Dorota GAWROŃSKA
Politechnika Śląska
Wydział Organizacji i Zarządzania
Instytut Ekonomii i Informatyki

ANALIZA WYBORU PROJEKTU INWESTYCYJNEGO NA PODSTAWIE WSKAŹNIKA EFEKTYWNOŚCI *NPV* ORAZ *IRR* W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

Streszczenie. W artykule omówiono możliwości oceny projektów inwestycyjnych na podstawie wskaźników *NPV* oraz *IRR*, z uwzględnieniem niepewności informacyjnej dotyczącej przepływów finansowych oraz kosztu kapitału. Opisano również metodę wyboru optymalnego projektu inwestycyjnego na podstawie oceny łącznej z wybranych dwóch wskaźników oceny efektywności.

Słowa kluczowe: projekt inwestycyjny, analiza finansowa, niepewność informacyjna, opłacalność inwestycji, zbiory rozmyte, liczby rozmyte

THE ANALYSIS OF CHOICE INVESTMENT PROJECT ON THE BASE OF INDEX *NPV* AND *IRR* IN CIRCUMSTANCES OF THE UNCERTAINTY

Summary. The article discusses the possibility of evaluating investment projects based on *NPV* and *IRR* indicators, taking into account the uncertainty of information on cash flow and cost of capital. Describes the method of choosing the best investment project on the basis of a total of some two indicators to measure effectiveness.

Keywords: investment project, financial analysis, the investment-uncertainty, the profitability of the investment, the fuzzy sets, the fuzzy number

1. Wstęp

Analiza efektywności projektów inwestycyjnych ma za zadanie wskazanie jak najlepsze rozwiązanie spośród proponowanych, w sytuacji kiedy nie są jeszcze dokładnie znane wszystkie potrzebne do podjęcia decyzji parametry finansowe (np. wartości stóp procentowych w czasie trwania inwestycji czy przyszłe wpływy pieniężne). Do oceny rezultatów planowanych inwestycji stosuje się obecnie dyskontowane wskaźniki efektywności takie jak: czysty dochód, wewnętrzną stopę zwrotu, okres zwrotu, rentowność projektu, które charakteryzują zależności pomiędzy przepływami finansowymi, jakie ta inwestycja może przynieść.

W trakcie wyboru projektu pojawić się może problem niezgodności wskazań wskaźników efektywności co do optymalności poszczególnych wariantów inwestycyjnych. Skłania to do odpowiedniego sformułowania i agregacji kryteriów oceny projektu inwestycyjnego. Kryteriów (wskaźników) może być wiele i na ogół niektóre z nich mają dużo większy wpływ na końcową ocenę niż inne.

2. Modelowanie ocen projektów oraz ważności wskaźników za pomocą zmiennych rozmytych o przyjętej funkcji przynależności

Część stosowanych metod bazuje na założeniu, że wartości ocen projektów względem kryteriów optymalizacji są ściśle określone, mają charakter deterministyczny. W praktyce to założenie nie zawsze jest prawdziwe. Często informacje o ocenach z założenia mają charakter przybliżony, nieostry i niepełny. Możliwość wykorzystania innej postaci ocen niż deterministyczną daje teoria zbiorów rozmytych. Dodatkowo, uwzględniając ważność poszczególnych wskaźników, bazować można na metodzie ważonych kryteriów (*Weighted Objectives Metod* – WOM). Metoda ta polega na sprowadzeniu optymalizacji wielokryterialnej do jednokryterialnej przez wprowadzenie kryterium zastępczego, będącego sumą ważoną kryteriów (metoda Baasa-Kwakernaka).[1]

Ocenianie wskaźników oraz ich ważności powinno mieć charakter jak najbardziej naturalny. Nie gwarantuje nam tego metoda Saaty'ego, gdzie eksperci zmuszeni są dokonywać oceny na podstawie z góry określonej skali ocen, przez co nie mogą oni wyrazić oceny czysto subiektywnej (brak uwzględnienia niepewności oraz wątpliwości co do ocen ze skali). Dodatkowo pojawić może się problem braku rozmytości w ocenach w przypadku zgodnych ocen ekspertów (ocena rozmyta jest wynikiem rozbieżności w ocenach ekspertów). Aby ominąć te problemy, można zastąpić deterministyczne oceny eksperta – ocenami

[1] Kacprzyk J.: Zbiory rozmyte w analizie systemowej. PWN, Warszawa 1986.

rozmytymi, czyli ekspert swoją ocenę może wyrazić w formie przedziału wartości z możliwością uwzględnienia wartości najbardziej zbliżonej do oczekiwanej.

