ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1977

Seria: AUTOMATYKA z. 37 Nr kol. 507

Andrzej ŚWIERNIAK

STEROWANIE ZBLIŻONE DO OPTYMALNEGO ZA POMOCĄ MODELU O ZREDUKOWANYM RZĘDZIE RÓWNAŃ STANU

Streszczenie. W artykule przedstawiono ocenę strat w przypadku sterowania stacjonarnym obiektem liniowym wysokiego rzędu przy pomocy modelu rzędu niższego. Model ten, otrzymany przez pominięcie wartości własnych nieznacznie wpływających na stan nieustalony obiektu, wykorzystuje się do obliczania sterowania minimalizującego kwadratowy wskaźnik jakości w przypadku horyzontu nieskończonego i skończonego.

1. Wprowadzenie

Zastosowanie modeli wysokiego rzędu do sterowania czy optymalizacji może być nieopłacalne ze względu na trudności techniczne w realizacji sterowania, trudności numeryczne w jego obliczaniu, brak dostępu pomiarowego do wszystkich współrzędnych wektora stanu (koniecznego dla sterowania optymalnego) oraz trudności rekonstrukcji wektora stanu, niedokładności wyznaczonych parametrów modelu, ich zmienność itp. Powstaje zatem zagadnienie redukcji stopnia równań stanu układu, tym bardziej, że często własności dynamiczne układów liniowych wysokiego rzędu są zbliżone do własności układów niższego rzędu. Zagadnieniu temu poświęcone były między innymi prace [1]; [2], [3], [4], [5], [6], w których zaproponowano algorytmy redukcji rzędu układu (przy użyciu równań stanu bądź transmitancji operatorowych) zapewniające najlepszą, w sensie odpowiednio zdefiniowanej miary, aproksymację, bądź oparte na pewnych specjalnych metodach aproksymacji.

Najprostszą i najbardziej naturalną metodą redukcji wydaje się jednak pominięcie "małych" stałych czasowych obiektu i stosowanie modelu zawierającego wartości własne dominujące [7], [8]. W tym przypadku interesujące jest, o ile różni się wartość wskaźnika jakości przy zastosowaniu, obliczonego na podstawie takiego modelu, sterowania do obiektu od wartości optymalnej dla obiektu.

W artykule dokonano oceny określonych w ten sposób strat dla zagadnienia stabilizacji wyjścia w przypadku horyzontu skończonego i nieskończonego. Uzyskane wyniki mogą stanowić podstawę określenia, jakie stałe czasowe mogą być pominięte w modelu.

Autor pragnie tą drogą podziękować prof.dr hab. R. Gessingowi za jego uwagi dotyczące omawianych w artykule problemów.

2. Sformułowanie problemu

Dany jest sterowalny i obserwowalny układ liniowy, stacjonarny, opisany równaniami stanu:

$$\dot{x}_p = Ax_p + B_p u \tag{1}$$

i wyjścia

$$y = C_p x_p , \tag{2}$$

gdzie:

x_p - jest n - wymiarowym wektorem stanu,
u - r-wymiarowym wektorem sterowań,
y - m-wymiarowym wektorem wyjścia,
A, B_p i C - macierzami o odpowiednich wymiarach.

$$I = \int_0^T (y'Qy + u'Ru)dt , \tag{3}$$

gdzie:

T - jest nieskończonym lub skończonym horyzontem,
Q - macierzą dodatnio półokreśloną,
R - dodatnio określoną.

Sterowanie minimalizujące wskaźnik wyliczane jest na podstawie modelu niższego rzędu. W celu obniżenia stopnia równań stanu sprowadza się równania (1) i (2) do postaci kanonicznej Jordana:

$$\dot{x} = Jx + Bu \tag{4}$$

$$y = Cx ,$$

gdzie:

J jest macierzą pseudodiagonalną, zbudowaną z klatek Jordana, odpowiadających wartościom własnym macierzy A.

Niech $J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$, - gdzie J_2 jest s x s wymiarową częścią macierzy J zbudowaną z klatek Jordana, odpowiadających wartościom własnym o częściach rzeczywistych ujemnych, położonych daleko od osi urojonej. J_1 zatem zawiera jedynie "dominujące wartości własne".

