Krzepnięcie metali i stopów t. 15
PL ISSN 0208-9386 ISBN 83-04-03623-1
Ossolineum 1990

Radosław GRZYMKOWSKI

OPTYMALIZACJA GRUBOŚCI FORMY ODLEWNICZEJ PRZY ZACHOWANIU ZAŁOŻONEGO PRZEBIEGU PROCESU KRZEPNIĘCIA

1. Wstęp

Spośród wielu parametrów wpływających na proces krzepnięcia odlewu istotny wpływ mają parametry determinujące proces wymiany ciepła między odlewem a otaczającym go medium. Gdy odlew krzepnie w formie wielowarstwowej, to takimi parametrami będą współczynniki termofizyczne materiałów, z których wykonane są poszczególne warstwy oraz grubości tych warstw. Jeżeli projektując formę wybierze się rodzaj mas formierskich, to wówczas proces wymiany ciepła między odlewem a otoczeniem zależeć będzie już tylko od grubości warstw.

W pracy zostanie przedstawiony pewien algorytm obliczeń polegających na wyznaczeniu dla odlewu o kształcie płyty, walca lub kuli grubości warstw zapewniających bliski podyktowanemu wymogami technologicznymi przebieg procesu krzepnięcia.

2. Założenia

Niech f_{kj}, $k=\overline{1,K}$, $j=\overline{1,M_k}$, oznaczają podyktowane wymogami technologicznymi temperatury w dowolnych punktach $\bar{x}_k$, $k=\overline{1,K}$, z obszaru odlewu w wybranych dyskretnych chwilach czasu $t=t_{kj}$, $j=\overline{1,M_k}$, należących do rozważanego przedziału czasu $\langle 0, t_\infty \rangle$, przy czym $t_\infty < \infty$.

Załóżmy dalej, że odlew o grubości lub średnicy równej $2h_0$ i wytworzony z metalu krzepnącego w przedziale temperatur $\langle T_S, T_L \rangle$ (T_S - temperatura solidusu, T_L - temperatura likwidusu) który wlewany jest do formy ma temperaturę T^*, $T^* \geqslant T_L > T_S$, natomiast forma składa się z N warstw wykonanych z różnych

materiałów o grubościach h_n, n=1,N, i w chwili wypełnienia jej metalem ma temperaturę otoczenia T_∞. Grubości warstw formy są ograniczone z dołu (zapewnia to możliwość ich wykonania), a całkowita grubość formy jest ograniczona z góry, tzn.

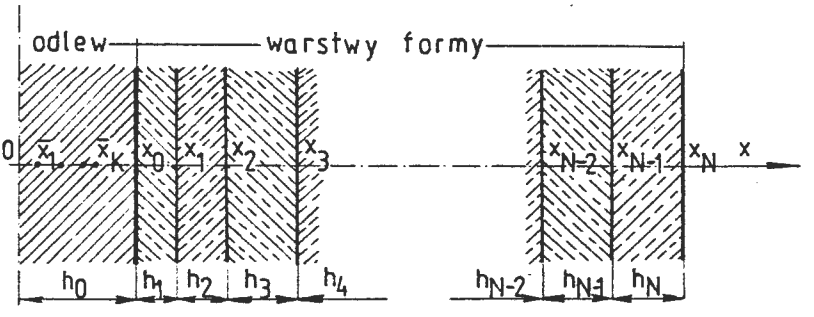
$$h_n \geqslant h_n^0 \quad , \qquad n=\overline{1,N}; \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{N} h_n \leqslant H, \tag{2}$$

gdzie h_i^0 , $i=\overline{1,N}$ oznaczają dopuszczalne minimalne grubości warstw, a H jest maksymalną grubością formy, przy czym

$$H > \sum_{n=1}^{N} h_n^0 .$$

Załóżmy jeszcze,że kontakt cieplny między warstwami formy jest idealny i że znane są parametry termofizyczne poszczególnych obszarów układu oraz opór cieplny pojawiającej się w trakcie procesu krzepnięcia szczeliny na styku odlewu i formy.



Rys. 1. Obszary modelowanego obiektu

3. Model matematyczny

Zorientujmy w przestrzeni modelowany obiekt jak na rysunku 1, położenie brzegów warstw opisują wtedy współrzędne

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} h_i \quad , \qquad n=\overline{0,N}.$$

Ze względu na osiową symetrię modelowanego obiektu, przy przyjętych założe-

niach, niestacjonarne pole temperatury w obszarze odlewu i podobszarach formy opisuje układ równań:

$$\partial_t T_0 = a_0 x^{-m}\ \partial_x(x^m \partial_x T_0), \qquad 0 < x < x_0\ , \qquad 0 < t \leqslant t_\infty\ ; \tag{3}$$

$$\partial_t T_n = a_n x^{-m}\ \partial_x(x^m \partial_x T_n), \qquad x_{n-1} < x < x_n \quad 0 < t \leqslant t_\infty\ ; \tag{4}$$

$$T_0 = T^*, \qquad 0 < x < x_0\ , \qquad t=0; \tag{5}$$

$$T_n = T_\infty \quad x_{n-1} < x < x_n\ , \qquad t=0, \qquad n=\overline{1,N}\ ; \tag{6}$$

