Solidification of Metals and Alloys. No.28, 1996 Krzepnięcie Metali i Stopów. Nr 28, 1996 PAN - Oddział Katowice: PL. ISSN 0208-9386

TEORIA METODY ATD W BADANIACH STOPÓW AL

JURA Stanisław

Katedra Odlewnictwa Politechniki Śląskiej ul.Towarowa 7 44-100 GLIWICE, POLSKA

JURA Zbigniew Katedra Mechaniki Teoretycznej Politechniki Śląskiej ul.Krzywoustego 7 44-100 GLIWICE, POLSKA

STRESZCZENIE

Opracowano podstawy teoretyczne analizy termicznej i derywacyjnej stopów Al. Przedstawiono możliwość określania kinetyki krystalizacji i efektów cieplnych krzepnięcia stopów. Metoda może być stosowana dla wszystkich stopów.

ABSTRACT

The theoretical basis of thermal and derivative analysis of AL alloys have been elaborated. There were presented the possibilities of estimation the crystallization kinetics as well as the heat effects of alloys solidification. This is universal method and can be used for all alloys.

1. WSTĘP

Metoda analizy termicznej krzepnących i stygnących metali jest od dawna znaną metodą wyznaczania termperatur przemian fazowych. Oczywiście temperatury te wyznacza się w procesie ciągłego chłodzenia. Tak więc analiza termiczna wyznacza funkcję temperatury w czasie trwania procesu. Charakterystyczny wykres dla stopu AlSi7 przedstawiono na rys.1. Krzywa stygnięcia

$$T = f(t) \tag{1}$$

posiada dwa przystanki. Przystanek początku krzepnięcia TL i przystanek końca krzepnięcia TS. Dla przybliżenia i zrozumienia tego procesu na rys.2 przedstawiono wykres równowagi fazowej stopu AI - Si [5]. Przekrój fazowy stopu AlSi7 zaznaczono linią k. Stygnięcie przebiega wzdłuż linii k, a więc przez stan ciekły od punktu P do punktu L czyli do początku krystalizacji fazy α. Dalsze stygnięcie i krystalizacja fazy α przebiega do punktu S czyli do początku krystalizacji eutektyki.



Rys.1. Analiza termiczna procesu stygnięcia stopu AlSi7. Fig. 1. The thermal analysis of AlSi7 alloy cooling process.



Rys.2. Fragment układu równowagi fazowej stopu Al-Si [1]. Fig. 2. Fragment of phase equilibrium system for Al-Si alloy [1].

Następnie stop krzepnie do końca (do wyczerpania całkowitego cieczy eutektycznej). Na wykresie stygnięcia (rys.1) nie można wyznaczyć w sposób jednoznaczny tego charakterystycznego końcowego punktu.

Na rys.3 przedstawiono analizę termiczną i derywacyjną procesu stygnięcia krystalizacji stopu AISi7.

Na wykresie rejestrowane są dwie krzywe:

- krzywa stygnięcia:

$$T = f(t) \tag{2}$$

- krzywa krystalizacji będąca pochodną krzywej stygnięcia:

$$T' = \frac{dT}{dt} = f'(t) \tag{2a}$$

Krzywa dT/dt wyznacza się w sposób matematyczny. Operacje te dokonywane są równocześnie z pomiarem temperatury.



Rys.3. Analiza termiczna i derywacyjna procesu stygnięcia stopu AlSi7. Fig. 3. Thermal and derivative analysis of AlSi7 alloy cooling process.

Krzywa T' stanowi odzwierciedlenie procesu krystalizacji badanego stopu. Krzywa krystalizacji wyznacza wiele charakterystycznych punktów. Najbardziej charakterystycznymi w powiązaniu z krzywą stygnięcia są przecięcia z osią zerową. Są to punkty LM, L, SM, S. Punkty te odniesione na krzywą stygnięcia wyznaczają charakterystyczne temperatury TLM, TL, TSM, TS. Temperatury TL i TS oznaczają "stabilne" temperatury likwidus i solidus krzepnięcia stopu. Natomiast temperatury TLM,

TSM są metastabilnymi temperaturami tych samych przemian jako temperatury przechłodzenia. Oprócz tych charakterystycznych punktów są maksima i minima na pochodnej stygnięcia. Wyróżnić należy punkt K, który wyznacza koniec procesu krzepnięcia (krystalizacji) we wszystkich punktach próbnikach. Oczywiście punkt ten wyznacza również charakterystyczną temperaturę TK.

Tak więc, pierwsza pochodna krzywej stygnięcia pozwala na jednoznaczne określenie charakterystycznych temperatur. W ten sposób wyznaczona pochodna spełnia rolę pomocniczą w dalszej analizie. Dzięki precyzyjnemu wyznaczeniu temperatur można odwrócić twierdzenie i wyznaczyć dosyć dokładnie zawartość niektórych pierwiastków w badanym stopie. Taka aplikacja metody analizy termicznej znajduje coraz szersze zastosowanie nie tylko do badań ale również do sterowania jakością stopów (wg norm ISO-9000-9004). W tym celu wykorzystywana jest opracowana i produkowana w kraju aparatura Crystaldigraph.

2. PODSTAWY TEORETYCZNE METODY ATD

Przedstawiony we wstępie opis metody ATD obejmuje formalne wyjaśnienia i możliwości jej wykorzystywania w praktyce przemysłowej i naukowej. Ogólnie można stwierdzić, że istniejące na krzywej stygnięcia przystanki temperaturowe są wynikiem działania źródeł ciepła. Oczywiście wynika to z faktu, że badany próbnik (metal) oddaje w sposób ciągły ciepło do otoczenia. Zatrzymanie więc temperatury na stałym poziomie świadczy o tym, że wewnątrz metalu wydziela się ciepło. Obserwowany czasami przyrost temperatury na którymś przystanku świadczy o tym, że ciepło wydziela się bardzo intensywnie. Najniższą temperaturę, (w dołku) uważa się za temperaturę przechłodzenia. Tak więc wszystkie te zdarzenia świadczą o tym, że wydziela się ciepło krzepnięcia, a krzywa krystalizacji

$$T' = \frac{dT}{dt} = f'(t) \tag{3}$$

opisuje kinetykę tych procesów.

