

Radosław GRZYMKOWSKI

PRZYBLIŻONA METODA WYZNACZANIA PARAMETRÓW OPISUJĄCYCH PROCES WYMIANY CIEPŁA NA POWIERZCHNI WLEWKA CIĄGŁEGO

Wstęp

Zastosowanie nowoczesnych technik obliczeniowych do analizy technologii odlewniczej związane jest w pierwszej kolejności ze sformułowaniem poprawnego modelu matematycznego rozważanego procesu, modelu który w sposób możliwie wierny będzie odtwarzał przebieg i cechy charakterystyczne zjawiska fizycznego. Modele te mogą być mniej lub bardziej skomplikowane, przy czym stopień ich złożoności musi być pewnym kompromisem między możliwościami realizacji obliczeń na maszynie cyfrowej a precyzją i dokładnością odtwarzania rzeczywistości za pomocą formuł matematycznych. Obecnie w teorii cieplnej procesów odlewniczych stosuje się modele matematyczne oparte na równaniach fizyki matematycznej opisujących niestacjonarne lub stacjonarne pola takich wielkości, jak temperatura, stężenie itp., w szeroko rozumianym układzie odlew-forma, przy czym równania te dotyczą nieliniowych najczęściej zagadnień prostych lub odwrotnych. Jak pokazano w pracy [1] wykorzystanie w odlewnictwie tzw. zagadnień odwrotnych transportu ciepła stwarza nowe jakościowo możliwości badawcze w sferze teorii i praktyki.

Przykładowo, projektowanie optymalnej technologii wytwarzania wlewka w procesie ciągłego odlewania jest problemem złożonym i wieloetapowym. Jednym z najważniejszych czynników wpływających na jakość wlewka ciągłego i mogących służyć za kryterium oceny projektowanej technologii jest pole temperatury krzepnącego metalu. Technologom i projektantom urządzeń do ciągłego odlewania znane są postulaty dotyczące charakteru rozkładu temperatury. Można zatem sformułować zagadnienie, w którym poszukuje się warunków brzegowych, tj. warunków wy-

miany ciepła na powierzchni wlewka, czyniących zadość ograniczeniom nakładanym na pole temperatury. Zazwyczaj poszukuje się współczynnika wymiany ciepła α [$\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$] lub strumienia ciepła q [W/m^2], ponieważ w literaturze, np. [2-4], można znaleźć proste analityczne lub w postaci wykresu zależności między tymi wielkościami a parametrami, które umożliwiają sterowanie procesem, np. według Müllera i Jaschara [2] współczynnik wymiany ciepła zależy jedynie od jednostkowego natężenia wody chłodzącej \dot{v} [$\text{m}^3/\text{m}^2 \cdot \text{s}$] i prędkości wypływu wody u [m/s].

Zależność ta jest postaci:

$$\alpha = 10u + 1000(107 + 0,688u) \dot{v}, \quad (1)$$

przy czym

$$u \in \langle 11, 32 \rangle, \text{ a } \dot{v} \in \langle 0, 003; 0, 009 \rangle.$$

Wyznaczone w poszczególnych strefach chłodzenia współczynniki wymiany ciepła α lub strumienie ciepła q pozwalają konstruktorom urządzeń do ciągłego odlewania zaprojektować systemy chłodzenia o parametrach zapewniających właściwe chłodzenie wlewków.

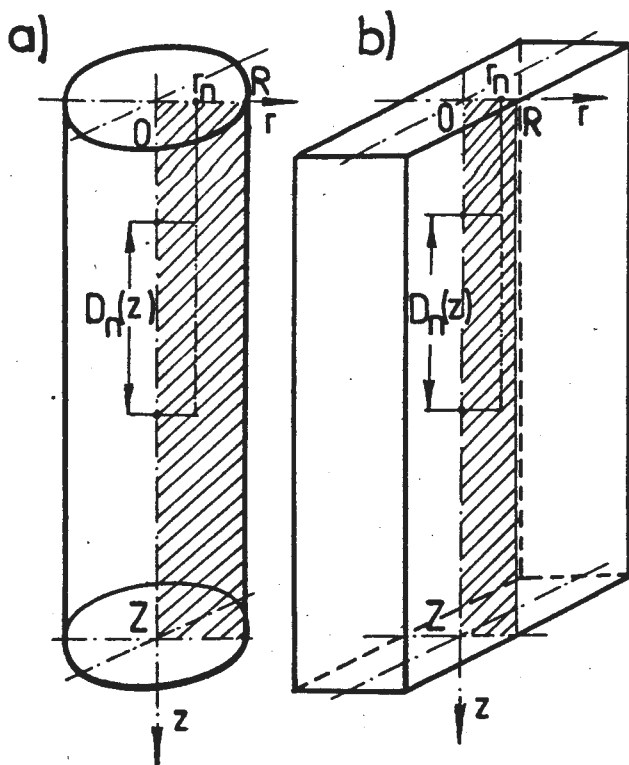
2. Założenia

Rozważa się płaskie i okrągłe wlewki wytwarzane na urządzeniu pionowym do ciągłego odlewania, odlewane ze stałą prędkością $w = \text{const}$. Przyjmuje się, że produkowane wlewki mają grubość lub średnicę równą $2R$ i wytwarzane są z metalu krzepnącego w przedziale temperatur $\langle T_2, T_L \rangle$ (T_S - temperatura solidusu, T_L - temperatura likwidusu), który wlewany do krystalizatora ma temperaturę T^* , $T^* \geq T_L > T_S$. Modelowane wlewki traktuje się jako obiekty dwuwymiarowe, dla których pseudoustalone pole temperatury ze względu na znikomą przewodność ciepła w kierunku wyciągania wlewka [5] można opisać jednowymiarowym parabolicznym równaniem różniczkowym cząstkowym. W równaniu tym jedna ze współrzędnych przestrzennych (zgodna z kierunkiem wyciągania) spełnia rolę czasu.

