

Ernest CZOGAŁA

Paweł KANIUT

Jerzy KOPKA

## PRÓBA OCENY CZĘSTOTLIWOŚCI GRANICZNEJ APARATÓW REJESTRUJĄCYCH KRZYWĄ EKG

Streszczenie. W pracy przeanalizowano problem oszacowania częstotliwości granicznej aparatów rejestrujących krzywą ekg. wraz z oceną błędu wynikającego z przyjęcia tej częstotliwości. Otrzymane analitycznie równanie przestępne rozwiązano na maszynie cyfrowej. Wyniki przedstawiono na wykresie.

### Wstęp

Metodami rejestracji zmian napięć elektrycznych powstających w mięśniu sercowym zajmuje się dziedzina zwana elektrokardiografią. Źródło energii elektrycznej mieści się w komórkach serca, w których zachodzą tzw. procesy bioelektryczne [2]. Urządzenia rejestrujące zmiany napięć mięśnia sercowego i wykreślające krzywą elektrokardiograficzną nazywają się elektrokardiografami. Krzywa elektrokardiograficzna (krzywa EKG) jest jednym z najważniejszych elementów współczesnej diagnostyki chorób serca. Aparaty elektrokardiograficzne posiadają różną skalę dokładności, począwszy od prostych aparatów o małej dokładności do tzw. high fidelity electrocardiographs, które rejestrują dużą ilość szczegółów łącznie z ząbkami w obrębie załamek, nieuchwytnych lub nierozróżnialnych na zwykłych zapisach EKG [2].

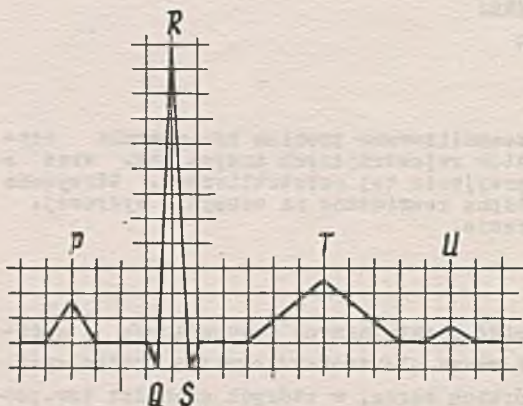
Z punktu widzenia konstrukcji takich aparatów istnieje problem analizy dokładności tych aparatów, a ściślej mówiąc dokładności rejestracji krzywej EKG.

Celem niniejszej pracy jest próba oceny częstotliwości granicznej elektrokardiografów wraz z oceną błędu wynikającego z przyjęcia tej częstotliwości. Istnieje szereg metod oceny częstotliwości granicznej [1], jednak najbardziej naturalnymi kryteriami oszacowania częstotliwości granicznej wydają się być, zdaniem autorów, kryteria oparte na analizie widma sygnału czasowego. Kryterium tego rodzaju przyjęte arbitralnie w zastosowaniu do krzywej EKG wykorzystują autorzy niniejszej pracy.

### 1. Sformułowanie problemu

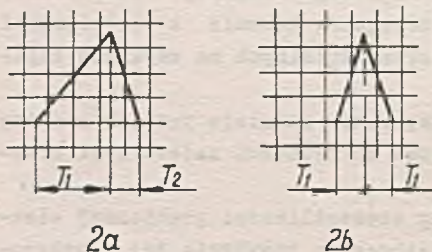
Często zachodzi potrzeba oceny częstotliwości granicznej dla urządzeń rejestrujących różne sygnały czasowe. Problem taki może wystąpić zarówno

w przypadku aparatów już działających, jak i będących w fazie konstrukcji. Szczególnie wyraźnie występuje to zagadnienie w urządzeniach rejestrujących sygnał okresowy, jakim jest krzywa elektrokardiograficzna, którą dalej nazywać będziemy sygnałem EKG. W związku z różnorodnością aparatury rejestrującej ten sygnał, występuje również problem oceny błędu dla przyjętej częstotliwości granicznej. Obydwa te zagadnienia, tzn. ocena częstotliwości granicznej oraz ocena błędu, są ze sobą powiązane.



Rys. 1. Uproszczony sygnał EKG

jest pewien dostatecznie mały interwał czasu o podstawie  $T_1 + T_2$ , przy czym zachodzi np.  $T_1 < T_2$  (rys. 2a).



Rys. 2. Trójkątne załamki krzywej EKG

Ostatnie założenie można zastrzyć, przyjmując, że mamy do czynienia z pojedynczym trójkątnym impulsem symetrycznym o podstawie czasu  $2T = 2T_1 < T_1 + T_2$  (rys. 2b). Sygnał ten można ująć zależnością:

$$x(\tau) = \begin{cases} A(1 - \frac{|\tau|}{T}) & |\tau| < T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases} \quad (1)$$

przy czym  $A$  jest amplitudą (wysokością trójkąta).