$$\partial_x T_0 = 0, \qquad x=0\ , \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_\infty; \tag{7}$$

$$-\lambda_N\ \partial_x T_N = \alpha(T_N - T), \qquad x = x_N\ , \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_\infty; \tag{8}$$

$$-\lambda_0\ \partial_x T_0(x_0 - 0,\ t) = [T_1(x_0 - 0,\ t) - T_0(x_0 + 0,\ t)]/R =$$

$$= -\lambda_1\ \partial_x T_1(x_0 + 0,\ t)\ , \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_\infty \tag{9}$$

oraz

$$T_n(x_n - 0,\ t) = T_{n+1}(x_n + 0,\ t)$$

$$-\lambda_n\ \partial_x T_n(x_n - 0,\ t) = -\lambda_{n+1}\ \partial_x T_{n+1}(x_n + 0,\ t) \tag{10}$$

$$0 \leqslant t \leqslant t_\infty\ , \qquad n=\overline{1,N-1}$$

gdzie $T_n = T_n(x,t)$ oznaczają temperaturę odlewu (n=0) i warstw formy ($n=\overline{1,N}$), x - współrzędną przestrzenną, t - czas, $a_0 = a_0(T)$ jest zastępczą dyfuzyjnością cieplną uwzględniającą efekt wydzielania się ciepła przemiany fazowej [1], a_n - const, $n=\overline{1,N}$, oznaczają współczynniki przewodzenia temperatury, λ_n - const, $n=\overline{0,N}$, współczynniki przewodzenia ciepła, $\alpha = \alpha(T_N)$ jest współczynnikiem wymiany ciepła, $R=R(T_0,\ T_1)$ oporem cieplnym szczeliny, a parametr m określa geometrię obiektu (m=0 płyta, m=1 walec i m=2 kula).

4. Metoda rozwiązywania

Przy tak sformułowanym modelu matematycznym postawione zadanie - określenia grubości warstw formy zapewniających możliwie bliski podyktowanemu wymogami technologicznymi przebieg procesu krzepnięcia odlewu - można rozwiązać na kilka sposobów. Zdecydowano się wykorzystać metody optymalizacyjne. Należy

więc do opisu matematycznego dołączyć funkcjonał jakości, tzn. kryterium wyboru nieznanych wielkości h_n, $n=\overline{1,N}$, składowych wektora h.

Mając na uwadze poczynione założenia, jako kryterium można przyjąć funkcję

$$F(h) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{M_k} \mu_{kj}(f_{kj} - T_{kj}^{h})^2 + \sum_{i=0}^{N} \mu_i^0 \eta_i , \tag{11}$$

którą minimalizujemy; $T_{kj}^{h} = T(x_k, t_{kj} : h)$, $k=\overline{1,K}$, $j=\overline{1,M_k}$, oznaczają odpowiednie rozwiązania zagadnienia brzegowego (3)-(10) przy danym wektorze h, μ_{kj} są to parametry wagowe determinujące wiarygodność informacji, funkcje η_i, $i=\overline{1,N}$, i η_0 mają postać:

$$\eta_i = \eta_i(h_i) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 , & h_i \geqslant h_i^0 \\ 1 , & h_i < h_i^0 \end{cases}$$

$$\eta_0 = \eta_0(h) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 , & \sum_{n=1}^{N} h_n \leqslant H \\ 1 , & \sum_{n=1}^{N} h_n > H \end{cases}$$

a μ_i^0 , $i=\overline{0,N}$ są to dowolnie (dostatecznie duże) stałe dodatnie, tzw. czynniki kary, przy czym w praktyce stosuje się zwykle ciągi rosnących wartości μ_i^0, aby uniknąć kłopotów z wydłużonymi konturami funkcji F.

Minimum funkcji F poszukuje się metodami gradientowymi [2]. W tym celu należy wyznaczyć pochodne funkcje F względem poszukiwanych parametrów składowych wektora h.

Z (11) wynika, że

$$\nabla F_i = \frac{\partial F}{\partial h_i} = 2 \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{M_k} \mu_{kj}(f_{kj} - T_{kj}^{h})\, u_{kj}^{i} , \quad i=\overline{1,N}. \tag{12}$$

W każdym powyższym związku występują nieznane funkcje

$$u_{kj}^{i} = \partial T(x_k, t_{kj} : h)/\partial h_i , \quad k=\overline{1,K}, \quad j=\overline{1,M_k} \quad i=\overline{1,N};$$

do ich wyznaczenia można wykorzystać układ równań (3)-(10). Wprowadzając dla każdego podobszaru $n=\overline{0,N}$ bezwymiarową zmienną

$$y = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{h_n}, & n = \overline{1,N} \\ \dfrac{x}{h_0}, & n = 0 \end{cases} \tag{13}$$

uzyskamy jawną zależność warunków (3)-(10) od szukanych parametrów h_n. Otrzymamy mianowicie

$$h_0^2\ \partial_t T_0 = a_0 (yh_0)^{-m}\ \partial_y\ [(yh_0)^m \partial_y T_0], \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t < t_\infty \tag{14}$$