Analizę kalorymetryczną procesu krystalizacji przedstawiono na rys.4. Jeżeli na wykresie ATD wyznaczymy krzywą kalorymetryczną

$$T_{e}^{\prime} = \left(\frac{dT}{dt}\right)_{C} = f^{\prime}(t)_{e}$$

$$\tag{4}$$

w taki sposób, że pole zawarte między krzywymi T' i T_c' będzie wyznaczać sumaryczne ciepło krystalizacji to wtedy będzie można obserwować kinetykę wydzielania ciepła a więc kinetykę krystalizacji stopu [1].



Rys.4. Analiza kalorymetryczna wykresu ATD stopu AlSi7. Fig. 4. Calorymetric analysis of ATD diagram for AlSi7 alloy.

O krzywej kalorymetrycznej procesu krystalizacji wiadomo, że w czasie gdy nie następuje wydzielenie ciepła krystalizacji jest spełniony następujący warunek:

$$T'(t) - T_c'(t) = 0$$
⁽⁵⁾

Natomiast, gdy pojawia się krystalizacja stosuje się następującą zależność:

$$A_{K}(T'(t) - T_{c}'(t)) = \frac{dQ_{K}}{dt}$$
(6)

która opisuje chwilowy efekt cieplny analizowanego procesu krystalizacji. Całkowity efekt procesu krystalizacji opisuje wzór:

$$A_{K} \cdot \int_{t_{1}}^{t_{2}} \left(T'(t) - T_{c}'(t) \right) dt = Q_{K}$$
(7)

Graficzny obraz tej zależności przedstawiono na rys.5.



Rys.5. Graniczny obraz całkowitego ciepła krystalizacji stopu AlSi7. Fig. 5. The graphical diagram of total crystallization heat of AlSi7 alloy.

2.1. Bilans cieplny procesu krystalizacji próbnika

Korzystając z rys.4 można dla każdej chwili określić bilans cieplny [2]. W dowolnie wybranej chwili czasu, w przedziale dt można wyznaczyć odcinki AB, BC i AC. Odcinek AB jest proporcjonalny do ciepła oddawanego przez próbnik w wyniku zmian temperatury dT (stygnięcie). Zgodnie z założeniami odcinek BC jest proporcjonalny do ciepła krystalizacji oddawanego w czasie dt. Natomiast całkowity odcinek AC jest proporcjonalny do ciepła oddawanego przez próbnik.

Algebraiczny zapis przedstawia się następująco:

- ciepło stygnięcia:

$$M \cdot c_p \cdot AB \cdot dt = dQ_c \tag{8}$$

ciepło krystalizacji:

$$M \cdot c_n \cdot BC \cdot dt = dQ_k \tag{9}$$

całkowite ciepło oddawane przez próbnik:

$$M \bullet c_p \bullet AC \bullet dt = dQ_p \tag{10}$$

Równanie chwilowego bilansu cieplnego przedstawia się następująco:

$$dQ_p - dQ_c - dQ_k = 0 \tag{11}$$

Wykorzystując prawa fizyczne oraz przyjmując założenia, że temperatura na przekroju próbnika jest stała i wynosi (T) to można określić zależność dla:

stygnięcia:

$$dQ_c = -M \cdot c_p \cdot dT = -M \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt} \cdot dt$$
(12)

- krystalizacji:

$$dQ_k = K_{\kappa} \left(m \cdot z \right)' dt \tag{13}$$

- oddawania ciepła przez próbnik:

$$dQ_p = \alpha(T) (T - T_p) F \cdot dt \tag{14}$$

Wstawiając zależności 12, 13,14 do równania bilansu (11) otrzymuje się:

$$\alpha(T) (T - T_o) F \cdot dt + M \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt} \cdot dt - K_K(m \cdot z)^{\prime} dt = 0$$
(15)

Po przekształceniach otrzymuje się ogólną zależność:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{F}{M \cdot c_p} \alpha(T) (T - T_o) + \frac{K_K}{M \cdot c_p} (m \cdot z)^{\prime}$$
(16)

Otrzymano więc równanie ogólne, opisujące funkcję krystalizacji jako pochodną krzywej stygnięcia próbnika. Jeżeli przyjmie się, że w czasie t nie istnieją procesy krystalizacji czyli:

$$dQ_k = 0 \tag{17}$$

to również:

$$\frac{K_{\kappa}}{M \cdot c_p} (m \cdot z)' = 0 \tag{18}$$

Pochodna przyjmie postać:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{F}{M \cdot c_p} \alpha(T) (T - T_o)$$
(19)

i opisuje tylko proces stygnięcia bez dodatkowych źródeł ciepła. Na odcinkach czasu procesu, kiedy nie ma źródeł cieplnych, krzywa krystalizacji pokrywa się z krzywą kalorymetryczną co zapisuje się następująco:

$$\left(\frac{dT}{dt}\right) - \left(\frac{dT}{dt}\right)_{c} = 0 \tag{20}$$

lub

$$F'(t) - F_c'(t) = 0$$
(21)

Co jest zgodne z poprzednio przeprowadzoną analizą wykresu ATD (rys.4).

2.2. Bilans cieplny procesu krystalizacji elementu próbnika

Analiza matematyczna, wynikająca z bilansu cieplnego (wzór 11) może być odniesiona do pojedyńczego elementu próbnika [3,4]. W rozdziale 2.1. przyjęto, że temperatura na przekroju całego próbnika jest stała i w każdej chwili wynosi T, która jest równocześnie wielkością pomiarową w metodzie ATD. Oczywiście warunkiem koniecznym jest dokonywanie pomiaru w środku cieplnym próbnika.

Dla analizy matematycznej krzepniecia elementu próbnika należy przyjac warunek, że pomiaru dokonuje się w środku cieplnym próbnika. Do elementu tego nie dopływa ciepło od elementów Druaim otaczających. warunkiem prawidłowego pomiaru jest dodatkowe ograniczenie, że punkt pomiarowy znajduje się w osi próbnika i w takiej górnei odległości od podstawy i. powierzchni ciekłego metalu, aby ciepło było odprowadzane tylko w kierunku promieniowym. Punkt pomiarowy powinien być dostatecznie oddalony od dna jamy skurczowej. Schemat takiego próbnika przedstawiono na rys.6.

