

**MODELOWANIE ZADAŃ Z OSTRYM FRONTEM KRZEPNIĘCIA
Z WYKORZYSTANIEM II SCHEMATU MEB**J. MENDAKIEWICZ¹, A. PIASECKA BELKHAYAT², R. SZOPA³¹Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki
Politechnika Śląska²Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Częstochowska

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono sposób modelowania procesu krzepnięcia zachodzącego w stałej temperaturze (problem Stefana), przy czym rozpatrywano zadanie 1D. Wykorzystano II schemat metody elementów brzegowych. Omówiono algorytm rozwiązania oraz pokazano przykład obliczeń numerycznych.

1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Jednym z najważniejszych modeli matematycznych opisujących proces krzepnięcia i stygnięcia metalu jest sformułowany ponad 100 lat temu problem Stefana. W zadaniu tym rozpatruje się półprzestrzeń ograniczoną płaszczyzną o temperaturze T_b , w której wyróżnia się dwa zmienne w czasie podobszary, a mianowicie podobszar fazy stałej ($x \in (0, \eta)$) oraz podobszar cieczy ($x \in (\eta, \infty)$). Temperatura powierzchni kontaktu $x = \eta$ jest równa T_{kr} (temperatura krzepnięcia). Dla czasu $t = 0$ temperatura w całym obszarze wynosi $T(x, 0) = T_0$. Również dla $x \rightarrow \infty$ temperatura cieczy jest równa T_0 . Problem ten posiada rozwiązanie analityczne [1], które będzie wykorzystane do przetestowania dokładności i efektywności metody elementów brzegowych w tzw. zadaniach z ruchomymi brzegami, przy czym zastosowany zostanie II schemat MEB przy założeniu, że obszar odlewu jest obszarem ograniczonym ($x \in (\eta, G)$) i na granicy $x = G$ obowiązuje warunek brzegowy $q_L(G, t) = 0$.

Nieustalone pole temperatury w rozważanym obszarze opisuje układ dwóch równań różniczkowych w postaci

¹ Dr inż., e-mail: mendoz@rmt4.kmt.polsl.gliwice.pl,² Dr inż. e-mail: alicja@rmt4.kmt.polsl.gliwice.pl³ Dr hab. inż., prof. P.Cz.,

$$\begin{aligned}
0 < x < \eta: \quad \frac{\partial T_S(x,t)}{\partial t} &= a_s \frac{\partial^2 T_S(x,t)}{\partial x^2} \\
\eta < x < G: \quad \frac{\partial T_L(x,t)}{\partial t} &= a_L \frac{\partial^2 T_L(x,t)}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{1}$$

Dla $x = \eta$ przyjmuje się warunek brzegowy

$$x = \eta: \quad \begin{cases} \lambda_S \frac{\partial T_S(x,t)}{\partial x} - \lambda_L \frac{\partial T_L(x,t)}{\partial x} = L_V \frac{d\eta}{dt} \\ T_S(x,t) = T_L(x,t) = T_{kr} \end{cases} \tag{2}$$

lub

$$\begin{cases} q_L(\eta,t) - q_S(\eta,t) = wL_V \\ T_S(\eta,t) = T_L(\eta,t) = T_{kr} \end{cases} \tag{3}$$

Ponadto dla $x=0$ i $x=G$

$$T_S(0,t) = T_b, \quad q_L(G,t) = 0 \tag{4}$$

oraz dla $t=0$

$$T_L(x,0) = T_0 \geq T_{kr} \tag{5}$$

W równaniach (1), (2) a_s , a_L oznaczają współczynniki dyfuzji ciepła fazy stałej i ciekłej, λ_s , λ_L - współczynniki przewodzenia ciepła, L_V - utajone ciepła krzepnięcia, natomiast $w = d\eta/dt$ jest prędkością krzepnięcia.

2. METODA WYZNACZANIA POŁOŻENIA FRONTU KRZEPNIĘCIA

Obszar płyty $[0, G]$ dzielimy na n elementów liniowych, co oznacza, że na odcinku $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$, pole temperatury przybliżamy funkcją liniową. Tak więc siatkę geometryczną tworzą punkty

$$0 = x_0 < x_1 < K < x_{j-1} < x_j < K < x_n = G \tag{6}$$

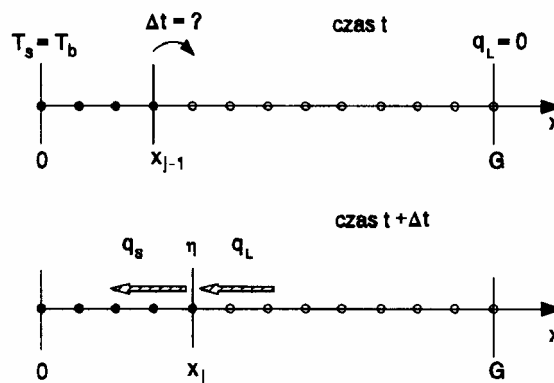
Założmy, że w chwili czasu $t = t^{f-1}$ współrzędna geometryczna frontu krzepnięcia jest równa x_{j-1} oraz, że po czasie Δt front krzepnięcia „przemieści się” do punktu x_j . Czas Δt odpowiadający temu przesunięciu ($x_{j-1} \rightarrow x_j$) nie jest znany. W chwili $t + \Delta t = t^f$ węzły x_0, x_1, \dots, x_{j-1} należą do obszaru fazy stałej, natomiast $x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n$ - do fazy ciekłej.