Model zredukowany ma postać:

$$\dot{x}^* = J_1 x^* + B_1 u \tag{6}$$

$$y^* = (C_1 + P)\, x^* , \tag{7}$$

przy czym $x = \begin{bmatrix} x^* \\ x_{n-s+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ b_{n-s+1} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} C_1 & c_{n-s+1} & \cdots & c_n \end{bmatrix}$

natomiast P - jest macierzą zapewniającą równość wzmocnień obiektu i modelu, tzn.:

$$y(\infty) = y^*(\infty) ,$$

czyli zachodzi

$$C J^{-1} B = (C_1 + P)\, J_1^{-1} B_1 ,$$

skąd

$$\begin{bmatrix} c_{n-s+1} & \cdots & c_n \end{bmatrix} J_2^{-1} \begin{bmatrix} b_{n-s+1} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = P\, J_1^{-1} B_1 \tag{8}$$

(W przypadku wartości własnych rzeczywistych ujemnych redukcja oznacza pominięcie małych stałych czasowych).

Można zauważyć, że zależność między wektorem stanu modelu i obiektu można zapisać w postaci:

$$x^* = Dx , \tag{9}$$

gdzie:

D jest macierzą o postaci:

$$D = \begin{bmatrix} I_{n-s} & 0_s \end{bmatrix} , \tag{10}$$

przy czym:

I_{n-s} jest macierzą jednostkową (n-s) x (n-s) a O_s macierzą zerową (n-s) x s.

Spełnione są przy tym związki:

$$J_1 D = DJ$$
$$B_1 = DB \tag{11}$$
$$C_1 = CD'$$

Macierz D jest zatem macierzą agregacji [9].

3. <u>Zagadnienie stabilizacji wyjścia w przypadku horyzontu nieskończonego</u>

Wskaźnik (3) przyjmuje postać

$$I = \int_0^\infty (y'Qy + u'Ru)dt \; . \tag{12}$$

Sterowanie optymalne dla obiektu ma postać:

$$u^o = -R^{-1}B'\, Kx \; , \tag{13}$$

gdzie K jest symetrycznym, dodatnio określonym rozwiązaniem równania macierzowego:

$$KJ + J'K - KBR^{-1}B'K = - C'Q\, C \tag{14}$$

i daje minimalną wartość wskaźnika:

$$I^o = x'(o)\, K\, x\,(o).$$

Sterowanie minimalizujące wskaźnik

$$I_1 = \int_0^\infty (y^{*\prime}Qy^* + u'Ru)\; dt \quad \text{(optymalne dla modelu)}$$

ma postać:

$$u^* = - R^{-1}B_1{}'K_1 x^* \; , \tag{15}$$

gdzie:

K_1 jest symetrycznym, dodatnio określonym rozwiązaniem równania macierzowego:

$$K_1J_1 + J_1'K_1 - K_1B_1R^{-1}B_1'K_1 = -(C_1 + P)'Q(C_1 + P) \,. \tag{16}$$

Sterowanie to stosujemy do obiektu. Po podstawieniu (9) i (11) do (15) otrzymuje się

$$u = -R^{-1}B'D'K_1Dx \,. \tag{16}$$

Równanie (4) po podstawieniu $u = u^*$ przyjmuje postać:

$$\dot{x} = (J - BR^{-1}B'D'K_1D)x \,. \tag{17}$$

Wskaźnik jakości (12) przyjmie wówczas wartość:

$$I^* = x'(o)\, L\, x(o),$$

gdzie L jest macierzą symetryczną dodatnio określoną, będącą rozwiązaniem równania [10]:

$$(J-BR^{-1}B'D'K_1D)'L + L(J-BR^{-1}B'D'K_1D) + \\ + C'QC + D'K_1DBR^{-1}B'D'K_1D = 0 \tag{18}$$

Straty wynikające ze stosowania modelu niższego rzędu można określić jako różnicę $I^* - I^o$. Ich wielkość określa następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1

$I^* - I = x'(o)\, Sx(o),$

gdzie: $S = L - K$ jest macierzą symetryczną dodatnio półokreśloną (co najmniej) spełniającą równanie:

$$(J-BR^{-1}B'D'K_1D)'S + S(J - BR^{-1}B'D'K_1D) = -FBR^{-1}B'F \,, \tag{19}$$

gdzie $F = K - D'K_1D$ spełnia równanie:

$$(J - BR^{-1}B'D'K_1D)'F + F(J-BR^{-1}B'D'K_1D) - FBR^{-1}BF + C'QC - \\ - D'(C_1 + P)'Q(C_1 + P)D = 0 \,. \tag{20}$$

Dowód:

Odejmując (14) od (18) otrzymuje się (19). Mnożąc (16) lewostronnie przez D'i prawostronnie przez D a następnie odejmując od (14) otrzymuje się (20).