$$h_n^2\ \partial_t T_n = a_n (yh_n + x_{n-1})^{-m}\ \partial_y\ [(yh_n + x_{n-1})^m \partial_y T_n], \quad 0 < y < 1$$

$$0 < t \leqslant t_\infty, \quad n=\overline{1,N} \tag{15}$$

$$T_0 = T^*, \quad 0 < y < 1, \quad t=0 \tag{16}$$

$$T_n = T_\infty, \quad 0 < y < 1, \quad t=0, \quad n=\overline{1,N}, \tag{17}$$

$$\partial_y T_0 = 0, \quad y=0, \quad 0 \leqslant t < t_\infty, \tag{18}$$

$$-\lambda_N\ \partial_y T_N = h_N \alpha (T_N - T), \quad y=1, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_\infty, \tag{19}$$

$$-h_1 \lambda_0 \partial_y T_0(1, t) = \varphi [T_1(0, t) - T_0(1, t)] = -h_0 \lambda_1 \partial_y T_1(0, t), \tag{20}$$

$$0 \leqslant t \leqslant t_\infty$$

oraz

$$T_n(1, t) = T_{n+1}(0, t)$$

$$-h_{n+1} \lambda_n \partial_y T_n(1, t) = -h_n \lambda_{n+1} \partial_y T_{n+1}(0, t) \tag{21}$$

$$0 \leqslant t \leqslant t_\infty, \quad n=\overline{1,N-1}$$

gdzie $\varphi = h_1 h_0 / R$.

Różniczkując równania (14)-(21) po h_i, $i=\overline{1,N}$, oraz zastępując pochodne $\partial T_n / \partial h_i$ funkcjami U_{ni}, $n=\overline{0,N}$, $i=\overline{1,N}$, otrzymuje się N prostych liniowych zagadnień brzegowych, kolejno dla $i=\overline{1,N}$:

$$h_0^2\ \partial_t U_{0i} = a_0' (\frac{m}{y} \partial_y T_0 + \partial_{yy}^2 T_0)\ U_{0i} + a_0\ (\frac{m}{y} \partial_y U_{0i} + \partial_{yy}^2 U_{0i}), \quad 0 < y < 1$$

$$0 < t \leqslant t_\infty \tag{22}$$

$$2\delta_{ni}h_n\partial_t T_n + h_n^2\partial_t U_{ni} = a_n\left[\frac{m\delta_{ni}x_{n-1}}{(yh_n+x_{n-1})^2}\partial_y T_n + \frac{mh_n}{yh_n+x_{n-1}}\partial_y U_{ni} + \right.$$

$$\left.\partial_{yy}^2 U_{ni}\right], \quad 0<y<1, \quad 0<t\leqslant t_\infty, \quad n=\overline{1,N} \tag{23}$$

$$U_{ni} = 0, \quad 0<y<1, \quad t=0, \quad n=\overline{0,N} \tag{24}$$

$$\partial_y U_{0i} = 0, \quad y=0, \quad 0\leqslant t\leqslant t_\infty, \tag{25}$$

$$-\lambda_N\partial_y U_{Ni} = \delta_{Ni}\alpha(T_N - T) + h_N\alpha' U_{Ni}(T_N - T) + h_N\alpha U_{Ni}, \quad y=1 \quad 0\leqslant t\leqslant t_\infty, \tag{26}$$

$$-\lambda_0\left[\delta_{1i}\partial_y T_0(1,t) + h_1\partial_y U_{0i}(1,t)\right] = \varphi_i\left[T_1(0,t) - T_0(1,t)\right] +$$

$$+\varphi\left[U_{1i}(0,t) - U_{0i}(1,t)\right] = -\lambda_1 h_0\partial_y U_{1i}(0,t), \quad 0\leqslant t\leqslant t_\infty \tag{27}$$

oraz

$$\begin{cases} U_{ni}(1,t) = U_{n+1\,i}(0,t) \\ \lambda_n\left[\delta_{n+1\,i}\partial_y T_n(1,t) + h_{n+1}\partial_y U_{ni}(1,t)\right] = \lambda_{n+1}\left[\delta_{n+1\,i}\partial_y T_{n+1}(0,t) + \right. \\ \left. h_n\partial_y U_{n+1\,i}(0,t)\right], \quad 0\leqslant t\leqslant t_\infty, \quad n=\overline{1,N-1} \end{cases} \tag{28}$$

przy czym $\varphi_i = \partial\varphi/\partial h_i$, δ_{ij} jest symbolem Kroneckera, $a_0' = da_0(t)\,dT$, a $\alpha' = d\alpha(T)/dT$. Jednocześnie nietrudno jest zauważyć, że

$$U_{kj}^i = U_{0i}(\bar{y}_k, t_{kj}), \quad k=\overline{1,K}.\ j=\overline{1,M_k}\ \text{i}\ i=\overline{1,N},$$

gdzie $\bar{y}_k = \bar{x}_k h_0$.

