ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1977
Seria: AUTOMATYKA z. 37 Nr kol. 507

Jerzy KLAMKA

# STEROWANIE Z MINIMALNĄ ENERGIĄ LINIOWYM UKŁADEM CIĄGŁYM Z OPÓŹNIENIEM

Streszczenie. Artykuł dotyczy problemu sterowania z minimalną energią, liniowym niestacjonarnym układem dynamicznym ze zmiennym w czasie opóźnieniem w sterowaniu. Korzystając z macierzy sterowalności, podano postać sterowania optymalnego.

## 1. Wstęp

Problem optymalnego sterowania układami liniowymi z opóźnieniem w sterowaniu był rozpatrywany przez wielu autorów [1], [2], [4], [5], [6]. W niniejszym opracowaniu przedstawiono zagadnienie sterowania z minimalną energią, liniowym niestacjonarnym układem dynamicznym ze zmiennym w czasie opóźnieniem w sterowaniu. Korzystając ze zdefiniowanej w pracy [3] macierzy sterowalności, sformułowano twierdzenie podające analityczną postać sterowania optymalnego.

Niech będzie dany liniowy niestacjonarny układ dynamiczny ze zmiennym w czasie opóźnieniem w sterowaniu, opisany równaniem:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)u(v(t)) \tag{1}$$

spełnionym prawie wszędzie w przedziale $[t_0,t_1]$; gdzie $x \in R^n$ jest wektorem stanu chwilowego, sterowanie u należy do klasy sterowań dopuszczalnych, U, złożonej z wszystkich p - wymiarowych rzeczywistych, mierzalnych i ograniczonych funkcji, określonych na przedziale $[t_0,t_1]$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ są odpowiednio nxn, nxp, nxp wymiarowymi macierzami, których elementy są ciągłymi i ograniczonymi funkcjami w $[t_0,t_1]$.

$$v(t) = t - h(t) \, , \tag{2}$$

fdzie: $h(t)$ jest zmiennym w czasie opóźnieniem. Zakłada się, że funkcja $v(t)$ jest określona na przedziale $[t_0,t_1]$, absolutnie ciągła i ściśle rosnąca, oraz spełnia następującą nierówność:

$$v(t) \leqslant t \quad \text{dla} \quad t \in [t_0,t_1] \tag{3}$$

Ponieważ funkcja v(t) jest ściśle rosnącą, więc można zdefiniować funkcję r(t), określoną na przedziale $[v(t_0), v(t_1)]$, taką, że:

$$r(v(t)) = t \quad \text{dla} \quad t \in [t_0, t_1] \,. \tag{4}$$

Wiadomo, że stan zupełny w chwili t układu (1) jest zdefiniowany w sposób następujący [3], [4], [6]:

Definicja 1

Zbiór

$$Z(t) = \begin{cases} \{x(t), w(t,s)\} & \text{dla} \quad v(t) < t \\ \{x(t)\} & \text{dla} \quad v(t) = t \end{cases}$$

gdzie w(t,s) = u(s) dla $s \in [v(t), t)$ jest nazywany stanem zupełnym układu (1) w chwili t.
Jednoznaczne, absolutnie ciągłe rozwiązanie układu (1), z początkowym stanem zupełnym $z(t_0)$ można przedstawić w postaci następującej [3], [5], [6]:

$$x(t) = F(t,t_0)\Big[x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(t_0,s)B(s)u(s)ds +$$

$$+ \int_{v(t_0)}^{v(t)} F(t_0,r(s))C(r(s))r^{(1)}(s)u(s)ds\Big] \,, \tag{5}$$

gdzie: $r^{(1)}(s) = \frac{dr(s)}{ds}$ oraz $F(t,t_0)$ jest n x n wymiarową macierzą fundamentalną, spełniającą następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{d}{dt} F(t,t_0) = A(t)F(t,t_0)$$

z warunkowym początkowym $F(t_0,t_0) = I$. Ponieważ względna sterowalność układu (1) posiada istotne znaczenie przy określaniu sterowania optymalnego, poniżej, dla wygody czytelnika podano podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące względnej sterowalności. Szersze omówienie pojęcia względnej sterowalności można znaleźć w pracach [3], [6].