Można wykazać, że otrzymany układ jest stabilny. Wystarczy zbadać wartości własne macierzy $J - BR^{-1}B\ D\ K_1D$. Wielomian charakterystyczny tej macierzy ma postać:

$$W = \det\left[\lambda I_n - (J - BR^{-1}B'D'K_1D)\right] = \det\left[\lambda I_n - (J - BR^{-1}B_1'K_1D)\right] =$$

$$= \det\left[\lambda I_{n-s} - (J_1 - DBR^{-1}B_1'K_1)\right]\det\left[\lambda I_s - J_2\right] =$$

$$= \det\left[\lambda I_{n-s} - (J_1 - B_1R^{-1}B_1'K_1)\right]\det\left[\lambda I_s - J_2\right] = W_1 \cdot W_2$$

W_1 jest wielomianem charakterystycznym dla modelu sterowanego optymalnie, a zatem jest hurwitzowski [7], a W_2 posiada pierwiastki równe wartościom własnym macierzy J_2 (o częściach rzeczywistych ujemnych zgodnie z założeniem). Wielomian W ma zatem wszystkie pierwiastki o częściach rzeczywistych ujemnych.

4. Przypadek obiektu jednowymiarowego

Dla układu posiadającego jedno wejście i jedno wyjście, którego transmitancja nie posiada zer dogodną postacią równań stanu jest następująca postać fazowa:

$$\dot{x}_f = A_f x_f + B_f u \tag{21}$$

$$y = C_f x_f ,$$

gdzie: $B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$, $C_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, $A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$

Wskaźnik jakości można wówczas przyjąć w postaci:

$$I = \int_0^\infty (y^2 + ru^2)\, dt . \tag{22}$$

Redukcji stopnia równań stanu dokonuje się znowu przy wykorzystaniu postaci kanonicznej.
Model niższego rzędu ma postać:

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= J_1 x^* + B_1 u \\ y^* &= (C_1 + P)\, x^* \end{aligned} \tag{23}$$

Niech V będzie nieosobliwą macierzą przekształcenia sprowadzającego postać fazową stanu do postaci kanonicznej. Wówczas pomiędzy wektorem stanu modelu (23) i obiektu (21) istnieje zależność:

$$x^* = D \cdot V \cdot x_f\ , \tag{24}$$

gdzie: D dana jest wzorem (10).

(Jeśli A posiada wartości własne rzeczywiste pojedyncze, to V^{-1} jest macierzą Vandermonde'a).
Sterowanie optymalne dla obiektu ma zgodnie z (15) postać:

$$u^* = -\frac{1}{r} B_1' K_1\, x^* = -\frac{1}{r} B_f \cdot V' \cdot D' \cdot K_1\, DVx_f \tag{25}$$

i zastosowanie go do obiektu sprowadza równanie (21) do postaci:

$$\dot{x}_f = (A_f - \frac{1}{r} B_f\, B_f' V' D\, K_1 DV)\, x_f\ . \tag{26}$$

Straty wynikające z zastosowania modelu niższego rzędu można określić jako:

$$I - I^o = x_f\,(o) \cdot S_f \cdot x_f(o)\ ,$$

gdzie S_f spełnia równanie:

$$\begin{aligned} (A_f - \frac{1}{r} B_f B_f'\ V'D'K_1 DV)' S_f + S_f\,(A_f - \frac{1}{r} B_f B_f' V'D'K_1 DV) &= \\ = - F_f\, B_f\, B_f' F_f \cdot \frac{1}{r}\ , \end{aligned} \tag{27}$$

natomiast F_f spełnia równanie:

$$\begin{aligned} &(A_f - \frac{1}{r} B_f B_f'\ V'D'K_1\ DV)' F_f + F_f\,(A_f - \frac{1}{r} B_f B_f' V'D'K_1 DV) + \\ &- \frac{1}{r} F_f\, B_f\, B_f' F_f + C_f' C_f - V'D'(C_1 + P)'(C_1 + P)\, DV = 0\ . \end{aligned} \tag{28}$$