Chociaż widmo sygnału  $x(\tau)$  rozciąga się w przedziale  $0 < \omega < \infty$  założymy, że można znaleźć taką pulsację  $2\pi f_g$  ( $f_g$  częstotliwość graniczna), że w przedziale częstotliwości od 0 do  $f_g$  jest zawarta podstawowa część pola pod wartością bezwzględną funkcji widmowej, natomiast pole znajdujące się poza tym przedziałem jest dostatecznie małe. Wymagamy więc, aby pole widma pominiętego w przedziale częstotliwości od  $f_g$  do  $\infty$ , stanowiło mały u-

łamek równy  $\alpha$ , (spełniający nierówność  $0 < \alpha \ll 1$ ), całego pola w przedziale częstotliwości od 0 do  $\infty$ . Wobec powyższego częstotliwość graniczną  $f_g$  wyznaczmy z warunku

$$\int_{2\pi f_g}^{\infty} |F(\omega)| d\omega = \alpha \int_0^{\infty} |F(\omega)| d\omega, \quad (2)$$

gdzie  $F(\omega)$  jest funkcją widmową sygnału  $x(\tau)$  natomiast całka  $\int |F(\omega)| d\omega$  wyznacza pole pod modułem funkcji widmowej. Należy tutaj podkreślić, że zależność (2) mimo podobnej postaci, nie jest kryterium energetycznym. Warunek (2) przyjmujemy jako kryterium oszacowania częstotliwości graficznej aparatów rejestrujących krzywą EKG.

## 2. Wyznaczenie częstotliwości granicznej

Częstotliwość graniczną można wyznaczyć, jak wiadomo z warunku (2), przy znajomości funkcji widmowej  $F(\omega)$  badanego sygnału w granicach  $0 < \omega < \infty$ . Biorąc pod uwagę analityczną postać sygnału (1) oraz jego symetrię, można wyznaczyć funkcję widmową z relacji:

$$F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (3)$$

skąd po wykorzystaniu zależności (1) otrzymuje się:

$$F(\omega) = \frac{2A}{T\omega^2} (1 - \cos \omega T). \quad (4)$$

Wprowadzając gęstość widmową (4) do warunku (2) po wykonaniu całkowania uzyskuje się relację:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\omega} \Big|_{2\pi f_g}^{\infty} + \frac{\cos \omega T}{\omega} \Big|_{2\pi f_g}^{\infty} + T \int_{2\pi f_g}^{\infty} \frac{\sin \omega T}{\omega} d\omega = \\ & = \alpha \left[ -\frac{1}{\omega} \Big|_0^{\infty} + \frac{\cos \omega T}{\omega} \Big|_0^{\infty} + T \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega T}{\omega} d\omega \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Całka  $\int_0^x \frac{\sin a\omega}{\omega} d\omega = \text{Si}(ax)$  jest tzw. sinusem całkowym [4] i pozwala się wyrazić szeregiem o postaci:

$$\text{Si}(ax) = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7 \cdot 7!} + \dots \quad (6)$$

Wiedząc, że wartość całki dla  $x \rightarrow \infty$  wynosi:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dla } a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{dla } a < 0 \end{cases} \quad (7)$$

oraz biorąc pod uwagę, że:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\cos \omega T - 1}{\omega} = 0, \quad (8)$$

uzyskuje się ostatecznie równanie wiążące częstotliwość graniczną z błędem powstałym wskutek jej przyjęcia

$$\frac{1}{2\pi f_g} - \frac{\cos 2\pi f_g T}{2\pi f_g} + T \left[ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(T 2\pi f_g) \right] = \alpha \frac{\pi}{2} T. \quad (9)$$

Równanie (9) jest równaniem przestępnym, którego rozwiązania numeryczne podane zostaną w następnym punkcie.

### 3. Wyniki obliczeń numerycznych

Z uwagi na przestępnosć równania (9) dokonano jego analizy numerycznej na maszynie cyfrowej w pewnym zakresie parametrów.

Uzyskano wyniki w postaci rodziny krzywych dla różnych wartości parametru  $T$  [s] w układzie współrzędnych  $\alpha$  [%] i  $f_g$  [Hz]. Wyniki te przedstawiono na wykresie (rys. 3). Można zauważyć, że dla każdej stałej wartości czasu  $T$  trwania trójkątnego załamka wraz ze zmniejszaniem się częstotliwości granicznej  $f_g$ , błąd  $\alpha$  wzrasta. Na wykresie obserwuje się zjawisko "skoku" częstotliwości granicznej  $f_g$  dla błędu wynoszącego około 10%, niezależnie od czasu  $T$ .