Chcąc uwzględnić niepewność co do oceny projektu względem danego wskaźnika oraz jego ważności zakłada się, że ważności wskaźników *V* oraz oceny projektów *O* względem tych wskaźników zostaną przedstawione w postaci liczb rozmytych. Jako reprezentację liczb rozmytych w niniejszym artykule przyjmuje się liczbę typu *LR*, która upraszcza znacznie wykonywanie operacji na liczbach (operacje na liczbach rozmytych typu *LR* to operacje na trzech poniżej opisanych parametrach).

Reprezentacja *LR* jest charakteryzowana przez trzy parametry m ,α ,β, co zapisuje się jako $A = (m, \alpha, \beta)$.

Parametr m jest liczbą rzeczywistą zwaną wartością średnią $\mu_A(m)=1$), a α, β są odpowiednio „rozrzutem" lewostronnym i prawostronnym (*left and right spreads*), a L i R to funkcje odniesienia (*reference function, shape function*). Funkcja przynależności liczby typu *LR* jest określona następująco:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & dla \quad x < m \\ 1 & dla \quad x = m \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & dla \quad x > m \end{cases} . \tag{1}$$

Funkcje L oraz R mogą przyjmować różną postać[2] ze względu jednak na fakt określania ocen w formie przedziałów wyrażających niepewność ($[m-\alpha,m]$ oraz $[m,m+\beta]$), w niniejszej pracy przyjmuje się następującą ich postać:

$$L(x)=R(x)=\begin{cases} 0 & dla \quad x<m-\alpha \\ 1-|x|^p & dla \quad m-\alpha \le x \le m+\beta \quad p>0. \\ 0 & dla \quad x>m+\beta \end{cases} \tag{2}$$

Parametr p określa sposób zmiany wartości liczby w przedziałach ($[m-\alpha,m]$ oraz $[m,m+\beta]$): dla liniowej zmiany parametr $p=1$, dla nieliniowej zmiany $p\neq 1$.

Projekty inwestycyjne oceniane są m. in. na podstawie dyskontowanych wskaźników efektywności, które opisują zależności pomiędzy przepływami finansowymi, jakie ta inwestycja może przynieść. W klasycznym podejściu obliczenie parametrów finansowych inwestycji rzeczowych bazuje na wartościach ostrych i pewnych. Niedoskonałością powyższych wskaźników finansowych jest bazowanie na stałej wartości kosztu kapitału w kolejnych etapach inwestycji oraz przyjęciu dyskretnych wartości przepływów finansowych. Wydaje się zasadne uwzględnienie niepełnej informacji co do wartości

[2] Rutkowski L.: Metody i techniki sztucznej inteligencji. PWN, Warszawa 2009.

przepływów finansowych i kosztu kapitału w kolejnych okresach trwania inwestycji, tym bardziej że inwestycje są zazwyczaj planowane na długi okres czasu.

W przedstawianym algorytmie zakłada się uwzględnienie niepewności dotyczącej określenia ważności wskaźników oraz zaufania do ekspertów. Proponowanym rozwiązaniem jest przedstawienie zmiennych, określających te wartości jako liczby rozmyte. Podobnie w przypadku kosztu kapitału oraz przepływów pieniężnych zakłada się uwzględnienie niepełnej informacji przez przyjęcie zmiennych, określających koszt kapitału oraz przepływy pieniężne w postaci liczb rozmytych. Pomijanie nieprecyzyjnej informacji ograniczałoby skuteczność i efektywność różnych metod planowania, modelowania, prognozowania itp.

Na wstępie inwestor określa zbiór rozpatrywanych wariantów decyzyjnych (projektów inwestycyjnych) oraz określa kryteria (wskaźniki), na podstawie których warianty decyzyjne będą oceniane. Każdy z ekspertów dokona oceny przepływów finansowych, na podstawie których zostaną określone wartości dynamicznych wskaźników efektywności. Na podstawie uzyskanych ocen zostaną określone wartości wskaźników *NPV* oraz *IRR*. Na podstawie ocen zaufania do ekspertów zostaną określone oceny łączne rozpatrywanych projektów inwestycyjnych. Największa wartość oceny łącznej wskaże rozwiązanie optymalne, czyli projekt najbardziej efektywny oparty na przyjętej strukturze kryteriów.