Orientacja w przestrzeni modelowanego obiektu jak na rysunku 1, powyższe założenia oraz warunek, że znane są przybliżone zmienne przebiegi temperatury $f_n = f_n(z)$ w przemieszczających się wraz z wlewkiem punktach kontrolnych $r = r_n$, $r_n \in \langle 0, R \rangle$, $n = \overline{1, N}$ pozwalają sformułować matematyczny opis zagadnienia w postaci:

$$\partial_z T = r^{-m} [\partial_r (r^m \partial_r T)], \quad 0 < r < R, \quad 0 \leq z < Z; \quad (2)$$

$$T = T^*, \quad z = 0, \quad 0 < r \leq R; \quad (3)$$



Rys. 1. Modelowane obiekty: a) wlewek okrągły, b) wlewek płaski

$$\partial_r T = 0, \quad r = 0, \quad 0 < z < Z; \quad (4)$$

$$T(r_n, z) = f_n(z), \quad z \in D_n(z) \subset (0, Z), \quad n = \overline{1, N} \quad (5)$$

gdzie r i z oznaczają współrzędne przestrzenne, $T = T(r, z)$ jest temperaturą, indeks m określa geometrię wlewka ($m=0$ wlewek płaski, $m=1$ wlewek okrągły), Z oznacza całkowitą długość drogi chłodzenia podzielonej na K stref odpowiadających odcinkom $\langle z_{k-1}, z_k \rangle$, $k = \overline{1, K}$ (przy czym $z_0 = 0$, $z_K = Z$), a $D_n(z)$ oznacza dziedzinę funkcji $f_n(z)$. Natomiast występująca w równaniu (2) funkcja $\phi = \phi(T)$, dla skrócenia zapisu, oznacza

$$\phi = \frac{\lambda}{w \gamma \kappa},$$

gdzie λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła, γ gęstością masy, a $\kappa = \kappa(T)$ zastępczą pojemnością cieplną [6] uwzględniającą ciepło przemiany fazowej.

Podane przebiegi temperatury, jak już wspomniano wcześniej, wynikać mogą z wymogów technologicznych, pomiarów lub innych uwarunkowań nakładanych na modelowany obiekt. Funkcje f_n zadawane są zazwyczaj w postaci tabeli wartości (dziedzina i przeciwdziedzina są zbiorami liczb), w postaci wykresu lub wzorem w postaci jawnej.

Z założeń i opisu matematycznego wynika, że nieznanne są interesujące nas warunki wymiany ciepła na powierzchni wlewka $r=R$. Okazuje się, że taka ilość informacji pozwala wyznaczyć pole temperatury w całym przekroju wlewka oraz odtworzyć brakujący warunek brzegowy w jednej z postaci

$$-\lambda \partial_r T = \alpha(T - T_\infty), \quad r=R, \quad 0 < z \leq Z \quad (6a)$$

lub

$$-\lambda \partial_r T = q, \quad r=R, \quad 0 < z \leq Z, \quad (6b)$$

tnz. wyznaczyć takie $\alpha = \alpha(z)$ lub $q = q(z)$, jakie powinny być zadane, aby uzyskać możliwie bliskie postulowanym przebiegi temperatury w punktach kontrolnych $r=r_n$, $n=1, N$.

W ostatnim równaniu T_∞ oznacza temperaturę otoczenia.

3. Metoda rozwiązywania

Konstrukcje systemów chłodzenia w urządzeniach do ciągłego odlewania pozwalają założyć, że w poszczególnych strefach chłodzenia współczynniki wymiany ciepła lub strumienie ciepła są stałe i wynoszą odpowiednio α_k lub q_k , $k=1, K$, tzn. że

$$\alpha = \alpha(z) = \sum_{k=1}^K [m(z - z_{k-1}) - m(z - z_k)] \alpha_k \quad (7a)$$

lub

$$q = q(z) = \sum_{k=1}^K [m(z - z_{k-1}) - m(z - z_k)] q_k \quad (7b)$$

gdzie

$$m(\xi) = \begin{cases} 0 & , \quad \xi \leq 0 \\ 1 & , \quad \xi > 0 \end{cases}$$

Przy powyższym założeniu postawione zadanie można rozwiązać na kilka sposobów. Dobrą dokładność i efektywność algorytmu uzyskuje się przez wykorzystanie metod optymalizacyjnych. Należy wówczas do opisu matematycznego dołączyć funkcjo-

nał jakości, tzn. kryterium wyboru nieznanymi parametrów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$ składowych wektora α lub q_1, q_2, \dots, q_K składowych wektora q :

$$F = F(\alpha) = \sum_{n=1}^N c_n \int_{D_n(z)} [f_n(z) - T(r_n, z; \alpha)]^2 dz \xrightarrow{\alpha} \min, \quad (8a)$$

bądź

$$F = F(q) = \sum_{n=1}^N c_n \int_{D_n(z)} [f_n(z) - T(r_n, z; q)]^2 dz \xrightarrow{q} \min, \quad (8b)$$

który minimalizujemy.