Przyjmując te założenia, składnik bilansu cieplnego dla elementu próbnika, wg wzorów 11,12,13, będzie miał następującą postać:



Rys.6. Schemat lokalizacji punktu pomiarowego w próbniku ATD. Fig. 6. The scheme of measurement point

position in ATD probe.

$$dQ_p = \frac{F \cdot \lambda}{\Delta r} (T - T_1) dt \tag{22}$$

Podstawiając te wyrażenia do równania (11) bilansu i upraszczając otrzymuje się:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-F_e \cdot \lambda}{m_e \cdot c_p \cdot \Delta r} (T - T_1) + \frac{K_K}{m_e \cdot c_p} (m \cdot z)^{\prime}$$
(23)

Dla przedziałów czasowych, w których nie pojawiają się efekty cieplne krystalizacji zależność 23 przyjmie postać:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{F_e \cdot \lambda}{m_e \cdot c_p \cdot \Delta r} (T - T_1)$$
(24)

Porównując wzory 16 i 23 istnieje konieczność bliższego określenia funkcji krystalizacji stopu lub faz stopu i przemian. Funkcja ta ma ogólną postać:

$$F_{K\sigma} = \frac{K_K}{m_{\sigma} \cdot c_p} (m \cdot z)^{\prime}$$
(25)

2.3. Ogólna funkcja krystalizacji

Zjawisko krystalizacji kryształów ze stanu ciekłego polega w ogólności na "osadzaniu" atomów na dłuższy okres czasu w węzłach sieci krystalicznej. Tworzeniu tego ciała stałego towarzyszy wydzielanie ciepła krystalizcji (ciepła krzepnięcia).

Teorie krystalizacji rozdzielają ten proces na dwa elementarne procesy:

- proces zarodkowania,
- proces wzrostu kryształów.

Obu tym procesom towarzyszy efekt cieplny. Proces zarodkowania jest zwykle krótkotrwały. Na utworzonych stabilnych (trwałych) zarodkach następuje dalszy wzrost kryształu aż do całkowitego "wyczerpania" cieczy. Zgodnie z teorią Tammana, proces zarodkowania w czystej cieczy czyli proces zarodkowania homogenicznego winien być zawsze poprzedzony przechłodzeniem. W procesie zarodkowania heterogenicznego nie zawsze obserwuje się przechłodzenie cieczy. Oczywiście zjawisko to zależy od intensywności wydzielania ciepła, czyli intensywności zarodkowania.

Natomiast wzrost kryształów jest uwarunkowany intensywnością odprowadzania ciepła z próbnika lub odlewu.

Całkowite ciepło krystalizacji zależy od masy kryształów (lub ziarn) oraz od ich liczby, znajdującej się w całej objętości próbnika lub odlewu. W całym procesie krystalizacji zarówno masa kryształów jak również ich liczba jest funkcją czasu. Tak więc sumaryczne ciepło krystalizacji można wyraźić wzorem:

$$Q_k = K_K \left[(m(t) \cdot z(t)) \right]$$
(26)

lub upraszczając zapis:

$$Q_k = K_K (m \cdot z) \tag{27}$$

$$dQ_k = K_K (m \cdot z)' \cdot dt \tag{28}$$

a po wykonaniu różniczkowania:

$$dQ_{k} = K_{K} \left(m \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dm}{dt} \cdot z \right) dt$$
⁽²⁹⁾

Wstawiając wyrażenie 29 do równania bilansu cieplnego (11) i przekształcając otrzymuje się:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{F}{M \cdot c_p} \alpha(T)(T - T_o) + \frac{K_K}{M \cdot c_p} \left(m \frac{dz}{dt} + \frac{dm}{dt} \cdot z \right)$$
(30)

lub

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{F_{e} \cdot \lambda}{m_{e} \cdot c_{p} \cdot \Delta r} (T - T_{1}) + \frac{K_{K}}{m_{e} \cdot c_{p}} \left(m \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dm}{dt} \cdot z \right)$$
(31)

Tak więc w ogólnym zapisie funkcja krystalizacji jednej fazy ma postać:

$$F_{K} = \frac{K_{K}}{m_{e} \cdot c_{p}} \left(m \frac{dz}{dt} + \frac{dm}{dt} \cdot z \right)$$
(32)

Pierwszy człon tej zależności opisuje proces zarodkowania $\binom{m\frac{dz}{dt}}{m\frac{dz}{dt}}$ a drugi proces

wzrostu kryształu $\left(\frac{dm}{dt}z\right)$.

3. OGÓLNY OPIS MATEMATYCZNY TYPOWYCH PROCESÓW KRYSTALIZACJI

Zależność (32) opisuje ogólnie kinetykę procesu krystalizacji. Jednak w rozważaniach konkretnych zapis ten należy przybliżyć do rzeczywistości. Zamiast ogólnych zapisów należy wykorzystać prawa zarodkowania oraz wzrostu kryształów (ziarn). Należy więc funkcję krystalizacji fazy (32) zapisać jako funkcję zmiennych parametrów geometrycznych i czasowych.

Właściwie należy przyjąć trzy podstawowe rodzaje krystalizacji:

- krystalizacja warstwowa (front płaski),
- krystalizacja objętościowa (ziarna kuliste rozmieszczone w całej objętości),
- krystalizacja dendrytyczna (walcowa ziarna rozmieszczone w objętości jako gałazki dendrytów).

Każda krystalizacja charakteryzuje się odmiennymi prawami narastania i tworzenia kształtu ziarn ciała stałego. W rozważaniach dalszych pominięto procesy segregacji. Równocześnie należy założyć, że suma efektów cieplnych będzie dla każdego typu krystalizacji jednakowa, natomiast przyrost ciała stałego a tym samym proces krystalizacji będzie przebiegał różnie.

3.1. Krystalizacja warstwowa

Krystalizacja warstwowa odbywa się równomiernie od powierzchni formy do środka na tym samym kierunku co odprowadzanie ciepła lecz o przeciwnym zwrocie. Atomy, oddając nadmiar energii osadzają się na warstwach wykrystalizowanych. Zarodkowanie takich kryształów następuje na powierzchni formy. Czasami zarodkowaniu może towarzyszyć przechłodzenie. Kryształy (ziarna) mogą być słupkowe lub globulityczne. Zarodki ziarn globulitycznych pojawiają się na froncie rosnących ziarn, najczęściej na styku kilku utworzonych kryształów. Schematy takiej krystalizacji przedstawiono na rys.7. W ten sposób krystalizują metale czyste lub roztwory krzepnące między temperaturami likwidus i solidus, jednak bez krystalizacji fazy eutektycznej.