Poszukując minimum funkcji F, np. metodą gradientu prostego, zakłada się początkowe przybliżenie dla składowych wektora h, tzn. $h_i = h_i^{(0)}$, $i=\overline{1,N}$, a kolejne przybliżenie znajduje się zgodnie z wzorem [2]

$$h_i^{(s+1)} = h_i^{(s)} + p_s\nabla F_i^{(s)}, \quad s=0,1,2,\ldots, \tag{29}$$

gdzie s jest numerem iteracji, a parametry p_s są krokami iteracji. Parametry p_s (stałe dodatnie) wybiera się w ten sposób, aby spełniony był warunek

$$E^{(s)} - F^{(s+1)} \geqslant \omega p_s \left\{ [\text{grad } F]^{(s)} \right\}^2, \tag{30}$$

gdzie $F^{(s)}$, $F^{(s+1)}$ i $[\text{grad } F]^{(s)}$ oznaczają wartości funkcji F i jej gradientu w kolejnych iteracjach, a $\omega \in (0,1)$. W praktyce przyjmuje się, że $\omega \in (0,4; 0,5)$.

Proces iteracyjny kończymy, jeżeli

$$|F^{(s+1)} - F^{(s)}| < \varepsilon , \tag{31}$$

gdzie ε jest zadaną dostatecznie małą liczbą.

5. Przykłady obliczeń

Poszczególne etapy procesu obliczeniowego wymagają rozwiązywania nieliniowych zagadnień brzegowych dla układów równań przewodnictwa. Ze względu na brak praktycznie użytecznych formuł analitycznych, rozwiązań poszukiwano numerycznie, wykorzystując znane powszechnie metody przybliżonego rozwiązywania tego typu zagadnień [3, 4].

W celu zbadania skuteczności metody przeprowadzono wiele obliczeń testujących. Część obliczeń prowadzono w ten sposób, że najpierw dla założonych z góry parametrów termofizycznych oraz wymiarów geometrycznych odlewu i warstw formy wyznaczono temperaturę w wybranych punktach kontrolnych $\overline{x}_k$, $k=\overline{1,K}$ odlewu w ustalonych chwilach czasu t_{kj}, $j=\overline{1,M_k}$, a następnie zagadnienie odwrócono zaburzając przy tym celowo niektóre z danych wejściowych.

Obliczenia testujące przeprowadzone na minikomputerze IBM AT pokazały, że znacznie lepsze wyniki uzyskuje się jeżeli ilość informacji wejściowych o przebiegu procesu jest większa, wówczas nawet znaczne zaburzenia w danych wejściowych pozwalają uzyskiwać wartościowe wyniki.

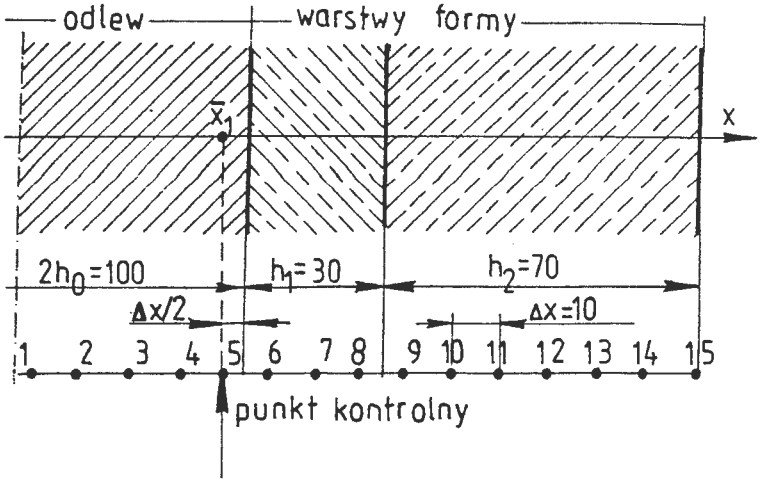
5.1. Przykład 1

Jako jeden z przykładów rozważano odlew staliwny o kształcie płyty i grubości $2h_0 = 0,1$ m odlewany w formie dwuwarstwowej o zróżnicowanych parametrach termofizycznych. Przyjęto, że $T^* = 1540$, $T_L = 1520$, $T_S = 1485$, $T_\infty = 30°C$; $\lambda_0 = 35$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0,4$ w/mK; $c_0 = 820$, $c_1 = 789$, $c_2 = 670$ J/kgK; $\gamma_0 = 7500$, γ_1 2650, $\gamma_2 = 625$ kg/m^3; $\alpha = 200$ w/m^{2}K i że $a_Q(T)$ definiuje się jak w pracy [1], przy czym przyjęto, że ciepło krystalizacji wynosi 264 000 J/kg oraz, że kontakt między odlewem i formą jest idealny. Rozwiązując zagadnienie proste założono ponadto, że $h_1 = 0,03$, a $h_2 = 0,07$ m. Na modelowany obiekt nałożono siatkę różnicową zawierającą 5 węzłów w obszarze odlewu oraz odpowied-