Definicja 2

Układ (1) nazywa się względnie sterowalnym na przedziale $[t_0, t_1]$, jeżeli dla dowolnego stanu zupełnego $z(t_0)$ i dowolnego wektora $x_1 \in R^n$, istnieje sterowanie $u \in U$, takie, że odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria układu (1) spełnia warunek $x(t_1) = x_1$.

W dalszej części niniejszego opracowania zakłada się, że $v(t_1) > t_o$. W pracy [3] udowodniono następujący warunek konieczny i wystarczający względnej sterowalności na przedziale $[t_o,t_1]$ układu (1):

Twierdzenie 1

Układ (1) jest względnie sterowalny na przedziale $[t_o,t_1]$ dla $t_1 > r(t_o)$, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi relacja:

$$\text{rząd } W(t_o,t_1) = n\,, \tag{6}$$

gdzie: $W(t_o,t_1)$ jest macierzą względnej sterowalności dla układu (1), daną następującą równością:

$$W(t_o,t_1) = \int_{t_o}^{v(t_1)} \left[F(t_o,s)B(s) + F(t_o,r(s))C(r(s))r^{(1)}(s)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[B'(s)F'(t_o,s) + C'(r(s))F'(t_o,r(s))r^{(1)}(s)\right] ds + \tag{7}$$

$$+ \int_{v(t_1)}^{t_1} F(t_o,s)B(s)B'(s)F'(t_o,s)ds$$

Symbol ' oznacza transpozycję macierzy.
Dla skrócenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenia:

$$q(z(t_o),x(t_1)) = F(t_o,t_1)x(t_1) - x(t_o) -$$

$$- \int_{v(t_o)}^{t_o} F(t_o,t_1(s))C(r(s))r^{(1)}(s)w(t_o,s)ds\,, \tag{8}$$

$$x'x = \|x\|^2 \quad \text{oraz} \quad \langle x,Kx\rangle = x'Kx = \|x\|_K^2\,, \tag{9}$$

gdzie: $x \in R^n$, oraz $K$ jest macierzą $n \times n$ wymiarową.

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni $R^n$.

Z równości (7) definiującej macierz względnej sterowalności dla układu (1) wynika, że macierz $W(t_0,t_1)$ jest macierzą symetryczną. Na mocy twierdzenia 1, warunkiem koniecznym i wystarczającym względnej sterowalności na przedziale $[t_0,t_1]$ układu (1) jest, aby macierz $W(t_0,t_1)$ była istotnie dodatnio określona. W dalszej części pracy zakłada się, że układ (1) jest względnie sterowalny na przedziale $[t_0,t_1]$.

## 2. Sterowanie z minimalną energią

W przypadku, gdy układ (1) jest względnie sterowalny na przedziale $[t_0,t_1]$, istnieje wiele sterowań $u(t)$ określonych na $[t_0,t_1]$, przeprowadzających układ (1) z danego początkowego stanu zupełnego $z(t_0)$, do żądanego stanu chwilowego $x_1$ w chwili $t_1$. Zagadnienie sterowania z minimalną energią, polega na wybraniu spośród wszystkich możliwych sterowań takiego, które minimalizuje następujący wskaźnik jakości: $\int_{t_0}^{t_1} \|u(s)\|^2 ds$. Wartość wyrażenia $\int_{t_0}^{t_1} \|u(s)\|^2 ds$ określa całkowitą energię sterowania $u(s)$ na przedziale $[t_0,t_1]$. Poniższe twierdzenie podaje postać sterowania z minimalną energią, oraz wartość minimalną wskaźnika jakości, odpowiadającą temu sterowaniu.

Twierdzenie 2

Niech $\tilde{u}(t)$ będzie dowolnym sterowaniem określonym na przedziale $[t_0,t_1]$ i przeprowadzającym układ (1) ze stanu zupełnego $z(t_0)$ do stanu chwilowego $x_1$ w chwili $t_1$. Jeżeli $u^*(t)$ jest postaci:

$$u^*(t) = \begin{cases} \left[B'(t)F'(t_0,t)+C'(r(t))F'(t_0,r(t))r^{(1)}(t)\right]W^{-1}(t_0,t_1)q(z(t_0),x_1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{dla} \quad t \in [t_0,v(t_1)) \\ B'(t)F'(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)q(z(t_0),x_1) \quad \text{dla} \quad t \in [v(t_1),t_1] \end{cases} \tag{10}$$

to sterowanie $u^*(t)$ przeprowadza układ (1) ze stanu zupełnego $z(t_0)$ do stanu chwilowego $x_1$ w chwili $t_1$ oraz zachodzi nierówność:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\tilde{u}(s)\|^2 ds \geqslant \int_{t_0}^{t_1} \|u^*(s)\|^2 ds \tag{11}$$