Przechodząc do analizy matematycznej procesu wzrostu kryształów należy przyjąć założenie, że całkowity (sumaryczny) efekt cieplny krystalizacji opisuje wzór:

$$Q_{hw} = A_w \bullet m \bullet z \tag{33}$$

przyjmując oznaczenia z rys.7 można zapisać:

$$Q_{kw} = A_w \cdot \gamma \cdot F_w \cdot g \cdot z \tag{33}$$

po uproszczeniu:

$$Q_{k\nu} = A_{k\nu} \cdot g \cdot z \tag{34}$$

różniczkując otrzymuje się:

$$\frac{dQ_{kr}}{dt} = A_{kr} \left(g \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dg}{dt} \cdot z \right)$$
(35)

Dla krystalizacji warstwowej funkcja krystalizacji przyjmie postać:

$$F_{KW} = \frac{K_{KW}}{m_e \cdot c_p} \left(g \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dg}{dt} \cdot Z \right)$$
(36)

która opisuje proces krystalizacji z uwzględnieniem warstwy wykrystalizowanej i przyrostu grubości (g, dg/dt) oraz liczby zarodków i szybkości ich zmiany (z, dz/dt).

3.2. Krystalizacja objętościowa (kulista)

Krystalizacja objętościowa polega na powstawaniu kryształów w całej objętości cieczy. Zarodki kryształów powstają dzięki przechłodzeniu lub też zmianie stężenia pierwiastków. Krystalizacja taka pojawia się przy istnieniu małego gradientu temperatury w zakresie temperatur krystalizacji. W ten sposób krystalizują stopy eutektyczne. Schemat takiego procesu przedstawiono na rys.8.



Rys.8. Schemat graficzny krystalizacji objętościowej stopów.

Fig. 8. The graphical scheme of volume alloys crystallization.

Efekt cieplny krystalizacji objętościowej (kulistej) opisuje zależność:

$$Q_{kk} = A_k \cdot m \cdot z \tag{37}$$

Masę pojedynczego ziarna kulistego można zapisać wzorem:

$$m = \frac{4\pi}{3} \cdot \gamma \cdot r^3 \tag{38}$$

Wstawiając tę zależność do wzoru 37 otrzymuje się:

$$Q_{kk} = A_{kk} \cdot r^3 \cdot z \tag{39}$$

Różniczkując otrzymuje się:

$$\frac{dQ_{kk}}{dt} = A_{kk} \left(3r^3 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot z + r^3 \cdot \frac{dz}{dt} \right)$$
(40)

a funkcja krystalizacji przyjmie postać:

$$F_{KK} = \frac{K_{KK}}{m_e \cdot c_p} \left(3r^2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot z + r^3 \cdot \frac{dz}{dt} \right)$$
(41)

3.3. Krystalizacja dendrytyczna

Niektóre stopy przy istnieniu odpowiednich warunków stygnięcia, krystalizują jako dendryty z gałązkami rozwiniętymi od głównej osi w dwu kierunkach. Czasami mogą pojawić się gałązki wtórne. Schemat takiej krystalizacji przedstawiono na rys.9. Na rys.9a przedstawiono schematycznie strukturę walcową wzrostu takich dendrytów. W rzeczywistości rozwój takich gałązek przebiega stożkowo a objętości między gałązkami wypełniają się cieczą wzbogaconą w pierwiastki stopowe, krystalizującą często jako stop eutektyczny. Przyjmując ten model parametrami zmiennymi w czasie będą: promień gałązek, długość gałązek i liczba dendrytów.



Rys.9. Schemat graficzny krystalizacji dendrytycznej stopów. Fig. 9. The graphical scheme of dendritic alloys crystallization.

Przyjmując w dużym uproszczeniu geometrię dendrytów wzór ogólny na sumaryczny efekt cieplny ma postać:

$$Q_{kd} = A_k \cdot m \cdot z \tag{42}$$

a masę dendrytu o gałązkach walcowych można zapisać:

$$m = \pi \bullet \gamma \bullet r^2 \bullet l \tag{43}$$

Stąd:

$$Q_{kd} = A_{kd} \bullet r^2 \bullet l \bullet z \tag{44}$$

Różniczkując wzór 44 otrzymuje się:

$$\frac{dQ_{kd}}{dt} = A_{kD} \left(2r \frac{dr}{dt} \cdot l \cdot z + r^2 + \frac{dz}{dt} \cdot l + r^2 \cdot z \cdot \frac{dl}{dt} \right)$$
(45)

Obserwując kryształy dendrytyczne, proces wzrostu ich gałązek dochodzi do pewnej grubości i następnie zlewa się w nieregularne ostrosłupy. Kryształy takie można już traktować jako wzrastające warstwowo. Powierzchnia tych kryształów jest rozwinięta znacznie bardziej niż w przypadku krystalizacji warstwowej.

4. ELEMENTARNE FUNKCJE KRYSTALIZACJI

Ogólne funkcje krystalizacji przedstawione wzorami 36, 41, 45 należy rozwiązać przy zastosowaniu funkcji krystalizacji, zależnych od czasu. Należy znaleźć funkcje procesu krystalizacji a więc funkcje zarodkowania i wzrostu kryształów zależne od czasu. Zależności takie zostały opracowane przez Tammana i Chworinowa.

Szybkość zarodkowania kryształów przedstawiona została jako krzywa GAUSS'a, którą można było opisać wzorem:

$$\frac{dz}{dt} = A_G \cdot \exp\left(-B(t-t_w)^2\right)$$
(46)

Wpisanie tej zależności do funkcji krystalizacji 36 jest możliwe. Funkcja krystalizacji jednak zawiera również liczbę zarodków. Całkowanie zależności 46 jest możliwe metodami numerycznymi lub rozwinięciem w szereg potęgowy. Rozwiązania te są mało przydatne do stosowania w zaproponowanym zapisie funkcji krystalizacji.