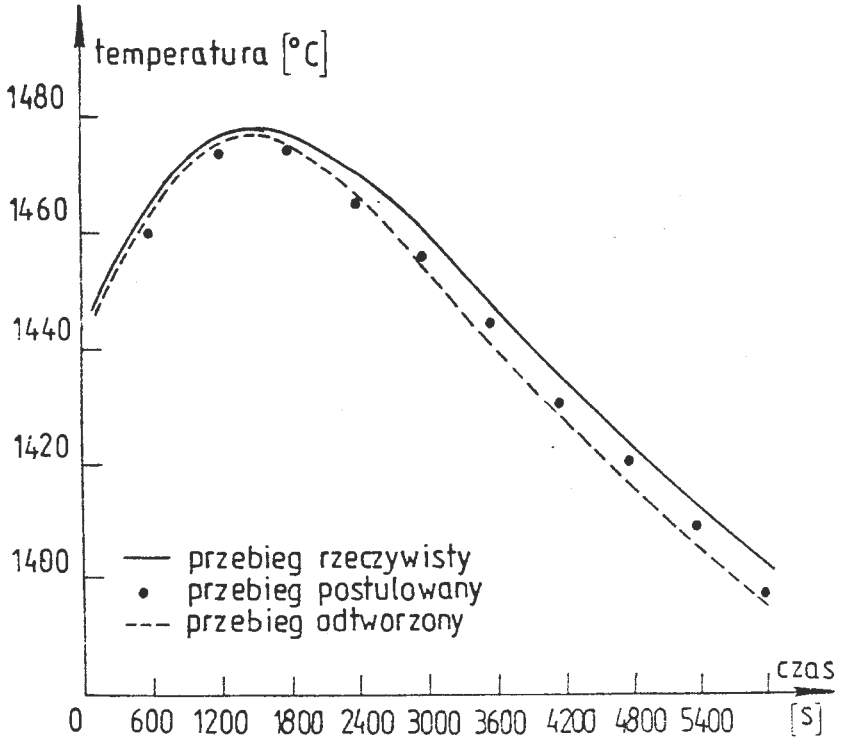
Tabela 1. Rozwiązanie rzeczywiste

Czas	Pole temperatury														
	odlew					forma - 1			forma - 2						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
120	1523	1522	1518	1500	1452	1154	726	466	211	66	35	30	30	30	30
240	1519	1517	1509	1480	1444	1276	1050	843	543	239	101	50	35	31	30
360	1516	1513	1499	1473	1447	1340	1172	1054	773	420	212	105	57	38	32
480	1512	1507	1494	1475	1457	1382	1264	1177	924	568	326	178	97	57	38
600	1507	1503	1492	1478	1464	1410	1322	1254	1026	638	428	255	147	84	48
720	1503	1500	1491	1480	1470	1428	1360	1305	1097	772	515	327	199	116	60
840	1500	1497	1490	1482	1473	1440	1385	1338	1149	842	588	392	249	147	73
960	1497	1495	1489	1482	1476	1448	1402	1362	1187	897	649	449	295	178	86
1080	1495	1493	1489	1483	1477	1454	1414	1378	1215	940	699	498	335	205	98
1200	1493	1492	1488	1483	1478	1458	1422	1390	1237	975	741	539	370	230	108
1320	1492	1491	1487	1483	1479	1460	1429	1399	1254	1004	775	574	400	250	117
1440	1491	1490	1487	1483	1479	1462	1433	1406	1268	1027	804	603	426	268	125
1560	1490	1489	1486	1483	1479	1464	1436	1411	1278	1045	827	628	447	283	132
1680	1489	1488	1486	1482	1479	1465	1439	1414	1287	1061	847	648	465	296	137
1800	1488	1487	1485	1482	1479	1465	1441	1417	1293	1073	863	665	480	307	142
1920	1487	1486	1485	1482	1479	1466	1442	1419	1299	1083	876	679	492	316	146
2040	1486	1486	1483	1481	1478	1466	1443	1421	1303	1092	887	690	502	323	149
2160	1486	1485	1482	1480	1477	1465	1444	1422	1306	1098	895	699	511	329	152
2280	1483	1482	1481	1479	1476	1465	1444	1423	1309	1104	903	707	518	334	154
2400	1479	1478	1477	1476	1474	1463	1443	1423	1311	1108	909	714	524	338	156
2520	1476	1475	1474	1473	1471	1461	1442	1423	1312	1111	913	719	528	342	158
2640	1473	1472	1472	1470	1469	1459	1441	1421	1312	1114	917	723	532	344	159
2760	1470	1470	1469	1468	1466	1457	1439	1420	1312	1115	920	726	535	347	160
2880	1467	1467	1466	1465	1464	1454	1436	1418	1311	1116	922	729	538	348	161

