ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1977

Seria: AUTOMATYKA z. 37 Nr kol. 507

Jerzy KLAMKA

STEROWANIE Z MINIMALNĄ ENERGIĄ UKŁADEM DYSKRETNYM Z OPÓŹNIENIEM

Streszczenie. W artykule rozpatrzono problem sterowania z minimalną energią liniowym niestacjonarnym układem dyskretnym z opóźnieniem w sterowaniu. Wykorzystując macierz sterowalności określono postać sterowania z minimalną energią tymi układami.

1. Wstęp

Problem sterowania z minimalną energią liniowymi ciągłymi układami dynamicznymi ze stałymi opóźnieniami w sterowaniu był rozpatrywany przez wielu autorów [1], [2], [4]. Podobnie zagadnienie sterowania z minimalną energią liniowymi układami dyskretnymi bez opóźnień w sterowaniu jest znane w literaturze [5]. Brak natomiast opracowania dotyczącego tego zagadnienia w odniesieniu do liniowych układów dyskretnych z opóźnieniem w sterowaniu. W niniejszej pracy, pragnąc wypełnić tę lukę, podano postać sterowania z minimalną energią dla liniowych dyskretnych niestacjonarnych układów dynamicznych ze stałym opóźnieniem w sterowaniu. Określono również minimalną wartość energii tego sterowania. Przy rozwiązaniu tych zagadnień korzysta się w istotny sposób z rezultatów uzyskanych w pracy [3], a szczególnie ze zdefiniowanej tam macierzy sterowalności dla układów dyskretnych z opóźnieniem w sterowaniu. W pracy [3], zamieszczona jest również bibliografia dotycząca problemu sterowalności układów dyskretnych z opóźnieniem w sterowaniu.

2. Definicje i oznaczenia

Niech będzie dany liniowy niestacjonarny dyskretny układ dynamiczny ze stałym opóźnieniem w sterowaniu, opisany liniowym wektorem równaniem różnicowym w następującej postaci:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + C(k)u(v(k)) \quad k \in [k_0, k_{N-1}] \subset Z \ , \qquad (1)$$

gdzie:

$A(k)$ jest macierzą $n \times n$ wymiarową,

$B(k), C(k)$ są macierzami $n \times p$ wymiarowymi,

$x(k) \in R^n$ jest wektorem stanu chwilowego,

$u(k) \in R^p$ jest wektorem sterowań,
Z jest zbiorem liczb całkowitych.

$$[k_o, k_N] = \{k_o, k_1, \ldots, k_N; \text{ gdzie } k_i \in Z,\ k_i = k_o + i, \text{ dla } i = 0,1,\ldots,N\}$$

Funkcja $v(k)$ typu $v: [k_o, k_{N-1}] \to Z$, jest zdefiniowana wzorem:

$$v(k) = k - h\ , \tag{2}$$

gdzie h jest liczbą naturalną, reprezentującą stałe opóźnienie.
Wprowadza się funkcję $r(k)$ typu $r: [v(k_o),\ v(k_{N-1})] \to [k_o, k_{N-1}]$, określoną następującym wzorem:

$$r(k) = k + h\ . \tag{3}$$

Poniżej, dla wygody czytelnika przytoczono definicje, oznaczenia i pewne rezultaty uzyskane w pracy [3], a dotyczące sterowalności układu (1). Będą one wykorzystywane w dalszej części niniejszego artykułu.

Definicja 1

Zbiór $z(k) = \{x(k), u(v(k)), u(v(k)+1), \ldots, u(k-2), u(k-1)\}$ nazywa się stanem zupełnym układu (1) w chwili k.

Definicja 2

Układ (1) jest względnie sterowalny na odcinku $[k_o, k_N]$, jeżeli dla dowolnego stanu zupełnego $z(k_o)$ i dowolnego wektora $x_N \in R^n$, istnieje sekwencja sterowań $u(k_o), u(k_o+1), \ldots, u(k_{N-2}), u(k_{N-1})$, taka, że zachodzi następująca równość: $x(k_N) = x_N$.