Po przeprowadzeniu analiz literaturowych do stosowania przyjęto następującą zależność:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{U_z \cdot p \cdot \exp(p(w-t))}{(1 + \exp(p(w-t)))^2}$$
(47)

Natomiast po scałkowaniu otrzymuje się funkcje:

$$z = \frac{U_z}{(1 + \exp(p(w-t)))} \tag{48}$$

Całkując wzór 47 bardzo podobny do funkcji GAUSS'a, otrzymuje się funkcję elementarną. Obie te funkcje opisujące liczbę zarodków (z) oraz szybkości zarodkowania (dz/dt) mogą być wpisane bezpośrednio do funkcji krystalizacji. Obraz graficzny funkcji 47 i 48 przedstawiono na rys. 10 i 11.



Rys.10. Zmiana szybkości zarodkowania kryształów w cieczy. Fig. 10. The change of crystals nucleation rate in liquid.



Rys.11. Wzrost liczby zarodków w krystalizującej cieczy Fig. 11. The growth of nucleuses number in crystallizable liquid.

Chworinow opracował zależność, która określa grubość warstwy zakrzepłej następującą funkcją:

$$g = G \sqrt{t} \tag{49}$$

Stąd szybkość narastania warstwy określa wzór:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{G}{2\sqrt{t}} = \frac{G_1}{\sqrt{t}} \tag{50}$$

Obraz graficzny tych funkcji przedstawiono na rys. 12 i 13.



Rys.12. Przyrost warstwy zakrzepłej w odlewie, czyli przyrost kryształów. Fig. 12. The increase of solidified layer in casting; it means the crystals increase.





Fig. 13. The solidified layer increase rate in casting; it means the crystal increase.

Wzory 47, 48, 49, 50 opisują elementarne procesy krystalizacji. Funkcje te mają tę zaletę, że są ciągłe w całym zakresie procesu krystalizacji. Spełnienie tego warunku jest podstawowym dla rozwiązania matematycznego, opisującego proces krystalizacji.

5. FUNKCJE KRYSTALIZACJI

Rozwiązując zadania teoretyczne metody ATD, otrzymano równanie krystalizacji wyrażające się wzorem:

- dla elementu skończonego:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{F_e \lambda}{m_e \cdot \Delta r \cdot c_p} (T - T_1) + \frac{A_{bv}}{m_e \cdot c_p} \left(g \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dg}{dt} \cdot z \right)$$
(51)

- dla całego próbnika:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{F}{M \cdot c_p} \alpha(t) \cdot (T - T_o) + \frac{A_{b\sigma}}{M \cdot c_p} \left(g \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dg}{dt} \cdot z \right)$$
(51a)

Równocześnie należy zwrócić uwagę, że równanie to opisuje przebieg pierwszej pochodnej krzywej stygnięcia. Drugi składnik tego równania opisuje kinetykę procesów krystalizacji jednej fazy. Składnik ten nazwano funkcją krystalizacji:

$$F_{KW} = \frac{A_{bv}}{m_e \cdot c_p} \left(g \frac{dz}{dt} + \frac{dg}{dt} \cdot z \right)$$
(52)

Wstawiając do tego równania funkcje elementarne krystalizacji określone wzorami 47, 48, 49, 50 otrzymuje się:

$$F_{KW} = \frac{A_{kv}}{m_{e} \cdot c_{p}} \left(\frac{U_{ZW} \cdot p \cdot \exp(p(W - t) \cdot G \cdot \sqrt{t})}{(1 + \exp(p(W - t)))^{2}} + \frac{U_{ZL} \cdot G_{1} \cdot KV}{(1 + \exp(p(W - t))) \cdot \sqrt{t}} \right)$$
(53)

Do wzoru tego wprowadzono funkcję wyczerpywania ciekłego metalu w procesie krystalizacji. Funkcja ta, oznaczona we wzorze symbolem KV musi spełniać specjalne warunki. W czasie, kiedy powstające kryształy nie stykają się ze sobą KV = 1. Natomiast po zakończeniu krystalizacji musi być spełniony warunek: KV = 0.

Funkcja ta ma postać:

$$KV = 1 - \frac{1}{(1 + \exp(p_k((W_k - t))))}$$
(54)

Graficzną postać tej funkcji przedstawiono na rys.14.





Graficzną postać funkcji według wzoru 53 przedstawiono na rys.15.



Rys.15. Graficzna postać funkcji krystalizacji jednej fazy. Fig. 15. The diagram of one phase crystallization function.

Pierwszy człon tej zależności opisuje kinetykę zarodkowania kryształów. Natomiast drugi człon opisuje wzrost kryształów. Oba te składniki uzależnione są od czasu. Im później krystalizuje faza, to graficzny obraz rejestrowany na aparaturze Crystaldigraph będzie większy. Natomiast chwilowy efekt cieplny procesu krystalizacji będzie malał, co jest zgodne z teorią Chworinowa. Obrazy graficzne poszczególnych składników funkcji krystalizacji (53) przedstawiono na rys. 16 i 17.

W toku dalszych rozważań teoretycznych, należy opracować metodę wyznaczania parametrów tych funkcji krystalizacji tak, aby symulacja cieplna była zgodna z pomiarem ATD. Niektóre rozwiązania tego problemu przedstawiono we wcześniejszych publikacjach autorskich [2,3,4].



Rys.16. Graficzna postać funkcji zarodkowania (pierwszy składnik wzoru 53). Fig. 16. The diagram of nucleation function (the first element of formula no53).



Rys.17. Graficzna postać funkcji wzrostu kryształu (drugi składnik wzoru 53). Fig. 17. The diagram of crystal increase function (the second element of formula no53).

6. WYZNACZANIE KRZYWEJ KALORYMETRYCZNEJ

W celu określenia bilansu wymiany ciepła w krystalizującym metalu wewnątrz próbnika ATD-10 zastosowano modelowanie numeryczne przy zastosowaniu metody różnic skończonych. Dla opisywanego próbnika opracowano program komputerowy, wykonujący obliczenia bilansu, przy zastosowaniu konwencji entalpowej. Przyjęcie konwencji entalpowej znakomicie ułatwia zapis własności nieliniowych materiałów, szczególne znaczenie ma to dla ciepła właściwego metalu, ponieważ przyjęto, że ciepło krystalizacji metalu zostaje ujęte jako zastępcza pojemność cieplna [6]. W celu wprowadzenia zastępczej pojemności cieplnej, niezbędna jest znajomość rozkładu wartości ciepła w funkcji temperatury. Funkcja ta zwana jest w literaturze jako "spektralne ciepło krystalizacji" [7]. Dzięki zastosowaniu metody numerycznej symulującej przebieg procesu krystalizacji stopu, mamy możliwość śledzenia wszystkich parametrów procesu, włącznie z najbardziej interesującym parametrem, opisującym strumień ciepła w dowolnym punkcie próbnika pomiarowego. Można przyjąć, że dla stygnącego metalu bez wydzielania ciepła krystalizacji zachodzi zależność:

$$\frac{dQ_c}{dt} = -M \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt}$$
(55)