3000	1465	1464	1464	1463	1461	1452	1434	1416	1310	1117	923	731	540	350	161
3120	1462	1462	1461	1460	1458	1449	1432	1414	1309	1117	924	732	541	351	162
3240	1460	1459	1459	1458	1456	1447	1430	1412	1307	1116	924	733	542	352	162
3360	1457	1457	1456	1455	1453	1445	1428	1410	1306	1115	924	733	543	352	162
3480	1455	1454	1454	1453	1451	1442	1425	1407	1304	1115	924	734	543	353	163
3600	1452	1452	1451	1450	1449	1440	1423	1405	1302	1114	924	734	543	353	163
3720	1450	1449	1449	1448	1446	1437	1421	1403	1300	1112	923	733	543	353	163
3840	1447	1447	1446	1445	1444	1435	1418	1401	1299	1111	922	733	543	353	163
3960	1445	1445	1444	1443	1441	1433	1416	1399	1297	1110	921	732	543	353	163
4080	1442	1442	1442	1440	1439	1430	1414	1396	1295	1108	920	732	542	353	163
4200	1440	1440	1439	1438	1437	1428	1411	1394	1293	1107	919	731	542	352	162
4320	1438	1437	1437	1436	1434	1425	1409	1392	1291	1105	918	730	541	352	162
4440	1435	1435	1434	1433	1432	1423	1407	1389	1289	1103	917	729	541	352	162
4560	1433	1433	1432	1431	1429	1421	1404	1387	1287	1102	916	728	540	351	162
4680	1430	1430	1430	1428	1427	1418	1402	1385	1284	1100	914	727	539	351	162
4800	1428	1428	1427	1426	1425	1416	1400	1383	1282	1098	913	726	539	350	162
4920	1426	1425	1425	1424	1422	1414	1398	1380	1280	1097	911	725	538	350	161
5040	1423	1423	1422	1421	1420	1411	1395	1378	1278	1095	910	724	537	349	161
5160	1421	1421	1420	1419	1418	1409	1393	1376	1276	1093	909	723	536	349	161
5280	1419	1418	1418	1417	1415	1407	1391	1373	1274	1091	907	722	535	348	161
5400	1416	1416	1415	1414	1413	1404	1388	1371	1272	1090	906	721	535	348	161
5520	1414	1414	1413	1412	1410	1402	1386	1369	1270	1088	904	720	534	347	160
5640	1412	1411	1411	1410	1408	1400	1384	1367	1268	1086	903	718	533	347	160
5760	1409	1409	1408	1407	1406	1397	1381	1364	1266	1084	901	717	532	346	160
5880	1407	1407	1406	1405	1403	1395	1379	1362	1264	1083	900	716	531	346	160



Rys. 2. Siatka różnicowa

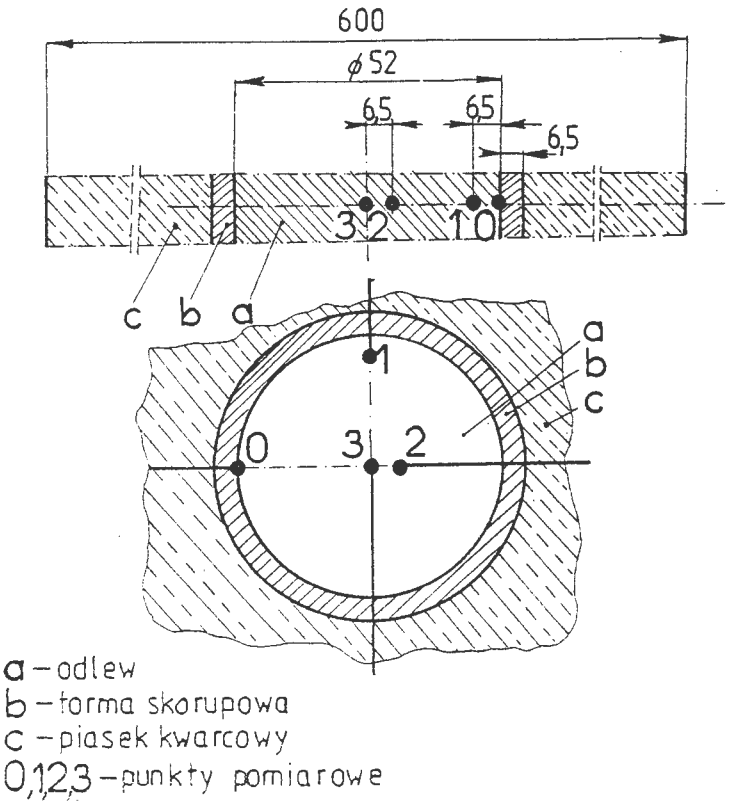


Rys. 3. Przebiegi temperatury w punkcie kontrolnym

nio 3 i 7 węzłów w obszarze warstw formy (rys. 2). Obliczenia numeryczne prowadzono z krokiem czasowym $\Delta t = 5$ s. Wyniki obliczeń zamieszczono w tabeli 1.

Przystępując do rozwiązania zagadnienia odwrotnego, jako informację o przebiegu procesu krzepnięcia wprowadzono uzyskane w rozwiązaniu zagadnienia prostego odpowiednio zaburzone parametry. Założono mianowicie, że punkt kontrolny położony jest w pobliżu powierzchni odlewu i pokrywa się z piątym węzłem siatki różnicowej (patrz rys. 2), oraz że w chwilach czasu $t_{1j} = 600 \cdot j$, $j = \overline{1,10}$, parametry f_{1j} przyjmują wartości: $f_{11} = 1460$, $f_{12} = 1475$, $f_{13} = 1475$ $f_{14} = 1465$, $f_{15} = 1455$, $f_{16} = 1445$, $f_{17} = 1430$, $f_{18} = 1420$, $f_{19} = 1410$, $f_{10} = 1395$°C. Założono ponadto, że grubości warstw formy spełniają warunki $h_1 \geqslant 0{,}01$ i $h_1 + h_2 = 0{,}1$.