Jednoznaczne rozwiązanie równania (1) z początkowym stanem zupełnym $z(k_o)$ jest następującej postaci:

$$x(k) = F(k,k_o)x(k_o) + \sum_{j=k_o}^{j=k-1} F(k,j+1)(B(j)u(j) + C(j)u(v(j)));\ k > k_o, \tag{4}$$

gdzie: $F(k,j)$ jest $n \times n$ wymiarową macierzą tranzycji, daną równością:

$$F(k,j) = F(k,j+1)A(j) = A(k-1)A(k-2)\ \ldots\ A(j+1)A(j) \quad \text{dla} \quad k > j \tag{5}$$

$F(k,k) = I_n$, gdzie I_n oznacza $n \times n$ wymiarową macierz jednostkową,
W przypadku układu stacjonarnego, gdy $A(k) = A$, dla $k \in Z$, otrzymuje się:

$$F(k,j) = F(k-j) = A^{k-j}\ , \quad \text{dla} \quad k \geqslant j \tag{6}$$

Macierze A(k), występujące w powyższych wzorach, mogą być osobliwe dla pewnych wartości zmiennej k, czyli układ (1) może być zdegenerowany. Wyczerpujące wiadomości o degeneracji układów dyskretnych znajdzie czytelnik w pracy [6]. Należy jedynie nadmienić, że występowanie opóźnienia w sterowaniu nie wpływa na degenerację układu dyskretnego [6]. Podstawiając w równości (4), $k = k_N$, otrzymuje się następującą relację

$$x(k_N) = F(k_N,k_o)x(k_o) + \sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} F(k_N,j+1)(B(j)u(j) + C(j)u(v(j))) =$$

$$= F(k_N,k_o)x(k_o) + \sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} F(k_N,j+1)B(j)u(j) + \tag{7}$$

$$+ \sum_{j=v(k_o)}^{j=v(k_N)-1} F(k_N,r(j+1))C(r(j))u(j) .$$

W dalszej części niniejszej pracy zakłada się zawsze, że zachodzi:

$$v(k_N) > k_o . \tag{8}$$

Wszystkie dalsze rozważania przeprowadza się przy założeniu (8). Po prostych przekształceniach, równość (7) można przedstawić w następującej postaci, dogodnej do dalszych rozważań i przeliczeń:

$$x(k_N) = F(k_N,k_o)x(k_o) + \sum_{j=v(k_o)}^{j=k_o-1} F(k_N,r(j+1))C(r(j))u(j) +$$

$$+ \sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} F(k_N,r(j+1))C(r(j))u(j) + \sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} F(k_N,j+1)B(j)u(j). \tag{9}$$

Dla skrócenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenia:

$$q(z(k_o),x(k_N))=x(k_N)-F(k_N,k_o)x(k_o) - \sum_{j=v(k_o)}^{j=k_o-1} F(k_N,r(j+1))C(r(j))u(j) \tag{10}$$

$$G(k_N,j) = F(k_N,j+1)B(j) \tag{11}$$

$$H(k_N,j) = F(k_N,r(j+1))C(r(j)) + F(k_N,j+1)B(j) \tag{12}$$

$$< x\ ,\ Qx > = x'Qx = \|x\|_Q^2\ , \tag{13}$$

gdzie: $<\cdot,\cdot>$ oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni R^n, symbol' oznacza transpozycję, $x \in R^n$, oraz Q jest macierzą n x n wymiarową.

Macierz sterowalności dla układu (1) definiuje się następująco [3]:

$$W(k_o,k_N) = \sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} H(k_N,j)H'(k_N,j) + \sum_{j=v(k_N)}^{j=k_N-1} G(k_N,j)G'(k_N,j)\ . \tag{14}$$