W trakcie obliczeń symulacji krzepnięcia, strumień ciepła oddawanego przez metal jest na bieżąco obliczany dla całej powierzchni styku metalu z otoczeniem lub formą, tak więc jest wielkością znaną. Dla metalu wydzielającego ciepło krystalizacji zachodzi zależność:

$$\frac{dQ_{cz}}{dt} = -M \cdot (c_p + c_k) \frac{dT}{dt}$$
(56)

ostatecznie strumień ciepła krystalizacji oddawany w chwili czasu t w przeliczeniu na jednostkę masy dany jest wzorem:

$$q_{k} = c_{k} \frac{dT}{dt} = -\frac{dQ_{cz}}{dt} \cdot \frac{1}{M} - c_{p} \frac{dT}{dt}$$
(57)

Całka z q_k po czasie od chwili rozpoczęcia krystalizacji do jej zakończenia odpowiada ciepłu krystalizacji. Przykładowy przebieg symulowanego procesu przedstawiono na rys.18.



Rys.18. Przykładowy przebieg symulowanego procesu krystalizacji. Fig. 18. Example of simulating process of crystallization.

Dla prawidłowego odtworzenia przebiegu procesu wydzielania ciepła krystalizacji do programu, wprowadzono zarejestrowane dane z rzeczywistego pomiaru. Następnie przyjęto hipotetyczną funkcję spektralnego ciepła krystalizacji, pokazaną na rys.19. Przyjęcie takiej postaci funkcji jest zgodne ze znanymi z literatury przykładami [8], [9] (hipoteza Samojłowicza). Parametry określające temperatury na wykresie da się odczytać bezpośrednio z wykresu ATD. Bardzo istotne jest, aby całka z funkcji

odpowiadała ciepłu krzepnięcia metalu. Dla dokładności obliczeń, niezbędna jest również znajomość masy metalu w próbniku.



Rys.19. Założona postać funkcji spektralnego ciepła krystalizacji. Fig. 19. Assumption function of spectral cristallizaton heat.

Następnym krokiem jest dobranie parametrów wymiany ciepła do otoczenia przez próbnik pomiarowy tak, aby symulowany wykres temperatury i krzywej krzepnięcia pokrywał się możliwie dokładnie z przebiegiem zarejestrowanym aparaturą ATD. W przypadku stosowania standardowych próbników i zachowania stałych parametrów otoczenia, dobór parametrów jest konieczny praktycznie tylko za pierwszym razem. W dalszych próbach wymagane są tylko minimalne korekty, wynikające ze zmiennej na ogół temperatury zalewania ciekłego metalu do próbnika. Następnie dopasowywana jest funkcja spektralnego ciepła krystalizacji, zgodnie z opisanym modelem. Dobierane są przede wszystkim proporcje ciepła krystalizacji poszczególnych faz oraz sumaryczne ciepło krystalizacji. W wyniku tak przeprowadzonych obliczeń, otrzymuje się wykres możliwie dokładnie odwzorowujący przebieg symulowanego procesu, rys.20.

Natomiast na rys.21 przedstawiono bezpośrednią analizę termiczną rejestrowaną przy pomocy aparatury Crystaldigraph (krzywe T i T').





Fig. 20. Symulated ATD process with crystallization thermal effect.

7. OKREŚLANIE KINETYKI WYDZIELANIA CIEPŁA KRYSTALIZACJI W PRÓBNIKU

Dla tak dobranych parametrów, możliwe jest wygenerowanie przebiegu symulacji z obliczoną krzywą kalorymetryczną dla danego przebiegu. Ponieważ strumień ciepła oddawanego przez próbnik zależy w głównej mierze od temperatury na brzegu metalu, która jest z kolei wypadkową temperatury wewnątrz całej objętości metalu nie popełniamy istotnego błędu, przybliżając rzeczywisty pomiar pomiarem symulowanym. Symulowany pomiar jest niezbędny wyłącznie do odtworzenia strumienia ciepła oddawanego przez próbnik, na podstawie tego strumienia obliczany jest strumień ciepła krystalizacji na jednostkę masy w funkcji czasu. Mając obliczoną wartość strumienia ciepła krystalizacji w czasie, można obliczyć funkcję wartości ciepła krystalizacji wydzielonego od temperatury zalania próbnika do danej temperatury:

$$Q_{kT}(T) = c_p \int_0^{t_T} \left(\frac{dT}{dt} - \left(\frac{dT}{dt} \right)_C \right) dt$$
(58)

Spektralne ciepło krystalizacji ostatecznie jest obliczane ze wzoru:

$$c_{k}(T) = \frac{\partial Q_{k}(T)}{\partial T}$$
(59)

W celu określenia kinetyki krzepnięcia rzeczywistego materiału wprowadzono do programu zarejestrowane dane z pomiaru próby ATD przy pomocy aparatury Crystaldigraph PC rys.21.



Rys.21. Zarejestrowany rzeczywisty pomiar krzywej temperatury i krystalizacji. Fig. 21. The diagram of real measurement of temperature and crystallization curves.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń, zgodnie z przedstawionym algorytmem otrzymano następujący przebieg kinetyki wydzielania ciepła krystalizacji w postaci wykresu spektralnego ciepła krystalizacji, rys.22.





Fig. 22. Reconstructed function of spectral crystallization heat for ATD test.

7.1. Wykresy składowych faz krystalizujących w stopie AlSi7

Jak to wynika z układu równowagi fazowej stopu podwójnego Al-Si (rys.2), najpierw krystalizuje faza α , tj. roztwór krzemu w aluminium. Potem następuje krystalizacja eutektyczna fazy α oraz fazy β . Faza β jest bardzo słabym roztworem aluminium w krzemie. Praktycznie na zgładach metalograficznych obserwuje się wydzielenia krzemu. Każda faza w procesie krystalizacji wydziela ciepło. Wydzielenie tego ciepła odbywa się według przebiegu prawie równoczesnego dwóch procesów:

- kinetyki zarodkowania,

- kinetyki wzrostu kryształów (przyrostu warstwy zakrzepłej).