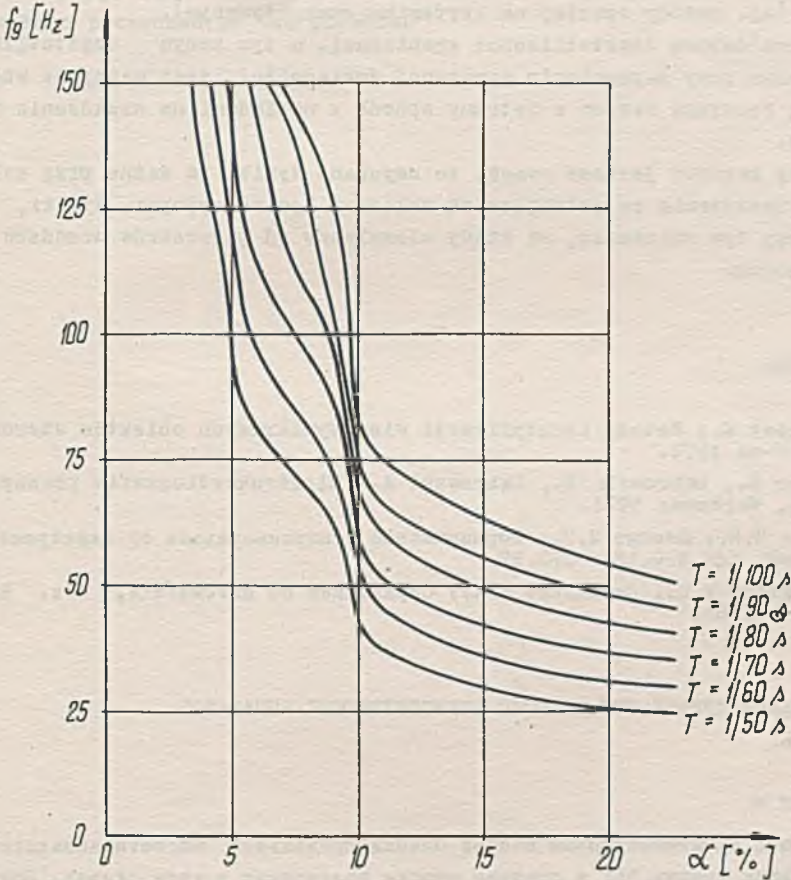
Należy zauważyć, że z równania (9) można otrzymać również pewne bardzo przybliżone oszacowanie częstotliwości granicznej. Rozwijając funkcję  $\cos 2\pi f_g T$  oraz  $\text{Si}(2\pi f_g T)$  w szereg i ograniczając się do jednego wyrazu uzyskuje się następujące wyrażenie na częstotliwość graniczną:

$$f_g = \frac{1 - \alpha}{4T}. \quad (10)$$

Zależność ta byłaby słuszna w przypadku małej wartości  $2\pi f_g T$  co prowadzi, z uwagi na relację:

$$2\pi f_g T = \frac{\pi}{2} (1 - \alpha) \quad (11)$$

do dużych wartości  $\alpha$ .



Rys. 3. Zależności między częstotliwością graniczną  $f_g$  a błędem  $\alpha$  dla różnych wartości  $T$ .

Z uwagi na dużą rozbieżność wyników z zależności (10) w porównaniu z wartościami obliczonymi na podstawie warunku (9), przybliżenie podane zależnością (10), wydaje się być mało użyteczne.

#### 4. Uwagi i wnioski końcowe

Praca niniejsza, zdaniem autorów, stanowi próbę oszacowania częstotliwości granicznej aparatów rejestrujących krzywą EKG wraz z oceną błędu wynikającego z przyjęcia tej częstotliwości. Oszacowania dokonano na podstawie kryterium opartego na analizie widma sygnału czasowego, wykorzystując do oceny pole pod modułem z funkcji widmowej. Interesującym mogłoby być porównanie wyników uzyskanych w przedstawionej pracy z analogicznymi wynikami otrzymanymi z innych metod wyznaczania częstotliwości granicznej (np. metody opartej na kryterium energetycznym).

Problem doboru częstotliwości granicznej, a tym samym częstotliwości próbkowania przy zapewnieniu wymaganej dokładności, jest ważny ze względu na fakt, że wiąże się on w istotny sposób z nakładami na urządzenia rejestrujące.

Należy zwrócić jeszcze uwagę, że uzyskane wyniki są ważne przy założeniu, że urządzenia rejestrujące są układami bezinercyjnymi. Wyniki, uzyskane przy tym założeniu, są wtedy niezależne od parametrów urządzeń rejestrujących.

#### LITERATURA

- [1] Mańczak K.: Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania, WNT W-wa 1970.
- [2] Bober S., Dąbrowska B., Dąbrowski A.: Elektrokardiografia praktyczna, PZWL, Warszawa 1974.
- [3] Мороз И.П., Шевцов М.С.: Формирование синхрои импульсов от электрокардиограммы, УДК 616.12 - 073.97.
- [4] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.: Справочник по математике, Изд. НАУКА, Москва 1965.

#### ПРОБА ОЦЕНКИ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ РЕГИСТРИРУЮЩИХ АППАРАТОВ КРИВОЙ ЭКГ

#### Р е з ю м е

В работе проанализирован вопрос оценки предельной частоты аппаратов регистрирующих кривую ЭКГ и оценена ошибка получаемая в этом случае. Полученное аналитически трансцендентное уравнение было решено на ЭВМ. Результаты представлено графически.

ATTEMPT OF ESTIMATION OF LIMITED FREQUENCY OF APPARATUSES  
REGISTERING EKG CURVE

S u m m a r y

In this paper the problem of limited frequency estimation of apparatus registering EKG curve has been analyzed together with the estimation of an error arising from accepting this frequency. Transcendental equation analitically obtained has been calculated on a computer. The results have been presented on the picture.