Wyżej

$$T(r_n, z; \alpha) = T_n^\alpha \quad \text{i} \quad T(r_n, z; q) = T_n^q$$

oznaczają odpowiednie rozwiązania zagadnień brzegowych opisanych związkami (2)-(4) i jednym z warunków (6). Stałe c_n natomiast są to parametry wagowe determinujące wiarygodność informacji.

Minimum funkcjonału (8) poszukuje się metodami gradientowymi (patrz np. [7]). W tym celu należy wyznaczyć pochodne funkcjonału względem poszukiwanych parametrów

$$\nabla F_k^\alpha = \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} = 2 \sum_{n=1}^N c_n \int_{D_n(z)} [f_n - T_n^\alpha] \frac{\partial T_n^\alpha}{\partial \alpha_k} dz, \quad k = \overline{1, K} \quad (9a)$$

$$\nabla F_k^q = \frac{\partial F}{\partial q_k} = 2 \sum_{n=1}^N c_n \int_{D_n(z)} [f_n - T_n^q] \frac{\partial T_n^q}{\partial q_k}, \quad k = \overline{1, K}. \quad (9b)$$

W równaniach (9) występuje po K nieznanymi funkcji

$$\partial T^\alpha / \partial \alpha_k = H_k^\alpha, \quad k = \overline{1, K}$$

w równaniach (9a) i

$$\partial T^q / \partial q_k = H_k^q, \quad k = \overline{1, K}$$

odpowiednio w równaniach (9b). Do ich wyznaczenia wykorzystuje się układ równań (2)-(4) z właściwym warunkiem (6). Różniczkując równania (2)-(4) i (6) po α_k (lub odpowiednio po q_k) otrzymuje się K prostych zagadnień brzegowych kolejno dla $k = \overline{1, K}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z H_k^\alpha = \phi r^{-m} [\partial_r (r^m \partial_r H_k^\alpha)] + \phi' r^{-m} [\partial_r (r^m \partial_r T^\alpha)] H_k^\alpha, \quad 0 < r < R \quad 0 < z \leq Z \\ H_k^\alpha = 0, \quad z=0, \quad 0 \leq r < R \\ \partial_r H_k^\alpha = 0, \quad r=0 \quad 0 < z < Z \\ -\lambda \partial_r H_k^\alpha = \alpha H_k^\alpha + (T^\alpha - T_\infty) [m(z - z_{k-1})^{-m}(z - z_k)], \quad r=R \quad 0 < z < Z \end{array} \right. \quad (10a)$$

lub

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z H_k^q = \phi r^{-m} [\partial_r (r^m \partial_r H_k^q)] + \phi' r^{-m} [\partial_r (r^m \partial_r T^q)] H_k^q, \quad 0 < r < R, \quad 0 < z < Z \\ H_k^q = 0, \quad z = 0 \quad 0 < r < R \\ \partial_r H_k^q = 0, \quad r=0, \quad 0 < z < Z \\ -\lambda \partial_r H_k^q = m(z - z_{k-1})^{-m}(z - z_k), \quad r=R, \quad 0 < z < Z \end{array} \right. \quad (10b)$$

gdzie $\phi' = d\phi/dT$.

Poszukując minimum funkcjonału, np. metodą gradientu prostego, zakłada się początkowe przybliżenie dla składowych wektora parametrów $\alpha_k^{(0)}$ lub $q_k^{(0)}$, $k=\overline{1, K}$, a kolejne przybliżenia znajduje się zgodnie z wzorem

$$\alpha_k^{(s+1)} = \alpha_k^{(s)} - p_\alpha^{(s)} [\nabla F_k^\alpha]^{(s)}, \quad k=\overline{1, K}, \quad s=0, 1, \dots \quad (11a)$$

lub

$$q_k^{(s+1)} = q_k^{(s)} - p_q^{(s)} [\nabla F_k^q]^{(s)}, \quad k=\overline{1, K}, \quad s=0, 1, \dots, \quad (11b)$$

gdzie s jest numerem iteracji, a $p_\alpha^{(s)}$ i $p_q^{(s)}$ są krokami iteracji. Parametry $p_\alpha^{(s)}$ i $p_q^{(s)}$ wybiera się w ten sposób, aby spełniony był warunek

$$F^{(s)} - F^{(s+1)} \geq \omega p_s \{[\text{grad } F]^{(s)}\}^2, \quad (12)$$

gdzie $F^{(s)}$, $F^{(s+1)}$ i $[\text{grad } F]^{(s)}$ oznaczają wartości funkcjonałów i gradientu w kolejnych iteracjach, a $\omega \in (0, 1)$.

Proces iteracyjny kończymy, jeżeli

$$[F^{(s+1)} - F^{(s)}] \leq \delta, \quad (13)$$

gdzie δ jest zadaną dostatecznie małą liczbą.