Przykład

Dany jest obiekt inercyjny drugiego rzędu o stałych czasowych T_1 i T_2 ($T_1 >> T_2$). Należy na podstawie modelu pierwszego rzędu wyznaczyć sterowanie, przy czym minimalizowany wskaźnik ma postać:

$$I = \int_0^\infty (y^2 + ru^2)dt .$$

Równania stanu obiektu w postaci fazowej są następujące:

$$\dot{x}_1 = x_2 ,$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda_1 \lambda_2 x_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) x_2 + \lambda_1 \lambda_2 u ,$$

$$y = x_1 ,$$

gdzie:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_1} , \quad \lambda_2 = -\frac{1}{T_2} .$$

Model pierwszego rzędu otrzymany przez zastosowanie postaci kanonicznej równań stanu przyjmuje postać:

$$\dot{x}^* = \lambda_1 x^* + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} u ,$$

$$y^* = (1+P)x^* ,$$

gdzie: $P = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ czyli $y^* = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} x^*$.

Sterowanie optymalne dla modelu:

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} K_1 x , \quad \text{gdzie} \quad K_1 = \frac{r}{\lambda_1} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\lambda_2^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{r}}\right),$$

czyli: $u^* = \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{r}}\right) y^*$, podstawiając $D = [1 \quad 0]$ oraz $V = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix}$

do równań (27) i (28) otrzymuje się:

$$S_f = \begin{bmatrix} \dfrac{-\lambda_1^3 \lambda_2^3 \sqrt{1 + \frac{1}{r}}\, f_2^2}{2r\left(\lambda_1 \sqrt{1 + \frac{1}{r}} + \lambda_2\right)} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 f_2^2}{2r\left(\lambda_1 \sqrt{1 + \frac{1}{r}} + \lambda_2\right)} \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$f_2 = \frac{r}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \left[\lambda_2 + \lambda_1 \sqrt{1 + \frac{1}{r}} + \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1 \lambda_2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{r}}\right)}\right].$$

f_2 można oszacować przez:

$$\frac{r}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \left[\lambda_2 + \lambda_1 \sqrt{1 + \frac{1}{r}} - \lambda_1 - \lambda_2\right] \leqslant f_2 \leqslant 0,$$