W dalszej analizie zakładamy, że przy określaniu ocen bierze udział Q ekspertów, którzy oceniają N projektów inwestycyjnych. Zadaniem jest znalezienie takiego projektu inwestycyjnego, dla którego zostanie osiągnięte maksimum oceny łącznej. Zostaje określony też zbiór badanych projektów P:

$$P = \{P_1, P_2, ..., P_i, ..., P_N\} \qquad i = 1, ..., N \tag{3}$$

oraz zbiór ekspertów E:

$$E = \{E_1, E_2, ..., E_j, ..., E_Q\} \qquad j = 1, ..., Q \tag{4}$$

2.1. Ocena ważności wskaźników (kryteriów)

Ważność wskaźników (określana przez każdego eksperta) dana jest w postaci liczby rozmytej typu *LR*: V_{kj} (k-kryterium, j-ekspert), określonej charakterystyczną trójką $(m_{V_{kj}}, \alpha_{V_{kj}}, \beta_{V_{kj}})$, gdzie $\alpha_{V_{kj}}, \beta_{V_{kj}} > 0$ to ustalone rozrzuty lewo- i prawostronne (przedział określony przez ekspertów, określający niepewność co do precyzji tego określenia), $m_{V_{kj}}$ to ustalona wartość – najbardziej oczekiwana przez j-eksperta bądź średnia liczona zgodnie ze wzorem (5)), zaś L i R to ustalone funkcje bazowe (6). Ekspert, dokonując oceny ważności wskaźników, traktuje ją jako „około v_{kj}^{mod}”, przy czym swoją niepewność co do precyzyjnego określenia wyraża w postaci przedziału $[v_{kj}^{\min}, v_{kj}^{\max}]$.

$$v_{kj}^{\mathrm{mod}} = \frac{v_{kj}^{\min} + v_{kj}^{\max}}{2} \tag{5}$$

$$L(v_{kj}) = R(v_{kj}) = \begin{cases} 0 \quad dla \quad v_{kj} < m_{V_{kj}} - \alpha_{V_{kj}} \\ 1 - \left|v_{kj}\right|^{p} \quad dla \quad m_{V_{kj}} + \beta_{V_{kj}} \geq v_{kj} \geq m_{V_{kj}} - \alpha_{V_{kj}}, \quad p > 0 \\ 0 \quad dla \quad v_{kj} > m_{V_{kj}} + \beta_{V_{kj}} \end{cases} \tag{6}$$

Funkcja przynależności ważności kryterium $\mu_{V_{kj}}(v_{kj})$ jest określona następująco:

$$\mu_{V_{kj}}(v_{kj}) == \begin{cases} L\left(\dfrac{m_{V_{kj}} - v_{kj}}{\alpha_{V_{kj}}}\right) \quad dla \quad m_{V_{kj}} > v_{kj} \\ 1 \quad dla \quad m_{V_{kj}} = v_{kj} \\ R\left(\dfrac{v_{kj} - m_{V_{kj}}}{\beta_{V_{kj}}}\right) \quad dla \quad m_{V_{kj}} < v_{kj} \end{cases} \tag{7}$$

Ocena ważności kryterium jest traktowana jako subiektywny stopień spełnienia pewnego stanu idealnego w świetle ocen ważności kryteriów. W tym celu należy dokonać normowania współrzędnych charakterystycznych funkcji przynależności według wzoru:

$$\hat{\alpha}_{V_{kj}} = \frac{\alpha_{V_{kj}}}{\max v_{kj}^{\max}} \tag{8}$$

$$\hat{m}_{V_{kj}} = \frac{m_{V_{kj}}}{\max \ v_{kj}^{\max}} \tag{9}$$

$$\hat{\beta}_{V_{kj}} = \frac{\beta_{V_{kj}}}{\max \ v_{kj}^{\max}} \tag{10}$$

gdzie $\max v_{kj}^{\max}$ to największa wartość ważności kryterium spośród wartości określonych przez ekspertów. Po dokonaniu normowania, zmienne $\hat{\alpha}_{V_{kj}}$, $\hat{m}_{V_{kj}}$, $\hat{\beta}_{V_{kj}}$ stają się nowymi zmiennymi $m_{V_{kj}}, \alpha_{V_{kj}}, \beta_{V_{kj}}$.