Ponadto, minimalna wartość energii sterowania jest dana wzorem:

$$E^* = \int_{t_0}^{t_1} \|u^*(s)\|^2 ds = \|q(z(t_0),x_1\|^2_{W^{-1}(t_0,t_1)} \tag{12}$$

Dowód

W pracy [3] udowodniono, że jeżeli sterowanie $u^*(t)$ jest postaci (10), to przeprowadza ono układ (1) ze stanu zupełnego $z(t_o)$ do stanu chwilowego $x_1$ w chwili $t_1$. Dowód tego faktu wynika bezpośrednio z podstawienia równości (10) do relacji (5).

Niech $\ddot{u}(t)$ będzie dowolnym sterowaniem przeprowadzającym układ (1) ze stanu zupełnego $z(t_o)$ do stanu chwilowego $x_1$ w chwili $t_1$. Stąd na mocy równości (5) oraz (8) otrzymuje się następujące relacje:

$$x(t_1) = x_1 = F(t_1,t_o)\Big[x(t_o) + \int\limits_{v(t_o)}^{t_o} F(t_o,r(s))C(r(s))r^{(1)}(s)w(t_o,s)ds +$$

$$+\int\limits_{t_o}^{v(t_1)} \big[F(t_o,s)B(s)+F(t_o,r(s))C(r(s))r^{(1)}(s)\ddot{u}(s)ds +$$

$$+\int\limits_{v(t_1)}^{t_1} F(t_o,s)B(t_o,s)B(s)\ddot{u}(s)ds\Big]$$

oraz:

$$\int\limits_{v(t_1)}^{t_1} G(t_o,s)\ddot{u}(s)ds + \int\limits_{t_o}^{v(t_1)} H(t_o,s)\ddot{u}(s)ds =$$

$$= \int\limits_{v(t_1)}^{t_1} G(t_o,s)u^*(s)ds + \int\limits_{t_o}^{v(t_1)} H(t_o,s)u^*(s)ds\ , \tag{14}$$

gdzie:

$$G(t_o,s) = F(t_o,s)B(s) \tag{15}$$

$$H(t_o,s) = F(t_o,s)B(s) + F(t_or(s))C(r(s))r^{(1)}(s) \tag{16}$$

Równość (14) można przedstawić w następującej postaci:

$$\int_{v(t_1)}^{t_1} G(t_o,s)(\tilde{u}(s) - u^*(s))ds + \int_{t_o}^{v(t_1)} H(t_o,s)(\tilde{u}(s) - u^*(s))ds = 0 \quad (17)$$

Stąd otrzymuje się:

$$< \int_{v(t_1)}^{t_1} G(t_o,s)(\tilde{u}(s) - u^*(s))ds + \int_{t_o}^{v(t_1)} H(t_o,s)(\tilde{u}(s) - u^*(s))ds \, , \quad (18)$$

$$W^{-1}(t_o,t_1)q(z(t_o),x_1) > = 0$$

Wykorzystując relację (10) oraz własności iloczynu skalarnego, równość (18) można przedstawić w następującej postaci:

$$\int_{v(t_1)}^{t_1} < \tilde{u}(s) - u^*(s) \, , \, G'(t_o,s)W^{-1}(t_o,t_1)q(z(t_o),x_1) > ds +$$

$$(19)$$

$$+ \int_{t_o}^{v(t_1)} < \tilde{u}(s) - u^*(s) \, , \, H'(t_o,s)W^{-1}(t_o,t_1)q(z(t_o),x_1) > ds = 0$$

czyli:

$$\int_{t_o}^{v(t_1)} < \tilde{u}(s) - u^*(s) \, , \, u^*(s) > ds + \int_{v(t_1)}^{t_1} < \tilde{u}(s) - u^*(s) \, , \, u^*(s) > ds = \quad (20)$$

$$= \int_{t_o}^{t_1} < \tilde{u}(s) - u^*(s) \, , \, u^*(s) > ds = 0$$

Po prostych przekształceniach relacja (20) przyjmie postać:

$$\int_{t_o}^{t_1} \| \tilde{u}(s)\|^2 ds = \int_{t_o}^{t_1} \| \tilde{u}(s) - u^*(s)\|^2 ds + \int_{t_o}^{t_1} \|u^*(s)\|^2 ds \quad (21)$$