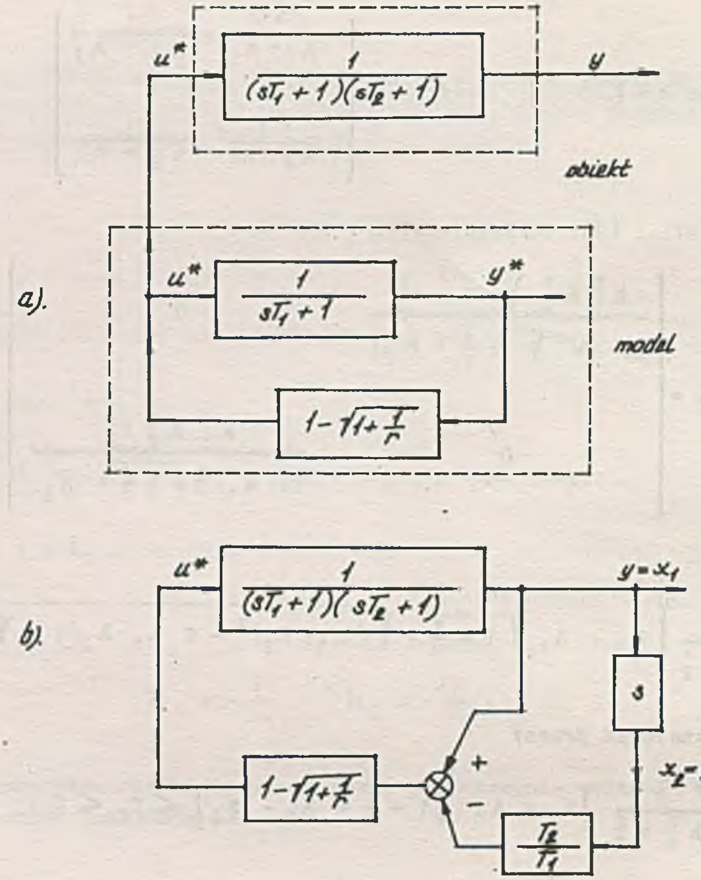
a zatem

$$f_2^2 \leqslant \frac{r^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^4} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{r}}\right]^2. \tag{29}$$

Na podstawie nierówności (29) można oszacować wyrazy S_f i następnie wartość strat jako:

$$0 \leqslant I^* - I^0 \leqslant -\frac{1}{2} r \frac{\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{r}}\right]^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + \frac{1}{r}} + \lambda_2} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{r}}\, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_1^2(0) + \frac{x_2^2(0)}{\lambda_2^2}\right]. \tag{30}$$

Sterowanie w układzie zamkniętym i otwartym przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Sterowanie obiektem drugiego rzędu na podstawie modelu pierwszego rzędu:

a) w układzie otwartym z użyciem modelu, b) w układzie zamkniętym (model wykorzystano jedynie do określenia struktury układu sterowania)

W przypadku $T_2 \ll T_1$ współczynnik sprzężenia od pochodnej sygnału wyjściowego dąży do zera

5. Zagadnienie stabilizacji wyjścia w przypadku horyzontu skończonego

W tym przypadku wskaźnik (3) ma postać:

$$I = \int_0^T (y'Qy + u'Ru)dt$$

przy czym T jest zadaną chwilą końcową.

Sterowanie optymalne dla obiektu (4), (5) ma postać

$$u^o = -R^{-1} B'K(t)x \,, \tag{31}$$

gdzie: K(t) spełnia równanie Riccatiego:

$$\dot{K}(t) = -K(t)\,J - J'K(t) + K(t)BR^{-1}B'K(t) - C'QC$$

z warunkiem końcowym

$$K(T) = 0 \tag{32}$$

i daje minimalną wartość wskaźnika $I^o = x'(o)\,K(o)\,x\,(o)$.
Sterowanie optymalne dla modelu (6), (7) ma postać:

$$u^* = -R^{-1}B_1'\,K_1(t)\,x^* = -R^{-1}B'D'K_1(t)\,Dx \,, \tag{33}$$

przy czym $K_1(t)$ jest rozwiązaniem równania Riccatiego:

$$\dot{K}_1(t) = -K_1(t)J_1 - J_1'K_1(t) + K_1(t)B_1R^{-1}B_1'K_1(t) - (C_1+P)'Q(C_1+P) \tag{34}$$

z warunkiem końcowym $K_1(T) = 0$.
Stosując sterowanie (33) do obiektu, otrzymuje się:

$$\dot{x} = (J-BR^{-1}B'D'K_1(t)D)x \tag{35}$$

i wartość wskaźnika:

$$I^* = x'(0)L(0)x(0) \,, \tag{36}$$

gdzie:

$$L(0) = \int_0^T \Phi'(t,0)\,(C'QC + D'K_1(t)\,DBR^{-1}B'D'K_1(t)D)\,\Phi\,(t,0)dt \,,$$

przy czym $\Phi\,(t,\tau)$ jest rezolwentą (macierzą rozwiązań podstawowych) równania (35), czyli spełnia równanie:

$$\dot{\Phi}\,(t,\tau) = (J-BR^{-1}B'D'K_1(t)D)\;\Phi\,(t,\tau) \tag{37}$$

z warunkiem początkowym

$$\Phi(\tau,\tau) = I \tag{38}$$

oznaczając:

$$L(t) = \int_t^T \Phi'(\tau,t)\,(C'QC + D'K_1(\tau)\,DBR^{-1}B'D'K_1(\tau)D)\,\Phi(\tau,t)d\tau \tag{39}$$

otrzymuje się:

$$\dot{L}(t) = \int_t^T \frac{\partial}{\partial t}\Big[\Phi'(\tau,t)\,(C'QC + D'K_1(\tau)\,DBR^{-1}B'D'K_1(\tau)D)\Phi(\tau,t)d\tau +$$