Zakłada się, że ważności kryteriów są określone na przedziale [0,1], co jest związane z warunkiem, że suma wag kryteriów wyrażona przez danego eksperta musi wynosić 1. Ponieważ mamy do czynienia z liczbami rozmytymi, przed sprawdzeniem wspomnianego warunku należy dokonać defuzyfikacji liczby rozmytej V_{kj}, gdzie k określa kryterium ($k = 1$ określa wskaźnik *NPV*, a $k = 2$ wskaźnik *IRR*). Spośród wielu metod najbardziej wiarygodna w tym zagadnieniu jest metoda środka ciężkości, przypisująca funkcji przynależności liczbę rzeczywistą, określającą współrzędną środka ciężkości pola pod wykresem funkcji. Stosując metodę środka ciężkości, obliczamy środek ciężkości dla każdej liczby V_{kj} (wartość rzeczywistą $V_j(k)$ ważności k-tego kryterium)[3]:

$$V_j(k) = \frac{\int_0^1 v_{kj} \cdot \mu_{V_{kj}}(v_{kj}) \cdot dv_{kj}}{\int_0^1 \mu_{V_{kj}}(v_{kj}) \cdot dv_{kj}}, \tag{11}$$

a następnie sprawdzamy warunek

$$\sum_{k=1}^{2} V_j(k) = 1. \tag{12}$$

Analogicznie, chcąc uwzględnić zaufanie do poszczególnych ekspertów, można przyjąć zmienną V_{Ej}, która jest opisana za pomocą liczby rozmytej typu LR o trzech parametrach $(m_{V_{Ej}}, \alpha_{V_{Ej}}, \beta_{V_{Ej}})$. Chcąc sprawdzić, czy jest spełniony warunek, że suma zmiennych określających zaufanie do ekspertów wynosi 1, należy w pierwszej kolejności określić wartość rzeczywistą zmiennej V_{Ej}. Wartość rzeczywistą zaufania do j-eksperta V_E(j) otrzymujemy przez defuzyfikację, obliczając środek ciężkości każdej liczby V_{Ej}[4]:

$$V_E(j) = \frac{\int_0^1 v_{Ej} \cdot \mu_{V_{Ej}}(v_{Ej}) \cdot dv_{Ej}}{\int_0^1 \mu_{V_{Ej}}(v_{Ej}) \cdot dv_{Ej}}, \tag{13}$$

a następnie sprawdzamy warunek

$$\sum_{j=1}^{Q} V_E(j) = 1. \tag{14}$$

2.2. Ocena projektu względem poszczególnych wskaźników

W przedstawianym algorytmie zakłada się zmienną wartość stopy dyskontowej w kolejnych okresach trwania inwestycji. W związku z tym należy rozpatrzyć dwa warianty: eksperci określają wielkość ogólnie przepływów finansowych albo wielkości dodatnich (*CIF*) i ujemnych (*COF*) strumieni pieniężnych.

Zakładając pierwszy wariant, kiedy eksperci określają wielkość przepływów finansowych, przyjmuje się, że oceny przepływów finansowych są zmiennymi rozmytymi typu LR. Ocena przepływów pieniężnych CF_{ijt} i-tego projektu przez j- tego eksperta w czasie t jest modelowana za pomocą liczby rozmytej typu LR o następującej funkcji przynależności:

[3] Kacprzyk J.: Wieloetapowe sterowanie rozmyte. WNT, Warszawa 2001.
[4] Ibidem.

$$\mu_{CFijt}(cf_{ijt}) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m_{CFijt} - cf_{ijt}}{\alpha_{Cfijt}}\right) & dla \quad cf_{ijt} < m_{CFijt} \\ 1 \quad dla \quad cf_{ijt} = m_{CFijt} & \\ R\left(\dfrac{cf_{ijt} - m_{CFijt}}{\beta_{CFijt}}\right) & dla \quad cf_{ijt} > m_{CF_{ijt}} \end{cases}, \tag{15}$$

gdzie: CF_{ijt} jest określone charakterystyczną trójką $(m_{CF_{ijt}}, \alpha_{CF_{ijt}}, \beta_{CF_{ijt}})$,