W pracy [3], sformułowano następujący warunek konieczny i wystarczający sterowalności na odcinku $[k_o,k_N]$ układu dynamicznego (1): "Układ dynamiczny postaci (1) jest względnie sterowalny na odcinku $[k_o,k_N]$, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następująca zależność":

$$\text{rząd}\ W(k_o,k_N) = n\ . \tag{15}$$

3. Sterowanie z minimalną energią

W przypadku, gdy układ dynamiczny (1) jest względnie sterowalny na odcinku $[k_o,k_N]$, wówczas istnieje wiele sterowań u(j) określonych na $[k_o, k_{N-1}]$, przeprowadzających układ dynamiczny (1) z danego początkowego stanu zupełnego $z(k_o)$ do żądanego końcowego stanu chwilowego $x(k_N)$. Zagadnienie sterowania z minimalną energią układem dynamicznym (1), polega na wybraniu spośród wszystkich możliwych sterowań przeprowadzających stan zupełny $z(k_o)$ do stanu chwilowego $x(k_N)$, takiego, które minimalizuje następujący wskaźnik jakości:

$$J(u) = \sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} \|u(j)\|_{Q(j)}^2\ , \tag{16}$$

gdzie: Q(j) jest macierzą p x p wymiarową symetryczną i nieosobliwą dla każdego $j \in [k_o,k_{N-1}]$. Wartość wskaźnika jakości J(u), przy $Q(j) = I_p$, $j \in [k_o, k_{N-1}]$ określa całkowitą energię sterowania u(j) na odcinku $[k_o, k_{N-1}]$.

W celu skrócenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenie:

$$W_Q(k_o,k_N) = \sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} H(k_N,j)Q^{-1}(j)H'(k_N,j) + \sum_{j=v(k_N)}^{j=k_N-1} G(k_N,j)Q^{-1}(j)G'(k_N,j). \tag{17}$$

Twierdzenie sformułowane poniżej określa postać sterowania minimalizującego wskaźnik jakości (16) oraz podaję jego wartość minimalną.

Twierdzenie 1

Załóżmy, że układ dynamiczny (1) jest względnie sterowalny na odcinku $[k_o,k_{N-1}]$. Niech $\bar{u}(j)$ będzie dowolnym sterowaniem określonym na odcinku $[k_o,k_{N-1}]$ i przeprowadzającym układ dynamiczny (1) ze stanu zupełnego $z(k_o)$ do stanu chwilowego $x(k_N)$. Jeżeli wybierzemy sterowanie $u^*(j)$ następującej postaci:

$$u^*(j) = \begin{cases} Q^{-1}(j)H'(k_N,j)W_Q^{-1}(k_o,k_N)q(z(k_o),x(k_N)), & \text{dla } j \in [k_o,v(k_N)-1] \\ Q^{-1}(j)G'(k_N,j)W_Q^{-1}(k_o,k_N)q(z(k_o),x(k_N)), & \text{dla } j \in [v(k_N),k_N-1] \end{cases} \tag{18}$$

to sterowanie $u^*(j)$ przeprowadza układ dynamiczny ze stanu zupełnego $z(k_o)$ do żądanego stanu chwilowego $x(k_N)$ oraz zachodzi nierówność:

$$\sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} \|\bar{u}(j)\|^2_{Q(j)} \geq \sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} \|u^*(j)\|^2_{Q(j)}. \tag{19}$$

Ponadto, minimalna wartość E energii sterowania $u^*(j)$ jest dana wzorem:

$$E = \sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} \|u^*(j)\|^2_{Q(j)} = \|q(z(k_o),x(k_N))\|^2_{W_Q^{-1}(k_o,k_N)} \tag{20}$$

Dowód

W pracy [3] udowodniono, że jeżeli sterowanie $u^*(j)$ jest postaci (18), to przeprowadza ono układ dynamiczny (1) ze stanu zupełnego $z(k_o)$ do stanu chwilowego $x(k_N)$. Dowód tego faktu wynika bezpośrednio z podstawienia równości (18) do relacji (9) i prostych przeliczeń. Niech będzie dane dowolne sterowanie $\bar{u}(j)$, przeprowadzające układ dynamiczny (1) ze stanu zupełnego $z(k_o)$ do żądanego stanu chwilowego $x(k_N)$. Na mocy powyższej uwagi prawdziwą jest następująca równość:

$$\sum_{j=v(k_N)}^{j=k_N-1} G(k_N,j)(\bar{u}(j) - u^*(j)) +$$
$$+\sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} H(k_N,j)(\bar{u}(j) - u^*(j)) = 0 \,. \tag{21}$$