Oczywiście proces zarodkowania wyprzedza proces krystalizacji. Po utworzeniu zarodka trwałego następuje wzrost kryształu. Ponieważ liczba zarodków wzrasta ciągle, to proces ten przebiega w pewnym zakresie czasu i temperatury.

Kinetykę wydzielania ciepła krystalizacji obu faz: α i β w funkcji temperatury przedstawiono na rys.19. Dla opisu matematycznego tego rodzaju funkcji, przyjęto opis podobny jak dla procesu czasowego. Funkcje te mają następującą postać:

$$F_{KT} = \frac{U_{ZT} \cdot z \cdot \exp(z(T-w))}{(1 + \exp(z(T-w)))^2} + \frac{U_{LT} \cdot KLT}{(1 + \exp(z(T-w)))}$$
(60)

gdzie:

$$KLT = \frac{1}{(1 + \exp(z_{k}(w_{k} - T)))}$$
(61)

Wzory te posiadają temperaturę jako zmienną niezależną. W tej postaci są niezwykle przydatne do wszelkiego rodzaju obliczeń symulacyjnych procesu krzepnięcia i stygnięcia.

Pierwszy składnik wzoru 53 opisuje proces zarodkowania, natomiast drugi składnik opisuje proces wzrostu kryształów fazy ciała stałego. Obliczone, metodą symulacji, ciepło krystalizacji dla całego procesu przedstawionego na rys. 3 wynosi:

$$Q_{k} = 497 \, [kJ/Kg]$$
 (62)

Dopasowane funkcje do procesu krystalizacji fazy α przedstawiono na rys.23. Krystalizacje fazy eutektycznej ($\alpha + \beta$) przedstawiono na rys.24.Funkcje szczegółowe, opisujące te procesy przedstawiono na wykresach (rys.23 i 24).

Porównanie wykresu zarejestrowanego procesu (rys.21) i odtworzonego przy pomocy programu komputerowego symulacji, (rys.20) wskazuje na bardzo dobre odwzorowanie przebiegu procesu. Obie krzywe T(t) i T'(t) są bardzo zbliżone do siebie, co świadczy o dobrym doborze funkcji krystalizacji. Na rys.20 przedstawiono również krzywą kalorymetryczną T_c'(t) oraz krzywą q(t) opisującą kinetykę wydzielania ciepła krystalizacji z całego próbnika. Wszystkie wykresy otrzymano za pomocą specjalnie opracowanego programu komputerowego.



Rys.23. Proces krystalizacji fazy α w stopie AlSi7. Fig. 23. The crystalization process of α phase in AlSi7 alloy.





8. OKREŚLENIE WYDAJNOŚCI ŹRÓDŁA CIEPŁA W WYBRANYCH ELEMENTACH PRÓBNIKA

Po ustaleniu kinetyki wydzielania ciepła krystalizacji w funkcji temperatury istnieje możliwość prześledzenia procesu krystalizacji w elementach objętości całego badanego próbnika. W próbniku wybrano trzy punkty charakterystyczne na jednej wysokości, ułożone kolejno od osi do jego powierzchni. Dodatkowo ustalono punkt w dolnym narożniku przekroju próbnika. Punkt ten wybrano ze względu na największą dynamikę procesu krystalizacji. Wybrane punkty pokazano na rys. 25.

Ogólne równanie nieustalonego pola temperatur z uwzględnieniem źródła ciepła można zapisać:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{c_p \gamma} \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q(x,t)}{c_p}$$
(63)

W przedstawionej zależności wyrażenie q(x,t) opisuje wydajność źródła ciepła w zależności od miejsca (x) oraz czasu (t).

- 83 -



Rys.25. Wybrane punkty pomiarowe w objętości próbnika ATD-10 Fig. 25. The control points in ATD-10 probe.

Natomiast przekształcając wyrażenie (63) dla dowolnego elementu skończonego w próbniku walcowym (ATD-10), otrzymuje się wyrażenie w ogólnym zapisie:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-F_{\bullet} \cdot \lambda}{m_{\bullet} \cdot c_{p} \cdot \Delta r} \left(T - T_{1}\right) + \frac{K_{kT}}{c_{p}}(r,t)$$
(64)

Rozwiązując równanie dla badanego próbnika ATD otrzymano rozwiązania dla wybranych punktów próbnika. Na rys. 26 - 29 przedstawiono krzywą stygnięcia (T(t)), krzywą krystalizacji (T'(t)), krzywą kalorymetryczną T_c'(t) oraz krz;wą q(t) określającą wydajność źródła ciepła dla wybranych punktów w próbniku ATD-10.

Jak widać z przedstawionych wykresów, w każdym miejscu "pomiarowym" będzie inna krzywa stygnięcia i krystalizacji. Oczywiście inaczej przebiega krzywa kalorymetryczna i krzywa wydajności źródła ciepła. Wszystkie te przebiegi procesu krystalizacji zostały osiągnięte przy tej samej funkcji krystalizacji, przedstawionej w rozdziale 7 jako funkcja temperatury, co jest podstawowym osiągnięciem Autorów.



Rys.26. Temp. pochodna, krzywa kalorymetryczna i funkcja źródła dla punktu 1. Fig. 26. Temp. derivative, calorymetric and heat source curves for point 1.



Rys.27. Temp. pochodna, krzywa kalorymetryczna i funkcja źródła dla punktu 2. Fig. 27. Temp. derivative, calorymetric and heat source curves for point 2.



Rys.28. Temp. pochodna, krzywa kalorymetryczna i funkcja źródła dla punktu 3. Fig. 28. Temp. derivative, calorymetric and heat source curves for point 3.



Rys.29. Temp. pochodna, krzywa kalorymetryczna i funkcja źródła dla punktu 4. Fig. 29. Temp. derivative, calorymetric and heat source curves for point 4.