$$- \Phi'(t,t)\,(C'QC + D'K_1(t)DBR^{-1}B'D'K_1(t)D)\,\Phi(t,t)\,.$$

Uwzględniając (37) i (38) otrzymuje się:

$$\dot{L}(t) = -\Big[\int_t^T (J-BR^{-1}B'D'K_1(\tau)D)'\,\Phi(\tau,t)\,(C'QC + D'K_1(\tau)DBR^{-1}B'D'K_1(\tau)\times$$

$$\times D)\,\Phi(t,\tau) + \Phi'(\tau,t)\,(C'QC + D'K_1(\tau)DBR^{-1}B'DK_1(\tau)D)\,\Phi(\tau,t)\times$$

$$\times(J-BR^{-1}B'D'K_1(\tau)D)d\tau + C'QC + D'K_1(t)DBR^{-1}B'D'K_1(\tau)D\Big]$$

co po wykorzystaniu (39) daje równanie:

$$\dot{L}(t) = -(J-BR^{-1}B'D'K_1(t)D)'L(t) - L(t)\,(J-BR^{-1}B'D'K_1(t)D) +$$

$$- C'QC - D'K_1(t)DBR^{-1}B'D'K_1(t)D$$

z warunkiem końcowym

$$L(T) = 0\,. \tag{40}$$

Można teraz oszacować straty wynikające z zastosowania modelu niższego rzędu.

Twierdzenie 2

$I^{*} - I^{o} = x'(0)\ S(0)\ x(0)$, gdzie: $S(t) = L(t) - K(t)$ jest macierzą symetryczną, spełniającą równanie:

$$\dot{S}(t) = -(J-BR^{-1}B'D'K_1(t)D)'S(t) - S(t)\ (J-BR^{-1}B'D'K_1(t)D) + \\ -F(t)BR^{-1}B'F(t) \tag{41}$$

z warunkiem końcowym $S(T) = 0$ a $F(t) = K(t) - D'K_1(t)D$ spełnia równanie:

$$\dot{F}(t) = -(J-BR^{-1}B'D'K_1(t)D)'\,F(t)-F(t)\ (J-BR^{-1}B'D'K_1(t)D) + \\ + F(t)BR^{-1}B'F(t) - C'QC + D'(C_1+P)'Q(C_1+P)D \tag{42}$$

z warunkiem końcowym $F(T) = 0$.

Dowód

Odejmując (32) od (4) otrzymuje się (41). Mnożąc (34) lewostronnie przez D' i prawostronnie przez D, a następnie odejmując od (32) otrzymuje się (42).

Otrzymany układ sterowania jest niestacjonarny. W [11] zastosowano sterowanie stacjonarne, zastępując macierz $K(t)$ macierzą $\hat{K}$ stanowiącą ustalone rozwiązanie równania Riccatiego określającego $K(t)$. Maksymalny popełniony błąd oszacowano przez:

$$\|\delta K\| = \|K(t) - \hat{K}\| \leqslant \|\hat{K}\|\sqrt{n}\ e^{-aT},$$

gdzie

$$a = \lambda_{min}\,(\hat{K}^{\frac{1}{2}}\,Q\,\hat{K}^{-\frac{1}{2}}), \quad n \text{ - rząd układu}$$

Oszacowanie to nasuwa wniosek o wykorzystaniu do sterowania stacjonarnej macierzy K_1 spełniającej równanie (16) zamiast macierzy $K_1(t)$. Postępowanie takie, uzasadnione zwłaszcza w przypadku dużych czasów T, prowadzi do określenia strat jako:

$$I - I^{o} = x'(0)\ \hat{S}\ (0)\ x(0),$$

gdzie $\hat{S}(t) = \hat{L}(t) - K(t)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego o stałych współczynnikach:

$$\dot{\hat{S}}(t) = -(J-BR^{-1}B'D'K_1D)'\hat{S}(t) - \hat{S}(t)(J-BR^{-1}B'D'K_1D) + \\ -\hat{F}(t)BR^{-1}B'\hat{F}(t) \tag{43}$$

z warunkiem końcowym $\hat{S}(T) = 0$, a $\hat{F}(t)$ spełnia równanie:

$$\dot{\hat{F}}(t) = -(J-BR^{-1}B\ D\ \hat{K}_1D)\hat{F}(t) - \hat{F}(t)(J-BR^{-1}B\ D\ K_1D) + \\ + \hat{F}(t)BR^{-1}B'\hat{F}(t) - C'QC + D'(C_1+P)'Q\,(C_1+P)D \tag{44}$$

z warunkiem końcowym $F(T) = -D'\hat{K}D$.