Przy powyższych założeniach, przyjmując że $h_1^{(0)} = 0{,}05$ i $h_2^{(0)} = 0{,}05$ m, po przeprowadzonych omawianą w pracy metodą obliczeniach, otrzymano po 73 ite-



Rys. 4. Rzeczywisty układ pomiarowy

racjach, że h_1 = 0031, a h_2 = 0,069 m. Nietrudno zauważyć, że błąd względny, jaki popełniono przy wyznaczeniu h_1 i h_2 jest niewielki i nie przekracza 4%.

Na rysunku 3 porównano przebiegi temperatury w punkcie kontrolnym. Z zestawienia krzywych wynika, że i tu uzyskano zadowalającą zgodność.

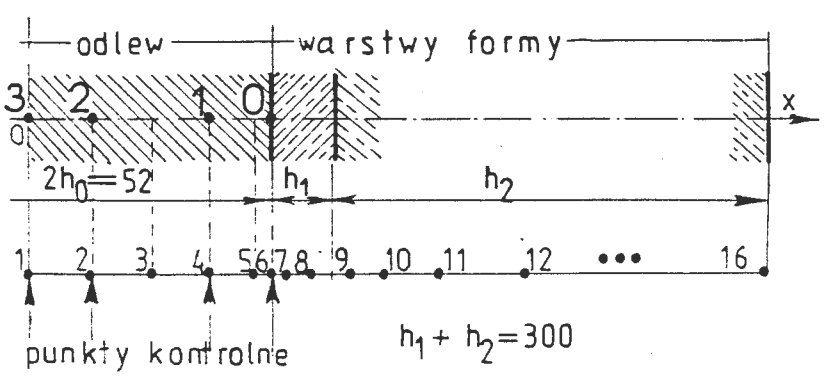
5.2. Przykład 2

Jako dane wejściowe w obliczeniach wykorzystano dane eksperymentalne [5], uzyskane za pomocą oryginalnego minikomputerowego systemu zbierania, rejestracji i przetwarzania danych KBPS 02,09, opracowanego na WSI w Opolu (producent CO BRABiD). Badanym obiektem rzeczywistym był odlew o kształcie walca, wykonany ze stopu ZnAl i krzepnący w formie dwuwarstwowej. Wymiary odlewu i formy oraz położenie punktów kontrolnych przedstawiono na rysunku 4, a uzyskane wyniki pomiarów w tabeli 2.