LITERATURA

- [1] Jura S.: Krzywa kalorymetryczna w analizie termicznej i derywacyjnej procesu krystalizacji. Krzepnięcie Metali i Stopów 1990 nr 14, s.5.
- [2] Jura S.: Istota metody ATD. Nowoczesne metody oceny jakości stopów. PAN-Katowice, Instytut Odlewnictwa Pol. Śl. 1985, s.5.
- [3] Jura Z.: Numeryczna identyfikacja spektralnego ciepła krystalizacji. Krzepnięcie Metali i Stopów PAN-Katowice, 1992, nr 17, s.39.
- [4] Jura Z., Jura S.: Krzywa kalorymetryczna i źródła ciepła w analizie termicznej i derywacyjnej procesu krzepnięcia żeliwa. Krzepnięcie Metali i Stopów PAN-Katowice 1992, nr 16, s.126.
- [5] Łoskiewicz K., Orman M.: Układy równowagi podwójnych stopów. PWN-Warszawa 1965, s.133.
- [6] Braszczyński J.: Krystalizacja odlewów. WNT Warszawa 1991, s.142.
- [7] Mochnacki B.: Bull. pol. Ac.: Tech., 32 (1984), s.127-143.
- [8] Longa W.: Krzepnięcie odlewów. Wydawnictwo Śląsk 1985, s.314-317.
- [9] Mochnacki B.: The Iterative Method of Sources Function Identification in the Area of Solidiyfing Alloy. Krzepnięcie Metali i Stopów nr.17 PAN Katowice 1992

WYKAZ OZNACZEŃ

A	-	objętosc z ktorej ciepło odprowadzane jest promieniowo (rys.6)
A _c ,B	-	parametry funkcji GAUSSa
Aκ	-	stała krystalizacji [J/kg]
Akd	-	stała krystalizacji dendrytycznej [J/m ³]
Akk	-	stała krystalizacji kulistej [J/m³]
A _{kw}	-	stała krzepnięcia warstwowego [J/m]
A,	-	stała krystalizacji warstwowej [J/kg]
В	-	objętość z której ciepło odprowadzane jest osiowo (rys.6)
С	-	ciekły metal (rys.6)
с _к	-	ciepło właściwe (zastępcze) [J/(kg•K)]
Cp	-	ciepło właściwe [J/(kg•K)]
c _z (T)	-	ciepło spektralne krystalizacji [J/(kg•K)]
dT	-	chwilowa zmiana temperatury [°C]
ES	-	objętości (komórek) elementarnych w metodzie różnic skończonych (rys.6)
F	-	powierzchnia oddawania ciepła przez próbnik [m ²]
F.	-	powierzchnia elementu przez który przepływa ciepło [m ²]
F _{Ke}	-	funkcja krystalizacji elementu różnicowego [K/s]
Fĸĸ	-	funkcja krystalizacji kulistej [K/s]
FĸŦ	-	funkcja krystalizacji zależna od temperatury [J/(kg•K)]
F _{ĸw}	-	funkcja krystalizacji warstwowej [K/s]
Fw	-	powierzchnia oddawania ciepła w krystalizacji warstwowej [m²]
G	-	stała grubości warstwy [m/✔s]
G1 = (G/2	- stała wzrostu kryształu [m/✔s]
g	-	grubość warstwy zakrzepłej [m]
dg/dt	-	szybkość przyrostu zakrzepłej warstwy [m/s]
J	-	jama skurczowa (rys.6)
Kκ	-	stała krystalizacji kulistej [J/kg]
K _R	-	stała funkcji krystalizacji

KLT funkcja temperaturowa wyczerpywana ciekłego metalu [] L długość gałazek dendrytów [m] dl/dt szybkość wzrostu gałązek dendrytów [m/s] M masa próbnika [kg] m masa kryształu (ziarna) [kg] m(t)- funkcja masy kryształu (ziarna) w czasie [kg] m, masa elementu siatki podziałowej w metodzie różnic skończonych [kg] dm/dt - szybkość przyrostu masy zakrzepłej (stałej) [kg/s] Ρ punkt pomiarowy (rys.6) р parametr funkcji zarodkowania [1/s] $\mathbf{p}_{\mathbf{K}}$ parametr funkcji wyczerpywania ciekłego metalu [1/s] promień kryształu, promień gałązek dendrytów [m] dr/dt - szybkość wzrostu średnicy gałązek dendrytów [m/s] dr/dt - szybkość wzrostu ziarna kulistego [m/s] - krok siatki różnicowej elementów w próbniku [m] ۵ľ Т - temperatura [°C] T'=(dT/dt) - pochodna temperatury po czasie [K/s] T_'=(dT/dt)_ - krzywa kalorymetryczna [K/s] TL - temperatura likwidus [°C] TLM - temperatura likwidus metastabilnej przemiany [°C] TK temperatura końca krystalizacji [°C] TS - temperatura solidus [°C] TSM - temperatura solidus metastabilnej przemiany [°C] T₁ temperatura sasiedniego elementu w próbniku [°C] T。 - temperatura otoczenia [°C] t1,t2 czas początku i końca krystalizacji [s] wartość średnia w funkcji GAUSS'a t, ULT stała wzrostu kryształów [J/(kg•K)] Uz stała funkcji szybkości zarodkowania [] UzL stała liczby zarodków [] Uzt stała zarodkowania zależna od temperaturt [J/(kg•K)] U_{zw} stała funkcji zarodkowania w procesie krystalizacji warstwowej [] W parametr funkcji zarodkowania (czas dla maksimum funkcji) [s] W, czas maksymalnej szybkości wyczerpywania ciekłego metalu [s] Z liczba zarodków (a później ziarn krystalicznych) dz/dt - szybkość zarodkowania [1/s] α roztwór Si w aluminium α,β fazy strukturalne stopu Al Si współczynnik oddawania ciepła z powierzchni próbnika [J/(s•m²•K)] $\alpha(T)$ ciężar właściwy [kg/m³] g λ współczynnik przewodzenia ciepła [J/(s•m•K)] dQ_ zmiana ciepła w wyniku stygnięcia metalu [J/kg] Q - ciepło krystalizacji [J/kg] dQ zmiana ciepła krystalizacji [J/kg] Q_{kd} ciepło krzepnięcia dendrytycznego [J/kg] Q_{kw} ciepło krzepnięcia w procesie przyrostu warstwowego [J/kg] dQ zmiana ciepła oddawanego przez próbnik [J/kg] QkT(T) - wydzielone ciepło krystalizacji do danej temperatury [J/kg] strumień ciepła krystalizacji [J/(s•kg)] qk q(x,t) - funkcja źródła ciepła zależna od miejsca i czasu trwania procesu [J/(kg•s)]