dots i_m, \theta), \tag{9}$$

gdzie:

J – wypadkowy moment bezwładności wirnika i obciążenia
K – współczynnik charakteryzujący tarcie lepkie
$M_e\ (i_1, i_2 \dots i_m, \theta)$ – wypadkowy moment elektromagnetyczny (10)
k – kolejny numer fazy zasilanej.

Zgodnie z prawem zachowania energii moment elektromagnetyczny M_{ek}, dla przypadku, gdy zmiennymi są Θ, Ψ_k określony jest zależnością:

$$M_{ek} = + \frac{\partial W_{em}}{\partial \Theta}, \tag{11}$$

gdzie:

$$W_{em} = \int_0^{\Psi_k} i_k \cdot d\,\Psi'_k \tag{12}$$

– energia magnetyczna układu.

Z zależności (3), (5), (6), (11), (12) otrzymuje się ostatecznie wyrażenie na moment elektromagnetyczny k-tej fazy silnika:

$$M_{ek} = \frac{1}{2} \cdot i_k^2 \frac{dL_k}{d\Theta} = \frac{Z_2}{2} i_k^2 L_1 \sin\left[Z_2 \Theta - \frac{2\pi}{m}(k-1)\right] \tag{13}$$

3. Model matematyczny silnika skokowego

Na podstawie wyprowadzonych równań silnika skokowego jak na rys. 1 otrzymuje się układ równań stanu dynamicznego w postaci:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{u_1 - i_1\left\{R_1 + \omega Z_2 L_1 \sin(Z_2 \Theta)\right\}}{L_o + L_1 \cos(Z_2 \Theta)}$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{u_2 - i_2\left\{R_2 + \omega Z_2 L_1 \sin(Z_2 \Theta - \frac{\pi}{2})\right\}}{L_o + L_1 \cos(Z_2 \Theta - \frac{\pi}{2})}$$

$$\frac{di_3}{dt} = \frac{u_3 - i_3\left\{R_3 + \omega Z_2 L_1 \sin(Z_2 \Theta - \pi)\right\}}{L_o + L_1 \cos(Z_2 \Theta - \pi)}$$

$$\frac{di_4}{dt} = \frac{u_4 - i_4\left\{R_4 + \omega Z_2 L_1 \sin(Z_2 \Theta - \frac{3}{2}\pi)\right\}}{L_o + L_1 \cos(Z_2 \Theta - \frac{3}{2}\pi)}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}\left[M_e(i_1, i_2, i_3, i_4, \Theta) - K\omega - M_{ob}\right] \tag{14}$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \omega \qquad (14)$$

$$M_e = -\frac{Z_2}{2}\sum_{k}^{k+1} i_k^2 L_1 \sin\left[Z_2\Theta - \frac{2\pi}{m}(k-1)\right].$$

Układ równań (14) prezentujący model matematyczny rozpatrywanego silnika skokowego, może być łatwo przeanalizowany przy użyciu cyfrowej maszyny wykorzystując numeryczną metodę całkowania "krok po kroku".

4. Model matematyczny silnika skokowego z uwzględnieniem nieliniowości

W ogólnym przypadku indukcyjność uzwojenia każdej fazy silnika skokowego jest nieliniową funkcją prądu i położenia kątowego wirnika:

$$\Psi(i, \Theta) = L(i, \Theta) \cdot i \,. \qquad (15)$$

Układ równań opisujący stan równowagi części elektrycznej silnika,uwzględniający strumień skojarzony w funkcji prądu i położenia wirnika, przyjmuje postać:

$$u_1(t) = R_1 i_1(t) + \frac{d\Psi_1}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dt} + \frac{d\Psi_1}{di_1}\cdot\frac{di_1}{dt}$$

$$u_2(t) = R_2 i_2(t) + \frac{d\Psi_2}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dt} + \frac{d\Psi_2}{di_2}\cdot\frac{di_2}{dt}$$

$$u_3(t) = R_3 i_3(t) + \frac{d\Psi_3}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dt} + \frac{d\Psi_3}{di_3}\cdot\frac{di_3}{dt} \qquad (16)$$

$$u_4(t) = R_4 i_4(t) + \frac{d\Psi_4}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dt} + \frac{d\Psi_4}{di_4}\cdot\frac{di_4}{dt}\,.$$

Natomiast stan równowagi dynamicznej części mechanicznej silnika opisany jest nadal równaniem (9), przy czym wartość momentu elektromagnetycznego M_{ek} łatwiej teraz będzie wyznaczyć przy zmiennych Θ, i_k z koenergii magnetycznej układu:

$$M_{ek} = -\frac{\partial W'_{em}}{\partial\Theta}\,, \qquad (17)$$

gdzie:

$$W'_{em} = \int_0^{i_k} \Psi_k \cdot di'_k \tag{18}$$

- koenergia magnetyczna.