Kolejne dwa położenia frontu krzepnięcia pokazano na rysunku 1. Na początku obliczeń dotyczących przejścia od chwili t^{f-1} do t^f zakładamy pewien krok czasu Δt

(wynika z niego bezpośrednio chwilowa prędkość krzepnięcia $w = \Delta x / \Delta t$) i przyjmując dla $x = x_j$: $T_S(x_j, t^f) = T_L(x_j, t^f) = T_{kr}$ sprowadzamy problem do dwóch oddzielnych (rozprężonych) zadań z warunkiem I rodzaju na granicy rozdziału faz, to znaczy dla $x = x_j$ Rozwiązania tych zadań zawierają informacje o brzegowych strumieniach ciepła na froncie krzepnięcia, co pozwala skorygować przyjęty pierwotnie krok czasu. Wykorzystujemy tutaj pierwszą część warunku Stefana (3), którą zapiszemy w postaci

$$\Delta t = \frac{L_V \Delta x}{q_L(x_j, t^f) - q_S(x_j, t^f)} \quad (7)$$

W ten sposób metodą kolejnych przybliżeń (procedura iteracyjna jest szybko zbieżna) wyznaczamy czas przejścia frontu krzepnięcia od węzła x_{j-1} do węzła x_j . Jako punkt startowy procesu iteracyjnego można przyjąć wartość Δt z przejścia poprzedniego.



Rys. 1. Przemieszczający się front krzepnięcia.
Fig. 1. Moving solidification front.

3. II SCHEMAT MEB

Istotę algorytmu nazywanego II schematem metody elementów brzegowych omówimy na przykładzie obszaru jednorodnego o stałych granicach $[0, L]$. Temperaturę w tym obszarze oznaczymy przez $T(x, t)$, natomiast współczynnik dyfuzji ciepła i współczynnik przewodzenia przez a i λ . Taki opis II schematu jest całkowicie wystarczający, ponieważ zaproponowana metoda obliczeń sprowadza się do „rozprężenia” odlewu na jednorodne podobszary cieczy i ciała stałego, przy czym na ich granicach zadana jest temperatura lub brzegowy strumień ciepła.

Do rozważań wprowadzamy siatkę czasu

$$0 = t^0 < t^1 < t^2 < K < t^{s-1} < t^s < K < t^{f-1} < t^f < K < t^F < \infty \quad (8)$$

ze stałym krokiem Δt .

W przypadku II schematu MEB dla przejścia $t^{f-1} \rightarrow t^f$ otrzymuje się następujące równanie całkowe [2]

$$\begin{aligned} T(\xi, t^f) + \left[\frac{1}{c\rho} \int_{t^{f-1}}^{t^f} T^*(\xi, x, t^f, t) q(x, t) dt \right]_{x=0}^{x=L} = \\ = \left[\frac{1}{c\rho} \int_{t^{f-1}}^{t^f} q^*(\xi, x, t^f, t) T(x, t) dt \right]_{x=0}^{x=L} + Z(\xi, t^{f-1}) + \int_0^L T^*(\xi, x, t^f, t^0) T(x, t^0) dx \end{aligned} \quad (9)$$

przy czym $Z(\xi, t^{f-1}) = 0$ dla $f=1$, natomiast dla $f=2, 3, \dots, F$:

$$\begin{aligned} Z(\xi, t^{f-1}) = \sum_{s=1}^{f-1} \frac{1}{c\rho} \left[\int_{t^{s-1}}^{t^s} q^*(\xi, x, t^f, t) T(x, t) dt \right]_{x=0}^{x=L} + \\ - \sum_{s=1}^{f-1} \frac{1}{c\rho} \left[\int_{t^{s-1}}^{t^s} T^*(\xi, x, t^f, t) q(x, t) dt \right]_{x=0}^{x=L} \end{aligned} \quad (10)$$

W równaniach (9), (10) $\xi \in (0, L)$ oznacza punkt obserwacji, natomiast T^* jest tzw. rozwiązaniem fundamentalnym (podstawowym) i dla omawianego zadania ma postać

$$T^*(\xi, x, t^f, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a(t^f - t)}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a(t^f - t)}\right] \quad (11)$$

Strumień ciepła wynikający z rozwiązania fundamentalnego definiuje się następująco

$$q^*(\xi, x, t^f, t) = -\lambda \frac{\partial T^*(\xi, x, t^f, t)}{\partial x} \quad (12)$$

Rozważać będziemy tzw. stałe elementy po czasie, czyli przyjmiemy założenie, że dla $t \in [t^{f-1}, t^f]$: $T(x, t) = T(x, t^f)$, $q(x, t) = q(x, t^f)$, oraz dla $t \in [t^{s-1}, t^s]$: $T(x, t) = T(x, t^s)$ i $q(x, t) = q(x, t^s)$.