6. Uwagi końcowe

W artykule przedstawiono równanie określające straty wynikające z zastosowania modelu o zredukowanym stopniu równań stanu do sterowania obiektem liniowym stacjonarnym wysokiego rzędu w przypadku zagadnienia stabilizacji wyjścia przy nieskończonym i skończonym horyzoncie optymalizacji. W tym ostatnim przypadku określono również straty przy stosowaniu sterowania stacjonarnego.

Otrzymane równania mogą służyć do oszacowania różnicy między optymalną wartością wskaźnika a wartością uzyskiwaną przy pominięciu "małych" stałych czasowych dla konkretnego obiektu, jako funkcji tych stałych.

Rozważając jedynie zagadnienie stabilizacji, abstrahuje się od wymaganych w układzie prędkości sygnału wyjściowego. Interesujące jest określenie strat w funkcji stosunku pożądanych prędkości w układzie do pominiętych wartości własnych. Niektóre wyniki w tej dziedzinie uzyskane przez autora zawiera [12].

LITERATURA

[1] Lal M., Mitra R., Jain A.M.: On Schwarz Canonical Form for Large System Simplification, IEEE Trans., AC-20,2, 1975.

[2] Mitra T.: The Reduction of Complexity of Linear, Time Invariant Dynamical Systems, 4 th IFAC Congress, Warszawa, 1969.

[3] Nagarajan R.: Optimum Reduction of Large Dynamic System,Int.J.Contr., 14, N°6, 1971.

[4] Wilson D.A.: Optimal Solution of Model Reduction Problems,Proc.IEEE, 117, 1970.

[5] Hutton M.F., Friedland B.: Routh Approximations for Reducing Order of Linear Time - Invarians Systems, IEEE Trans. AC-20, 3, 1975.

[6] Shamash Y.: Linear System Reduction Using Padé Approximation to Allow Retention of Dominant Modes, Int. J. Contr. 21, N°2, 1975.

[7] Davison E.J.: A. Method for Simplifying Linear Dynamic Systems, IEEE Trans., AC-11,1, 1966.

[8] Niederliński A.: Układy wielowymiarowe automatyki, WNT, Warszawa, 1974.

[9] Aoki M.: Control of Large Scale Dynamic Systems by Aggregation, IEEE Trans., AC-133, 1968.

[10] Bellman R.: Introduction to Matrix Analysis, Mc Graw Hill, New York, 1960.

[11] Gessing R., Latarnik M.: Sterowanie prawie optymalne w obecności zakłóceń (cz. I) Archiwum Automatyki i Telemechaniki, 3, 1974.

[12] Świerniak A.: Ocena strat przy sterowaniu obiektem liniowym na podstawie modelu statycznego, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, 3, 1976.

УПРАВЛЕНИЕ БЛИЗКОЕ ОПТИМАЛЬНОМУ ПРИ ПОМОЩИ МОДЕЛИ О ПОНИЖЕННОМ ПОРЯДКЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

Р е з ю м е

В статье представлена оценка потери в случае управления линейным объектом высокого порядка при помощи модели низкого порядка. Эта модель получена таким образом, что пропускаются собственные значения, которые очень мало влияют на переходные процессы. Эту модель употребляют для вычисления управления минимализирующего квадратный указатель качества при конечном и бесконечном интервале управления.

SUBOPTIMAL CONTROL USING THE MODEL OF REDUCED ORDER OF STATE EQUATIONS

S u m m a r y

In that paper the estimation of losses when a linear plant of high order is controlled by application of a model of lower order is considered. The model obtained by retaining only the dominant natural values is applied to count a control which minimizes the quadratic performance index when the control interval T is infinite and finite.