Zmodyfikowany układ równań (17) (17) (9) oraz zależność:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \omega,$$

opisują stan dynamiczny silnika skokowego.

Analiza zaproponowanego modelu matematycznego silnika skokowego przy użyciu maszyn cyfrowych jest możliwa dopiero po znalezieniu zależności opisującej zmiany strumienia skojarzonego przy zmianie prądu wywołującego strumień i obrocie wirnika. Otrzymane na drodze teoretycznej zależności są bardzo skomplikowane i mało przydatne dla analizy stanów przejściowych. Doświadczalne znalezienie funkcji Ψ_k (i_k, Θ) przy podanych warunkach w stanie dynamicznym jest praktycznie niemożliwe do zrealizowania.

Przebieg Ψ_k (i_k, Θ) można uzyskać na drodze pomiarów statycznych. W tym celu należy przeprowadzić szereg pomiarów, aby uzyskać rodzinę krzywych strumienia skojarzonego w funkcji obrotu wirnika dla dyskretnej wartości prądu stojana (i_{ki}).

Tak otrzymane przebiegi Ψ_{ki} (Z_2, Θ) należy aproksymować odpowiednim równaniem regresji Ψ_i (Z_2, Θ) [5], gdzie indeks "i" identyfikuje dla jakiej dyskretnej wartości prądu została zmierzona krzywa strumienia skojarzonego w funkcji kąta obrotu wirnika.

W ten sposób wykonane pomiary umożliwiają przedstawienie zależności Ψ_k (i_k, Θ) w postaci wielomianu, którego stopień jest określony zgodnie z żądaną dokładnością aproksymacji krzywej Ψ_k (i_k, Θ).

Wyrażenie zmian strumienia skojarzonego w postaci wielomianu sprowadza pełny model matematyczny rozpatrywanego silnika skokowego do modelu (14), którego analiza przy użyciu maszyn cyfrowych nie przedstawia poważniejszych trudności.

5. Wnioski końcowe

Z przedstawionych rozważań wynika, że analizę przetwornika elektromechanicznego typu silnik skokowy można znacznie uprościć nie pomijając zachodzących w silnikach zjawisk fizycznych, jeżeli dla określenia zależności funkcjonalnych występujących pomiędzy parametrami modelu wykorzysta się wyniki czynnego eksperymentu przeprowadzonego w oparciu o metody analizy regresji.

W chwili obecnej opracowano stanowisko do zdejmowania zmian strumienia Ψ w funkcji kąta obrotu wirnika dla dyskretnych wartości prądu sterowania, co pozwoli porównać przebieg momentu dla jednego kroku wyznaczonego na podstawie zaproponowanych modeli matematycznych z przebiegiem zdjętym na obiekcie rzeczywistym.

LITERATURA

[1] B.K. Karpenko, W.I. Larozenko, A. Prokofiew: Szagowyje elektrodwigatieli - Technika, Kiev 1972.

[2] B.A. Iwobotienko, W.P. Rubcow, L.A. Sadowski, W.K. Cacenkin, M.G. Czilikin: Dyskretne napędy elektryczne z silnikami skokowymi, Warszawa 1975.

[3] D.C. White, H.H. Woodson: Elektromechanical Energy Conversion. John Wiley and Sons, New York, 1959.

[4] J. Pustoła: Maszyny komutatorowe dla automatyki. WNT, Warszawa 1971.

[5] A. Strzałkowski, A, Sliżyński: Matematyczne metody opracowywania wyników pomiarów PWN, Warszawa 1973.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕАКТИВНОГО ШАГОВОГО ДВИГАТЕЛЯ

Р е з ю м е

В статье представлено математическую модель реактивного шагового двигателя для линейной и нелинейной магнитной цепи. Нелинейность зависимости потокосцепления от фазового тока и положения ротора была апроксимирована полиномом, что позволило анализировать дифференциальные уравнения на ЗЦВМ.

THE DYNAMIC EQUATIONS OF A VARIABLE RELUCTANCE STEPPING MOTOR

S u m m a r y

In the paper the system equations representing a variable reluctance stepping motor have been given. These system equations are easy to solve by numerical integration.