Wprowadzamy następujące oznaczenia

$$g(\xi, x) = \frac{1}{c\rho} \int_{t^{f-1}}^{t^f} T^*(\xi, x, t^f, t) dt \quad (13)$$

$$h(\xi, x) = \frac{1}{c\rho} \int_{t^{f-1}}^{t^f} q^*(\xi, x, t^f, t) dt \quad (14)$$

$$g^s(\xi, x) = \frac{1}{c\rho} \int_{t^{s-1}}^{t^s} T^*(\xi, x, t^f, t) dt \quad (15)$$

$$h^s(\xi, x) = \frac{1}{c\rho} \int_{t^{s-1}}^{t^s} q^*(\xi, x, t^f, t) dt \quad (16)$$

Powyższe całki wyznacza się analitycznie [2]. Zmierzymy z punktem obserwacji ξ do brzegów obszaru ($\xi \rightarrow 0^+$ oraz $\xi \rightarrow L^-$) i otrzymujemy układ dwóch równań

$$\begin{bmatrix} -g(0,0) & g(0,L) \\ -g(L,0) & g(L,L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0,t^f) \\ q(L,t^f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h(0^+,0)-1 & h(0^+,L) \\ -h(L^-,0) & h(L^-,L)-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(0,t^f) \\ T(L,t^f) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p(0,t^f) \\ p(L,t^f) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z(0,t^{f-1}) \\ Z(L,t^{f-1}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

przy czym dla $f=1$: $Z(0, t^0) = 0, Z(L, t^0) = 0$, natomiast dla $f=2, 3, \dots, F$:

$$\begin{bmatrix} Z(0,t^{f-1}) \\ Z(L,t^{f-1}) \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^{f-1} \begin{bmatrix} -h^s(0^+,0) & h^s(0^+,L) \\ -h^s(L^-,0) & h^s(L^-,L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(0,t^s) \\ T(L,t^s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g^s(0,0) & g^s(0,L) \\ -g^s(L,0) & g^s(L,L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0,t^s) \\ q(L,t^s) \end{bmatrix} \quad (18)$$

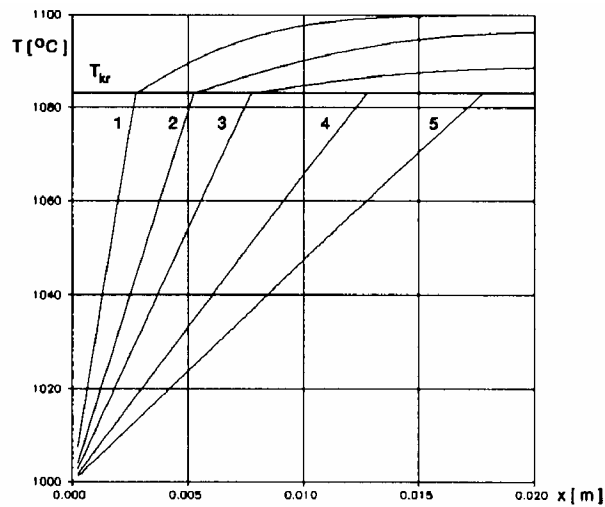
oraz

$$P(\xi, t^f) = \int_0^L T^*(\xi, x, t^f, t^0) T(x, t^0) dx \quad (19)$$

Po rozwiązaniu układu (17), znane są wartości brzegowe temperatur i strumieni ciepła i na tej podstawie wyznacza się temperatury w zbiorze punktów wewnętrznych.

4. PRZYKŁAD OBLICZEŃ

Analizowano krzepnięcie płyty o grubości 0.04 [m] wykonanej z miedzi. Parametry termofizyczne przyjęto zgodnie z [1]. Założono $T_b = 1000^\circ\text{C}$, $T_{kr} = 1083^\circ\text{C}$, $T_0 = 1100^\circ\text{C}$. Na rysunku 2 przedstawiono rozwiązanie uzyskane za pomocą II schematu metody elementów brzegowych dla czasów 1 - 0.31 [s], 2 - 1.09 [s], 3 - 2.29 [s], 4 - 5.87 [s] oraz 5 - 11.13 [s]. Należy podkreślić, że zgodność otrzymanych wyników z rozwiązaniem analitycznym dotyczącym półprzestrzeni jest w pełni zadowalająca.



Rys. 2. Rozwiązanie numeryczne.
Fig. 2. Numerical solution.

LITERATURA

- [1] W. Longa, *Krzepnięcie odlewów w formach piaskowych*, Śląsk, Katowice, 1974
- [2] E. Majchrzak, *Zastosowanie metody elementów brzegowych w termodynamice procesów odlewniczych*, Wyd. Pol. Śl., Mechanika, 102, Gliwice, 1991

MODELING OF THE STEFAN PROBLEM USING THE BEM

SUMMARY

The numerical model of 1D Stefan problem is solved using the 2nd scheme of the BEM. The theoretical background and also the example of numerical simulation are presented.

Reviewed by prof. Stanisław Jura