Stąd bezpośrednio uzyskuje się następującą nierówność:

$$\int_{t_o}^{t_1} \|\tilde{u}(s)\|^2 ds > \int_{t_o}^{t_1} \|u^*(s)\|^2 ds \tag{22}$$

Zatem pierwsza część tezy twierdzenia została udowodniona.
Minimalna wartość energii odpowiadająca sterowaniu $u^*(t)$ wyraża się następującym wzorem:

$$E^* = \int_{t_o}^{t_1} \|u^*(s)\|^2 ds \tag{23}$$

Podstawiając $u^*(s)$ z relacji (10) do wzoru (23) uzyskuje się:

$$E^* = \int_{v(t_1)}^{t_1} \|G'(t_o,s)W^{-1}(t_o,t_1)q(z(t_o),x_1)\|^2 ds + \int_{t_o}^{v(t_1)} \|H'(t_o,s)W^{-1}(t_o,t_1)q(z(t_o),x_1)\|^2 ds =$$

$$= \int_{v(t_1)}^{t_1} < G'(t_o,s)W^{-1}(t_o,t_1)q(z(t_o),x_1), G'(t_o,s)W^{-1}(t_o,t_1)q(z(t_o),x_1)> ds + \int_{t_o}^{v(t_1)} < H'(t_o,s)W^{-1}(t_o,t_1)q(z(t_o),x_1), H'(t_o,s)W^{-1}(t_o,t_1)q(z(t_o),x_1)> ds \tag{24}$$

Wykorzystując relację (7) oraz własności iloczynu skalarnego można równości (24) przekształcić do następującej postaci:

$$E^* = \int_{v(t_1)}^{t_1} < q(z(t_o),x_1), W^{-1}(t_o,t_1)G(t_o,s)G'(t_o,s)W^{-1}(t_o,t_1)q(z(t_o),x_1)> ds + \int_{t_o}^{v(t_1)} < q(z(t_o),x_1), W^{-1}(t_o,t_1)H(t_o,s)H'(t_o,s)W^{-1}(t_o,t_1)q(z(t_o),x_1)> ds =$$

$$= \langle q(z(t_0),x_1\ ,\ W^{-1}(t_0,t_1)\left[\int_{v(t_1)}^{t_1} G(t_0,s)G'(t_0,s)ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{v(t_1)} H(t_0,s)H'(t_0,s)ds\right] W^{-1}(t_0,t_1)q(z(t_0),x_1)\rangle \qquad (25)$$

Korzystając z zależności (7) oraz (8), relację (25) można przedstawić w następującej formie:

$$E^* = \langle q(z(t_0),x_1)\ ,\ W^{-1}(t_0,t_1)W(t_0,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)q(z(t_0),x_1)\rangle =$$

$$= \langle q(z(t_0),x_1)\ ,\ W^{-1}(t_0,t_1)q(z(t_0),x_1)\rangle = \| q(z(t_0),x_1)\|^2_{W^{-1}(t_0,t_1)} \qquad (26)$$

Zatem druga część tezy została udowodniona, co kończy dowód twierdzenia.

## 3. Sterowanie z minimalną energią układem stacjonarnym

Niech będzie dany liniowy stacjonarny układ dynamiczny ze stałym opóźnieniem w sterowaniu, opisany następującym równaniem:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Cu(t-h), \quad t \in [0,t_1], \qquad (27)$$

gdzie: A,B,C są stałymi macierzami odpowiednio o wymiarach nxn, nxp, nxp, oraz $h = const > 0$ jest stałym w czasie opóźnieniem sterowania. W tym przypadku zachodzą następujące relacje:

$$v(t) = t - h\ , \quad r(t) = t + h\ , \quad r^{(1)}(t) = 1 \qquad (28)$$

$$F(0,t) = \exp(At) \qquad (29)$$

$$q(z(0)x_1(t_1)) = \exp(At_1)x(t_1) - x(t_0) -$$

$$- \int_{v(t_0)}^{t_0} \exp(A(s+h)Cw(0,s)ds \qquad (30)$$

$$W(0,t_1) = \int_{t_0}^{v(t_1)} \left[\exp(As)B+\exp(A(s+h))C\right]\left[B'\exp(A's) + \right.$$

$$\left. + C'\exp(A'(s+h))\right]ds + \int_{v(t_1)}^{t_1} \exp(As)BB'\exp(A's)ds \, . \tag{31}$$