Wybór początkowego przybliżenia dla składowych wektora parametrów $\alpha_k^{(0)}$ i $q_k^{(0)}$, $k=\overline{1, K}$, ma istotny wpływ na liczbę iteracji i czas obliczeń. Dlatego też w praktycznej realizacji procesu obliczeniowego wybór przybliżenia początkowego nie był przypadkowy, a polegał na tym, że poszukiwano go, i to oddzielnie, dla każdej ze składowych, poczynając od $k=1$ kolejno aż do $k=K$. Wykorzystano w tym celu tę samą opisaną wyżej metodę optymalizacyjną, ale zawężoną tylko do obszaru odpowiadającego jednej strefie chłodzenia. W tym przypadku układ równań odpowiadający układowi (2)-(5) odniesiony do strefy o numerze k będzie miał postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z T = \phi r^{-m} [\partial_r (r^m \partial_r T)], \quad 0 < r < R, \quad z_{k-1} < z < z_k \\ T = T^{k-1}, \quad z = z_{k-1}, \quad 0 \leq r \leq R \\ \partial_r T = 0, \quad r = 0, \quad z_{k-1} < z < z_k \\ T(r_n, z) \cong f_n^k(z), \quad z \in D_n^k(z) \subset (z_{k-1}, z_k), \quad n=\overline{1, N} \end{array} \right. \quad (14)$$

gdzie $T^{k-1} = T(r, z_{k-1})$, przy czym $T^0 = T^*$, a pozostaje T^{k-1} , $k > 1$, wynikają z uzyskiwanych kolejno rozwiązań; $D_n^k(z)$ oznacza dziedzinę funkcji $f_n(z)$ odniesioną do przedziału (z_{k-1}, z_k) .

To samo dotyczy i warunków (6) - mamy teraz

$$-\lambda \partial_r T = \alpha_k (T - T_\infty), \quad r=R, \quad z_{k-1} < z \leq z_k \quad (15a)$$

lub

$$-\lambda \partial_r T = q_k, \quad r=R, \quad z_{k-1} < z \leq z_k. \quad (15b)$$

Jednocześnie w miejsce funkcjonałów (8) będziemy mieli funkcjonały:

$$F = F(\alpha_k) = \sum_{n=1}^N c_n \int_{D_n^k(z)} [f_n(z) - T(r_n, z; \alpha_k)]^2 dz \xrightarrow{\alpha_k} \min \quad (16a)$$

$$F = F(q_k) = \sum_{n=1}^N c_n \int_{D_n^k(z)} [f_n(z) - T(r_n, z; q_k)]^2 dz \xrightarrow{q_k} \min, \quad (16b)$$

gdzie

$$T(r_n, z; \alpha_k) = T_{k,n}^\alpha \quad \text{i} \quad T(r_n, z; q_k) = T_{k,n}^q$$

oznaczają odpowiednie rozwiązania zagadnienia brzegowego (14)-(15).

Niewielkiej modyfikacji ulegną również i formuły na pochodne funkcjonału

$$\nabla F_k^\alpha = 2 \sum_{n=1}^N \dot{c}_n \int_{D_n^k(z)} (f_n - T_{k,n}^\alpha) \frac{\partial T_{k,n}^\alpha}{\partial \alpha_k} dz \quad (17a)$$

lub

$$\nabla F_k^q = 2 \sum_{n=1}^N c_n \int_{D_n^k(z)} (f_n - T_{k,n}^q) \frac{\partial T_{k,n}^q}{\partial q_k} dz \quad (17b)$$

oraz układy równań opisujące występujące w (17) funkcje $\partial T_k^\alpha / \partial \alpha_k = H_k^\alpha$ i $\partial T_k^q / \partial q_k = H_k^q$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z H_k^\alpha = \phi r^{-m} [\partial_r (r^m \partial_r H_k^\alpha)] + \phi' r^{-m} [\partial_r (r^m \partial_r T_k^\alpha)] H_k^\alpha, \quad 0 < r < R, \\ \hspace{20em} z_{k-1} < z \leq z_k \\ H_k^\alpha = 0, \quad z = z_{k-1}, \quad 0 \leq r \leq R \\ \partial_r H_k^\alpha = 0, \quad r = 0, \quad z_{k-1} < z \leq z_k \\ -\lambda \partial_r H_k^\alpha = \alpha_k H_k^\alpha + (T_k^\alpha - T_\infty), \quad r=R, \quad z_{k-1} < z \leq z_k \end{array} \right. \quad (18a)$$

lub

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z H_k^q = \phi r^{-m} [\partial_r (r^m \partial_r H_k^q)] + \phi' r^{-m} [\partial_r (r^m \partial_r T_k^q)] H_k^q, \quad 0 < r < R \\ \hspace{20em} z_{k-1} < z \leq z_k \\ H_k^q = 0, \quad z = z_{k-1}, \quad 0 \leq r \leq R \\ \partial_r H_k^q = 0, \quad r=0 \quad z_{k-1} < z \leq z_k \\ -\lambda \partial_r H_k^q = 1, \quad r=R, \quad z_{k-1} < z \leq z_k \end{array} \right. \quad (18b)$$

Całe dalsze postępowanie jest analogiczne jak w przypadku globalnym, a wyznaczona strefa po strefie $\bar{\alpha}_k$ lub \bar{q}_k , $k=\overline{1, K}$, minimalizujących odpowiedni dla danej strefy funkcjonal (16), brano jako początkowe przybliżenie dla składowych wektora parametrów, kładąc $\alpha_k^{(0)} = \bar{\alpha}_k$ lub odpowiednio $q_k^{(0)} = \bar{q}_k$.