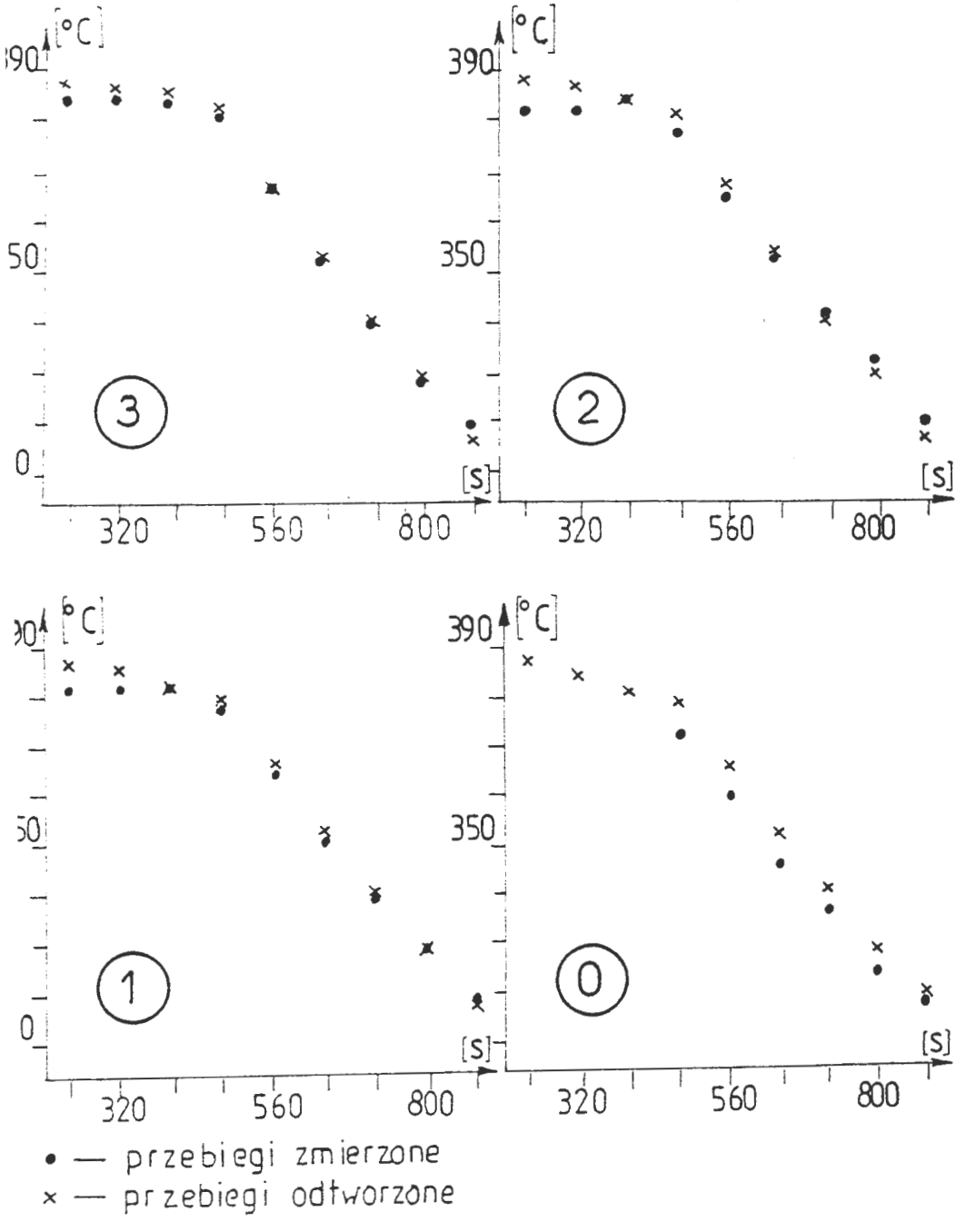
Tabela 2. Wyniki pomiarów

Pomiar	Czas [s]	Temperatura 3	2	1	0
1	240	384	382	382	-
2	320	384	382	382	-
3	400	384	384	384	-
4	480	382	378	378	372
5	560	368	365	365	360
6	640	353	353	351	346
7	720	341	343	339	336
8	800	329	334	329	324
9	880	321	321	319	317

Przedstawione w tabeli wyniki pomiarów wykorzystano jako dane wejściowe przy rozwiązywaniu omawianą metodą zagadnienia odwrotnego, polegającego na wyznaczeniu grubości warstw formy. Skład chemiczny odlewu i materiałów formy determinował parametry termofizyczne, w tym T^* = 450, T_L = 400, T_S = 382, T_∞ = 30°C; λ_0^L = 113 dla fazy ciekłej, λ_0^S = 57 dla ciała stałego, λ_1 = 1,2, λ_2 = 0,35 W/mK i odpo-



Rys. 5. Siatka różnicowa



Rys. 6. Przebiegi temperatury w punktach kontrolnych

wiednio $c_0^L = 523$, $c_0^S = 426$, $c_1 = 700$, $c_2 = 800$ J/kgK; $\gamma_0^L = 654{,}5$, $\gamma_0^S = 698{,}5$, $\gamma_1 = 2500$, $\gamma_2 = 1600$ kg/m^3 oraz Q = 115 540 J/kg.

Na modelowany obiekt nałożono siatkę różnicową zawierającą w obszarze odlewu 6 węzłów oraz odpowiednio 2 i 8 węzłów w obszarach warstw formy, przy czym punkty kontrolne pokrywały się z węzłami o indeksach 1, 2, 4 i 6 (rys. 5).

Założono ponadto, że grubości warstw formy spełniają warunki $h_1 \geqslant 0{,}002$ i $h_1 + h_2 = 0{,}3$. Ze względu na drugi z warunków, proces obliczeniowy sprowadzono do wyznaczenia tylko grubości pierwszej warstwy.

Przy powyższych założeniach, przyjmując, że $h_1^{(0)} = 0{,}01$, po przeprowadzonych omawianą w pracy metodą obliczeniach, otrzymano po 56 iteracjach, że $h_1 = 0{,}0061$ m, a tym samym, że $h_2 = 0{,}2039$ m. Niektóro zauważyć, że błąd względny, jaki popełniono w wyznaczeniu h_1 jest niewielki i nie przekracza 7%. Z zestawienia krzywych temperaturowych w punktach kontrolnych uzyskanych w procesie obliczeniowym z wynikami pomiarów (rys. 6) wynika, że i tu uzyskano zadowalającą zgodność.

6. Podsumowanie

W pracy przedstawiono dogodny do realizacji na EMC algorytm obliczeń polegający na wyznaczeniu dla odlewu o kształcie płyty, walca lub kuli grubości warstw formy wielowarstwowej, zapewniającej możliwie bliski podyktowanemu wymogami technologicznymi przebieg procesu krzepnięcia. Algorytm oparto na rozwiązaniu geometrycznego odwrotnego zagadnienia dla równania przewodnictwa ciepła. Wykorzystano przy tym wrażliwościową metodę optymalizacyjną, co wymagało dołączenia do opisu matematycznego funkcjonału jakości, tzn. kryterium wyboru poszukiwanych parametrów, który minimalizowano. Minimum funkcjonału poszukiwano metodami gradientowymi. Przeprowadzone obliczenia testujące potwierdziły zadowalającą dokładność i skuteczność algorytmu.

Literatura

1. Mochnacki B.: Biul. Pol. Ac. Tech., nr 3-4, 1984, s. 127-138.
2. Ce'a J.: Optimisation Theorie of Algorithms, Dunood, Paris 1971.
3. Mochnacki B.: Archiwum Hutnictwa, t. 28, nr 1, 1983, s. 79-100.
4. Shih Tien-Mo: Numerical Heath Transfer, Henrisphere Publ. Corporation, New York, 1984,
5. Suchy J.: Badania pól temperatury w odlewach, CPBP nr 02, sprawozdanie 02.09.04/88, Warszawa (niepublikowane).

Pracę złożono w marcu 1989