Uwzględniając powyższe zależności, twierdzenie 2, dla przypadku układu stancjonarnego ze stałym opóźnieniem przyjmie następującą formę:

Wniosek 1

Niech $t_1 > h$, oraz układ (27) będzie względnie sterowalny na przedziale $[0,t_1]$. Niech $\tilde{u}(t)$ będzie dowolnym sterowaniem określonym na przedziale $[0,t_1]$ i przeprowadzającym układ (27) ze stanu zupełnego $z(0)$ do stanu chwilowego $x_1$ w chwili $t_1$.
Jeżeli sterowanie $u^*(t)$ jest następującej postaci:

$$u^*(t) = \begin{cases} \left[B'\exp(A't)+C'\exp(A'(t+h))\right]W^{-1}(0,t_1)q(z(0),x_1) & \text{dla } t \in [0,t_1-h) \\ B'\exp(A't)W^{-1}(0,t_1)q(z(0),x_1) & \text{dla } t \in [t_1-h,t_1] \end{cases} \tag{32}$$

to sterowanie $u^*(t)$ przeprowadza układ (27) ze stanu zupełnego $z(0)$do stanu chwilowego $x_1$ w chwili $t_1$ oraz zachodzi nierówność:

$$\int_{t_0}^{t_1} \| \tilde{u}(s)\|^2 ds \geqslant \int_{t_0}^{t_1} \| u^*(s)\|^2 ds \tag{33}$$

Ponadto, minimalna wartość energii sterowania jest dana wzorem:

$$E^* = \int_{t_0}^{t_1} \|u^*(s)\|^2 ds = \| q(z(0),x_1)\|^2_{W^{-1}(0,t_1)} \tag{34}$$

Dowód

Podstawiając do równości (10), (11) i (12), zależności (28), (29),(30) oraz (31), uzyskuje się bezpośrednio wzory (32), (33) i (34).

## 4. Wnioski końcowe

W artykule, korzystając z założenia względnej sterowalności układu, sformułowano twierdzenia, podające postać sterowania z minimalną energią, zarówno dla układów w niestacjonarnych ze zmiennym opóźnieniem sterowania, jak i dla układów stacjonarnych ze stałym opóźnieniem. Uzyskane rezultaty, można uogólnić na przypadek wielu opóźnień, tak w sterowaniu, jak również we współrzędnych stanu chwilowego, układu.

## LITERATURA


[1] Banks H.T.: Necessary Conditions for Control Problems with Variable Lags, SIAM Journal on Control, vol. 7, no. 1, February 1968.

[2] Chyung D.H., Lee E.B.: Delayed Action Control Problems, Materiały IV Kongresu IFAC, sekcja nr 13, Warszawa 1969.

[3] Klamka J., Mikulski J.: Sterowalność układów liniowych z opóźnieniem w sterowaniu". Z.N. Politwchniki Śląskiej, zeszyt Matematyka, Gliwice nr 26, str. 245-254, 1976.

[4] Manitius A.: Optymalne sterowanie procesami z opóźnieniami - przegląd problemów i pewne nowe rezultaty, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XV. zeszyt 2, 1970.

[5] Oguztoreli N.M.: Time - Lag Control Systems, Academic Press, New York, 1966.

[6] Sebakhy O., Bayoumi M.M.: Controllability of Linear Time-Varying Systems with Delay in Control, International Journal of Control, vol.17, no. 1, January, 1973.


## УПРАВЛЕНИЕ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ


Р е з ю м е

В статье рассматривается проблема оптимального управления с минимальной энергией, линейными динамическими системами нестационарными с изменяемым запаздыванием по управлению. Учитывая матрицу относительной управляемости представлено закон оптимального управления.


## MINIMAL ENERGY CONTROL OF LINEAR CONTINUOUS SYSTEM WITH DELAY


S u m m a r y

The paper deals with a study of minimal energy control of linear nonstationary dynamical system with time-variabla delay in control. Using the relative controllability matrix of the system, the formula of optimal control is given.