4. Model numeryczny

Do rozwiązywania występujących w procesie iteracyjnym zagadnień brzegowych można wykorzystać jedną ze znanych metod numerycznych rozwiązywania nieliniowych równań przewodnictwa [8]. W pracy wykorzystano metodę różnicową. Istotą tej metody jest aproksymacja równania różniczkowego i warunków brzegowych odpowiadającymi im równaniami różnicowymi, co sprowadza problem do układu równań algebraicznych (tzw. układ rozwiązujący).

Na modelowany obszar nakłada się równomierną siatkę różnicową $\Omega_{I,J}$ o liczbie węzłów $(I+1) \cdot (J+1)$ i krokach $\Delta r = R/I$ oraz $\Delta z = Z/J$, tzn.

$$\Omega_{I,J} = \{r_i : r_i = i\Delta r, \quad i=\overline{0,I}\} \times \{z_j : z_j = j\Delta z, \quad j=\overline{0,J}\}.$$

Równania różnicowe wyprowadzono na podstawie niejawniej gwiazdy czteropunktowej zgodnie z zasadami podanymi w pracy [10]. Przykładowo dla układu (2)-(4) i (6b), tzn. gdy poszukiwać będziemy strumienia ciepła q , otrzymuje się J układów nieliniowych równań algebraicznych, kolejno dla $j=\overline{0,J-1}$, postaci:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(1 + \frac{2(m+1)\phi_{0j}^e \Delta z}{\Delta r^2}\right) T_{0,j+1}^e + \frac{2(m+1)\phi_{0j}^e \Delta z}{\Delta r^2} T_{1,j+1}^e = T_{0j} \\ & - \frac{\phi_{ij}^e \Delta z}{\Delta r^2} \left(\frac{2i-1}{2i}\right)^m T_{i-1,j+1}^e + \left(1 + \frac{2\phi_{ij}^e \Delta z}{\Delta r^2}\right) T_{i,j+1}^e + \\ & + \frac{\phi_{ij}^e \Delta z}{\Delta r^2} \left(\frac{2i+1}{2i}\right)^m T_{i+1,j+1}^e = T_{ij}, \quad i=\overline{1,I-1} \\ & - \frac{2\phi_{Ij}^e \Delta z}{\Delta r^2} \left(\frac{2I-1}{2I}\right)^m T_{I-1,j+1}^e + \left[\frac{2\phi_{Ij}^e}{\Delta r^2} \left(\frac{2I-1}{2I}\right)^m + \left(\frac{4I-1}{4I}\right)^m\right] T_{I,j+1}^e = \\ & = \left(\frac{4I-1}{4I}\right)^m T_{Ij} + \frac{2\Delta z}{\alpha_{Ij}} q_{j+1} \end{aligned} \right. \quad (19)$$

który rozwiązuje się iteracyjnie przy pomocy algorytmu Thomasa [11]. W ostatnich równaniach e jest numerem iteracji

$$T_{ij}^e = T(i\Delta r, j\Delta z), \quad \phi_{ij}^e = \phi(\bar{T}_{ij}^e),$$

podobnie

$$\alpha_{ij}^e = \alpha(\bar{T}_{ij}^e)$$

dla $i=\overline{0,I}$ i $j=\overline{0,J}$, przy czym

$$\bar{T}_{ij}^e = \frac{1}{2} (T_{ij}^0 + T_{ij}^{e-1}), \quad \text{a } q_{i+1} = q[(j+1)\Delta z].$$

Rozpoczynając proces iteracyjny, jako początkowe przybliżenie przyjmuje się, że

$$\tau_{i,j+1}^0 = \tau_{i,j}, \quad i=\overline{0, I}.$$

Proces iteracyjny kończymy jeżeli

$$\| \tau_{i,j+1}^{e-1} - \tau_{i,j+1}^e \| < \varepsilon \quad (20)$$

gdzie ε jest zadaną dostatecznie małą liczbą, a jako wynik końcowy można przyjąć wynik uzyskany w ostatniej iteracji.

Podobne układy równań uzyskamy i dla zagadnień brzegowych (10) oraz tak samo będziemy szukać ich rozwiązań. Przykładowo dla zagadnienia (10b) otrzymamy kolejno dla $j=0, j-1$:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[1 + \frac{2(m+1)\phi_{0,j+1}^* \Delta z}{\Delta r^2} - \frac{2(m+1)\chi_{0,j+1} \Delta z}{\Delta r^2} (\tau_{1,j+1} - \tau_{0,j+1} + \right. \\ & \left. - \frac{2(m+1)\phi_{0,j+1} \Delta z}{\Delta r^2} H_{1,j+1} = H_{0j} \right. \\ & \left. \frac{\phi_{i,j+1} \Delta z}{\Delta r^2} \left(\frac{2i-1}{2i}\right)^m H_{i-1,j+1} + \left\{ 1 + \frac{2\phi_{i,j+1}^* \Delta z}{\Delta r^2} - \frac{\chi_{i,j+1}^*}{r^2} \right. \right. \\ & \left. \left. \left[\left(\frac{2i-1}{2i}\right)^m \tau_{i-1,j+1} - 2\tau_{i,j+1} + \left(\frac{2i+1}{2i}\right)^m \tau_{i+1,j+1} \right] \right\} H_{ij} - \frac{\phi_{i,j+1}^* \Delta z}{\Delta r^2} \right. \\ & \left. \left(\frac{2i+1}{2i}\right)^m H_{i+1,j+1} = H_{ij}, \quad i=\overline{1, I-1} \right. \\ & \left. - \frac{2\phi_{I,j+1}^* \Delta z}{\Delta r^2} \left(\frac{2I-1}{2I}\right)^m H_{I-1,j+1} + \left[\frac{\chi_{I,j+1}^* \Delta z}{\Delta r^2} + \left(\frac{4I-1}{4I}\right)^m \right] \right. \\ & \left. H_{I,j+1} = \left(\frac{4I-1}{4I}\right)^m H_{Ij} + \frac{2\Delta z}{\chi_{I,j+1}^*} \gamma_{I,j+1} \right. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