Wykorzystując relację (21), otrzymuje się następującą równość:

$$< \sum_{j=v(k_N)}^{j=k_N-1} G(k_N,j)(\bar{u}(j)-u^*(j)) + \sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} H(k_N,j)(\bar{u}(j)-u^*(j)) \,,$$
$$, W_Q^{-1}(k_o,k_N(q(z(k_o),x(k_N)) > = 0 \,. \tag{22}$$

Na mocy relacji (18) oraz własności iloczynu skalarnego w przestrzeni R^n, równość (22) można przedstawić w następującej postaci:

$$\sum_{j=v(k_N)}^{j=k_N-1} < \bar{u}(j)-u^*(j), \; G'(k_N,j)W_Q^{-1}(k_o,k_N)q(z(k_o),x(k_N)) > +$$
$$+\sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} < \bar{u}(j)-u^*(j), \; H'(k_N,j)W_Q^{-1}(k_o,k_N)q(z(k_o),x(k_N)) > = 0 \tag{23}$$

czyli:

$$\sum_{j=v(k_N)}^{j=k_N-1} < \bar{u}(j)-u^*(j), \; Q(j)u^*(j)> + \sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} < \bar{u}(j)-u^*(j), \; Q(j)u^*(j) > =$$
$$= \sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} < \bar{u}(j)-u^*(j), \; Q(j)u^*(j) > = 0 \,. \tag{24}$$

Wykorzystując równość (24) oraz własności iloczynu skalarnego i normy, po elementarnych przekształceniach uzyskuje się zależność:

$$\sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} \| \bar{u}(j) \|^2_{Q(j)} = \sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} \| \bar{u}(j) - u^*(j) \|^2_{Q(j)} + \sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} \| u^*(j) \|^2_{Q(j)} \tag{25}$$

Stąd bezpośrednio uzyskuje się występującą w tezie twierdzenia 1 nierówność:

$$\sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} \| \bar{u}(j) \|^2_{Q(j)} \geqslant \sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} \| u^*(j) \|^2_{Q(j)} . \tag{26}$$

Zatem pierwsza część tezy twierdzenia 1 została udowodniona.
Minimalna wartość energii E odpowiadająca sterowaniu $u^*(j)$, jest dana następującym wzorem:

$$E = \sum_{j=k_o}^{j=k_N-1} \| u^*(j) \|^2_{Q(j)} \tag{27}$$

Podstawiając $u^*(j)$ z relacji (18) do wzoru (27), otrzymuje się równość:

$$E = \sum_{j=v(k_N)}^{j=k_N-1} \| Q^{-1}(j) G'(k_N,j) W_Q^{-1}(k_o,k_N) q(z(k_o),x(k_N)) \|^2_{Q(j)} +$$

$$+ \sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} \| Q^{-1}(j) H'(k_N,j) W_Q^{-1}(k_o,k_N) q(z(k_o),x(k_N)) \|^2_{Q(j)} =$$

$$= \sum_{j=v(K_N)}^{j=k_N-1} < Q^{-1}(j) G'(k_N,j) W_Q^{-1}(k_o,k_N) q(z(k_o),x(k_N)) ,$$

$$, Q(j) Q^{-1}(j) G'(k_N,j) W_Q^{-1}(k_o,k_N) q(z(k_o),x(k_N)) > + \tag{28}$$

$$+\sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} < Q^{-1}(j)H'(k_N,j)W_Q^{-1}(k_o,k_N)q(z(k_o),x(k_N)) \,, \qquad (28)$$

$$, Q(j)Q^{-1}(j)H'(k_N(j)W_Q^{-1}(k_o,k_N)q(z(k_o),x(k_n)) > .$$

Wykorzystując relację (14) definiującą macierz sterowalności oraz własności iloczynu skalarnego w przestrzeni R^n, można zależność (28) przekształcić do następującej, bardziej dogodnej postaci:

$$E = \sum_{j=v(k_N)}^{j=k_N-1} < q(z(k_o),x(k_N)) \,, W_Q^{-1}(k_o,k_N)G(k_N,j)Q^{-1}(j)G'(k_N,j)W_Q^{-1}(k_o,k_N)$$

$$\cdot\, q(z(k_o),x(k_N)) > + \sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} < q(z(k_o),x(k_n)) \,,$$

$$, W_Q^{-1}(k_o,k_N)G(k_N,j)Q^{-1}(j)G'(k_N,j)W_Q^{-1}(k_o,k_N)q(z(k_o),x(k_N)) > = \qquad (29)$$

$$= < q(z(k_o),(k_N)) \,, W_Q^{-1}(k_o,k_N)\left\{\sum_{j=v(k_N)}^{j=k_N-1} G(k_N,j)Q^{-1}(j)G'(k_N,j) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=k_o}^{j=v(k_N)-1} H(k_N,j)Q^{-1}(j)H'(k_N,j)\right\} W_Q^{-1}(k_o,k_N)q(z(k_o),x(k_N)) >$$

Korzystając z zależności (14) oraz (10), po elementarnych przekształceniach można relację (29) doprowadzić do następującej postaci:

$$E = < q(z(k_o),x(k_N)) \,, W_Q^{-1}(k_o,k_N)W_Q(k_o,k_N)W_Q^{-1}(k_o,k_N)q(z(k_o),x(k_N)) > =$$

$$(30)$$

$$= < q(z(k_o),x(k_N)), W_Q^{-1}(k_o,k_N)q(z(k_o),x(k_N)) > = \| q(z(k_o),x(k_N)) \|^2_{W_Q^{-1}(k_o\, k_N)}$$

Zatem druga część tezy twierdzenia 1 została udowodniona. W ten sposób całe twierdzenie 1 zostało dowiedzione.

4. Wnioski końcowe

Sformułowane w pracy twierdzenie podaje analityczny wzór na sterowanie z minimalną energią liniowym dyskretnym niestacjonarnym układem dynamicznym ze stałym opóźnieniem w sterowaniu. Twierdzenie określa również minimalną wartość energii tego sterowania, zależną od parametrów układu oraz od początkowego stanu zupełnego i końcowego stanu chwilowego. Zastosowanie twierdzenia w praktyce nie nastręcza większych trudności i sprowadza się wyłącznie do prostych działań na macierzach liczbowych. Uzyskane rezultaty mogą być uogólnione na przypadek układów dyskretnych z wieloma opóźnieniami w sterowaniu,

LITERATURA

[1] Banas J.F., Vacroux A.G.: Optimal discrete control of time-lag systems, Materiały IV Kongresu IFAC, sekcja 13, s. 41-54, Warszawa, 16-21 czerwiec, 1969.

[2] Jacobs M.Q., Kao T.J.: An optimum settling problem for time-lag systems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 40, 1972, s. 687-707.

[3] Klamka J.: Sterowalność liniowych układów dyskretnych z opóźnieniem, ZNP Politechniki Śląskiej, zeszyt "Automatyka" nr 35, str. 27-38, 1976 r.

[4] Sebakhy O., Bayoumi M.M.: Controllability of linear time-varying systems with delay in control, International Journal of Control, vol. 17, no. 1, January 1973, s. 127-135.

[5] Sorenson H.W.: Controllability and observability of linear stochastic, time-discrete control systems, Advances in Control Systems, vol. 6, 1968, s. 95-158.

[6] Weiss L.: Controllability, realization and stability of discrete time systems, SIAM Journal on Control, vol. 10, no. 2, May, 1972, s. 230 - - 251.

УПРАВЛЕНИЕ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Р е з ю м е

В статье рассматривается проблема управления минимальной энергией, линейными нестационарными дискретными динамическими системами с неименяемым запаздыванием по управлению. Учитывая матрицу управляемости, представлен закон управления с минимальной знегрией.

MINIMAL ENERGY CONTROL OF DISCRETE SYSTEM WITH DELAY

S u m m a r y

The paper deals with a study of minimum energy control of linear non-stationary discrete dynamical system with constant delay in the control. Using the controllability matrix of the system, the formula for minimum energy control is given.