gdzie

$$H_{ij} = H_k^q(i\Delta r, j\Delta z), \quad \phi_{i,j+1}^* = \phi(\tau_{i,j+1}),$$

$$\chi_{i,j+1}^* = \chi(\tau_{i,j+1}) \quad \chi_{i,j+1}' = \phi'(\tau_{i,j+1}) \text{ dla } i=\overline{0, I}, \quad j=\overline{0, J-1}$$

oraz

$\eta_{j+1} = m(j\Delta z - z_{k-1}) - m(j\Delta z - z_k)$, $j=\overline{0, J-1}$, a pozostałe parametry mają takie samo znaczenie jak w układach równań (19).

Dyskretyzację funkcjonau (16) przeprowadza się zazwyczaj na tej samej siatce różnicowej i zadanie to jest proste, jeżeli węzły siatki pokrywają się z położeniem zdyskretyzowanych punktów kontrolnych, tzn. gdy dla każdego $n=\overline{1, N}$ istnieją $p_n \in \{i; i=\overline{0, I}\}$ takie, że $p_n \Delta r = r_n$ i jednocześnie istnieją takie $l \in l_n \subset \{j; j=\overline{0, J}\}$, że $l\Delta z \in D_n(z)$. Wtedy można przyjąć, że

$$F_{\Omega} = \Delta z \sum_{n=1}^N c_n \sum_{l \in l_n} (f_{nl} - T_{p_n l})^2 \quad (22)$$

oraz

$$\nabla F_{k\Omega}^q = 2 \Delta z \sum_{n=1}^N c_n \sum_{l \in l_n} (f_{nl} - T_{p_n l}) H_{p_n l}, \quad k=\overline{1, K}. \quad (23)$$

gdzie

$$f_{nl} = f_n(l \Delta z), \quad a \quad T_{p_n l} = T(p_n \Delta r, l \Delta z).$$

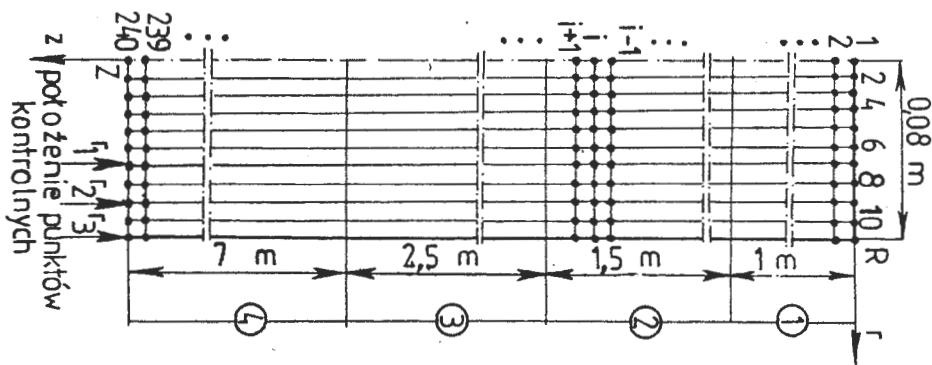
Zadanie komplikuje się, gdy położenie zdyskretyzowanych punktów kontrolnych nie pokrywa się z węzłami przyjętej siatki równomiernej. Wówczas do wyboru mamy dwie drogi. Pierwsza polega na zmianie siatki, tj. przejściu z siatki równomiernej na siatkę o zmiennych krokach. Natomiast w drugim przypadku występujące w związkach (22) i (23) $T_{p_n l}$ i $H_{p_n l}$ wyznacza się drogą interpolacji na podstawie wartości funkcji siatkowych w węzłach sąsiadujących z danym węzłem kontrolnym.

Podobne równania rozwiązujące otrzymujemy również dla lokalnych zagadnień (14)-(18) i drugiego zagadnienia globalnego (2)-(4) z warunkiem (6a), tj. gdy poszukiwać będziemy współczynnika wymiany ciepła:

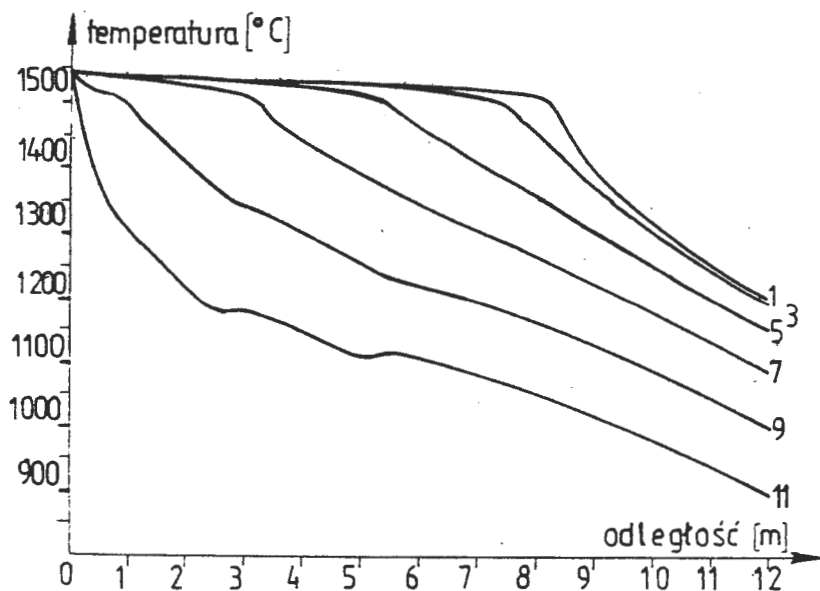
5. Przykład

Ilustracją uzyskanych rozwiązań mogą być rozwiązania jakie uzyskano dla wlewka okrągłego. Przyjęto, że wlewki o średnicy $2R = 0,16$ m odlewany z prędkością $w=1$ m/min wykonany jest ze stali miękkiej. Parametry termofizyczne dobrano na podstawie danych [9].

Rozważaną drogę chłodzenia wlewka Z podzielono na cztery sektory o długościach: I - 1 (krystalizator); II - 1,5; III - 2,5; IV - 7 m, oraz przyjęto, że temperatura zalewania wynosi $T^* = 1540^\circ\text{C}$. Ponadto założono, że na modelowa-



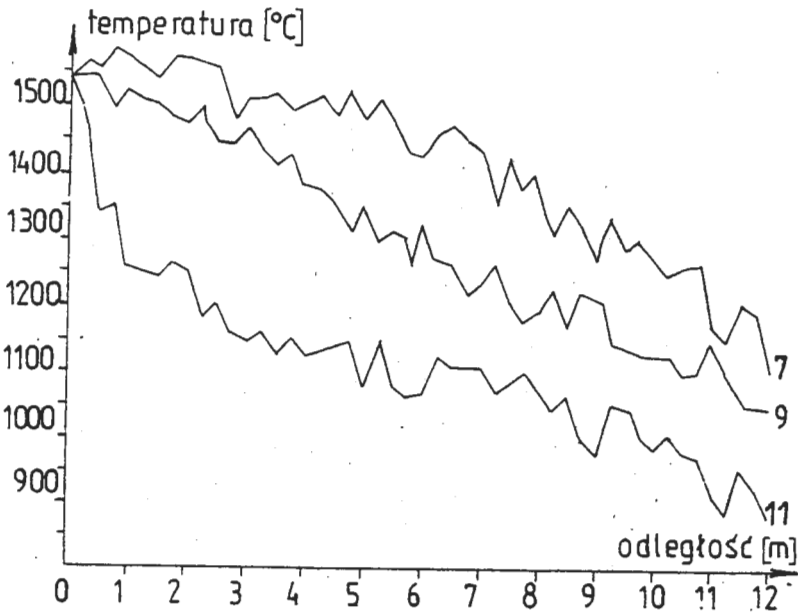
Rys. 2. Siatka różnicowa. Położenie punktów kontrolnych



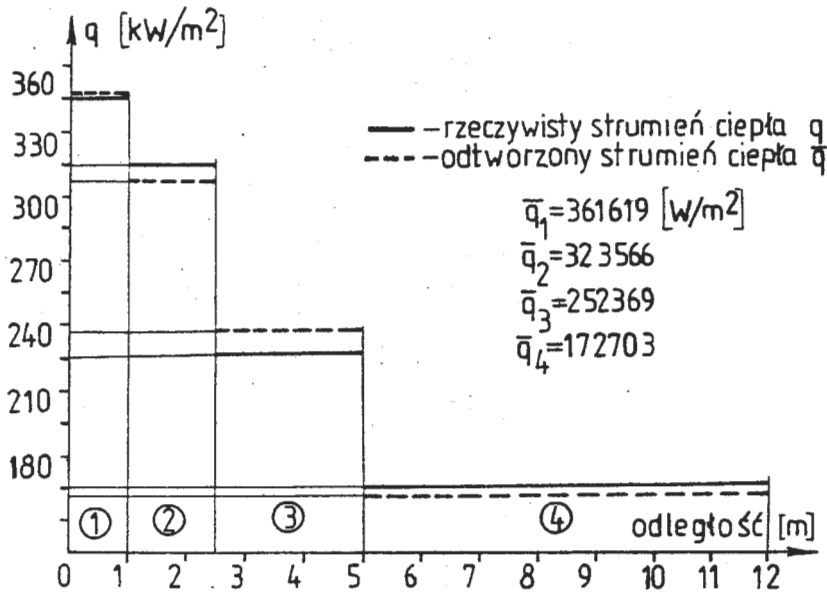
Rys. 3. Rozwiązanie zagadnienia prostego

ny obszar nałożona została siatka różnicowa zawierająca 11 węzłów na promieniu wlewka oraz 240 węzłów w kierunku przesuwu wlewka (rys. 2).

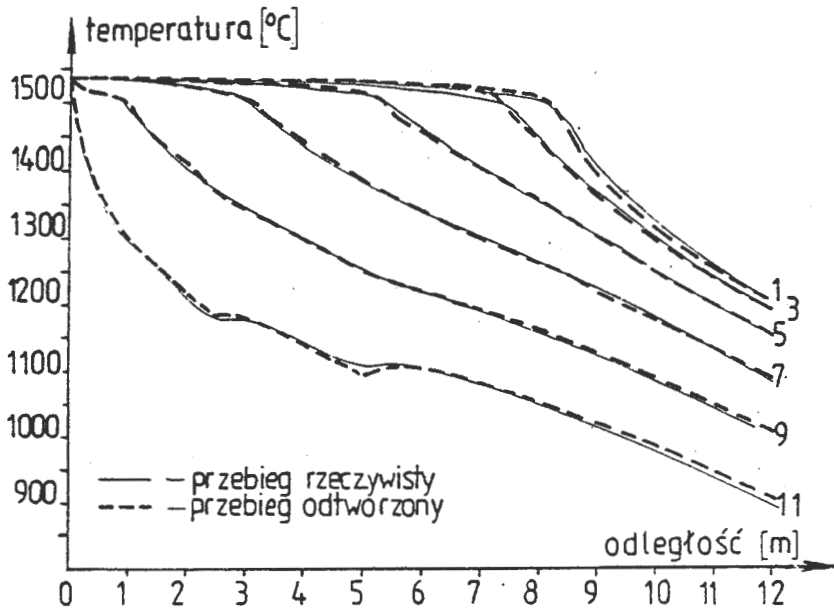
Przyjęte wyżej założenia wykorzystano w ten sposób, że najpierw rozwiązano proste zagadnienia brzegowe dla ustalonych wartości strumienia ciepła, które wynosiły odpowiednio: I - 360 000, II - 330 000, III - 240 000, IV - 180 000 W/m^2 , a uzyskane tym sposobem pole temperatury (rys. 3) wykorzystano przy konstruowaniu postulowanych przebiegów temperatury w punktach kontrolnych dla zagadnienia odwrotnego (rys. 4). Uzyskane wyniki przedstawiono na rysunkach 5 i 6.



Rys. 4. Postulowane przebiegi temperatury w punktach kontrolnych



Rys. 5. Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego - strumień ciepła



Rys. 6. Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego - przebiegi temperatury

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że mimo znacznych zakłóceń przy wprowadzaniu danych wejściowych (w zamieszczonym przykładzie przebiegi temperatury zaburzone losowo w punktach kontrolnych do $\pm 50^\circ\text{C}$ odtworzone wartości strumienia ciepła różnią się nieznacznie od założonych (rys. 5). Błąd nie przekracza 5%. Wygładzone zostało również pole temperatury, a różnica temperatur w punktach kontrolnych była znacznie mniejsza od umyślnie wprowadzonych zakłóceń (rys. 6).

6. Podsumowanie

W pracy przedstawiono dogodny do realizacji na EMC algorytm rekonstrukcji warunków brzegowych dla krzepnącego wlewka odlewane go sposobem ciągłym. W modelu wykorzystuje się informację o przybliżonych przebiegach temperatury w ustalonych przemieszczających się wraz z wlewkiem punktach kontrolnych. Dowolność w wyborze położenia punktów kontrolnych i dziedzin funkcji f_n stwarza dodatkową możliwość wykorzystania algorytmu do rekonstrukcji warunków brzegowych również i na podstawie znajomości przybliżonego położenia frontu krzepnięcia.

Prezentowany algorytm oparto na rozwiązaniu odwrotnego nieliniowego zagadnienia brzegowego dla równania przewodnictwa uzyskanego wrażliwością metodą optymalizacyjną.

Rozwiązanie wyżej przedstawionego zagadnienia pozwala dla z góry ustalonych przybliżonych przebiegów temperatury w punktach kontrolnych lub przybliżonego położenia frontu krzepnięcia wyznaczyć warunki chłodzenia na powierzchni wlewka. Wyznaczone na podstawie modelu realne strumienie ciepła lub współczynniki wymiany ciepła mogą być wykorzystane przy konstruowaniu urządzeń do ciągłego odlewania.

Literatura

1. Grzymkowski R., Mochnacki B.: Bull. Pol. Ac. i Tech., t. 34, nr 9-10, 1986, s. 531-546.
2. Müller H., Jeschar R.: Arch. Eisenhutten, t. 44, nr 8, 1973, s. 589-594.
3. Alberny R., Perroy A.: Rev. Metall., t. 75, nr 6, 1978, s. 353-362.
4. Samojlovitz J.A.: Izv. AN SSSR: Metally, nr 3, 1974, s. 124-130.
5. Tichonow A.N.: DAN SSSR, t. 151, nr 3, 1963, s. 501-504.
6. Mochnacki B.: Bull. Pol. Ac. i Techn., t. 32, nr 3-4, 1984, s. 127-143.
7. Cea J.: Optimisation Theorie of Algorithms, Dunod, Paris 1971.
8. Mochnacki B.: Arch. Hutn., t. 28, nr 1, 1983, s. 79-100.
9. Larrecq M., Saquez C.: Rev. Metall., t. 4, nr 6, 1978, s. 337-352.
10. Grzymkowski R., Mochnacki B.: Krzepnięcie Metali i Stopów, Ossolineum, t. 2, 1980, s. 69-100.
11. Rosenberg D.V.: Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations, American Elsevir Publishing Company, Now York 1969.

Pracę złożono w marcu 1989