$\alpha_{CF_{ijt}}, \beta_{CF_{ijt}} > 0$ to ustalone rozrzuty lewo- i prawostronne (przedział określony przez eksperta $[cf_{ijt}^{\min}, cf_{ijt}^{\max}]$, wyrażający jego niepewność),

$m_{CF_{ijt}}$ to wartość ustalona przez eksperta jako najbardziej prawdopodobna bądź w przypadku braku jej podania – liczona ze wzoru (16),

L i *R* to ustalone funkcje bazowe (17).

$$cf_{ijt}^{\mathrm{mod}} = \frac{cf_{ijt}^{\min} + cf_{ijt}^{\max}}{2}, \tag{16}$$

$$L(cf_{ijt}) = R(cf_{ijt}) = \begin{cases} 0 \quad dla \quad cf_{ijt} < m_{CF_{ijt}} - \alpha_{CF_{ijt}} \\ 1 - \left|cf_{ijt}\right|^{p} \quad dla \quad m_{CF_{ijt}} + \beta_{CF_{ijt}} \geq cf_{ijt} \geq m_{CF_{ijt}} - \alpha_{CF_{ijt}}, \quad p > 0. \\ 0 \quad dla \quad cf_{ijt} > m_{CF_{ijt}} + \beta_{CF_{ijt}} \end{cases} \tag{17}$$

Biorąc pod uwagę powyższe założenia, można przyjąć, że:

$$cf_{ijt}^{\min} = m_{CF_{jit}} - \alpha_{CF_{ijt}}, \tag{18}$$

$$cf_{ijt}^{\mathrm{mod}} = m_{CF_{ijt}}, \text{ dla symetrycznej funkcji przynależności} \tag{19}$$

$$cf_{ijt}^{\max} = m_{CF_{ijt}} + \beta_{CF_{ijt}}. \tag{20}$$

Rozpatrując drugi wariant, kiedy eksperci określają dodatnie i ujemne strumienie pieniężne, przyjmuje się liczby rozmyte, określające dodatnie strumienie pieniężne (CIF_{ijt}) oraz ujemne strumienie pieniężne (COF_{ijt}). Ocena dodatnich strumieni pieniężnych CIF_{ijt} *i*-tego projektu przez j-tego eksperta w czasie *t* jest modelowana za pomocą liczby rozmytej typu LR o następującej funkcji przynależności:

$$\mu_{CIFijt}(cif_{ijt}) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m_{CIFijt} - cif_{ijt}}{\alpha_{CIFijt}}\right) & dla \quad cif_{ijt} < m_{CIFijt} \\ 1 \quad dla \quad cif_{ijt} = m_{CIFijt} & \\ R\left(\dfrac{cif_{ijt} - m_{CIFijt}}{\beta_{CIFijt}}\right) & dla \quad cif_{ijt} > m_{CIFiijt} \end{cases}, \tag{21}$$

gdzie: CIF_{ijt} jest określone charakterystyczną trójką $(m_{CIF_{ijt}}, \alpha_{CIF_{ijt}}, \beta_{CIF_{ijt}})$,

$\alpha_{CIF_{ijt}}, \beta_{CIF_{ijt}} > 0$ to ustalone rozrzuty lewo- i prawostronne (przedział określony przez eksperta $[cif_{ijt}^{\min}, cif_{ijt}^{\max}]$ wyrażający jego niepewność),

$m_{CIF_{ijt}}$ to wartość ustalona przez eksperta jako najbardziej prawdopodobna, bądź wartość liczona ze wzoru (22) w przypadku niepodania tej wartości przez eksperta,

L i R to ustalone funkcje bazowe (23).

$$cif_{ijt}^{\mathrm{mod}} = \frac{cf_{ijt}^{\min} + cf_{ijt}^{\max}}{2}, \tag{22}$$

$$L(cif_{ijt}) = R(cif_{ijt}) = \begin{cases} 0 \quad dla \quad cif_{ijt} < m_{CIF_{ijt}} - \alpha_{CIF_{ijt}} \\ 1 - \left|cif_{ijt}\right|^p \quad dla \quad m_{CIF_{ijt}} + \beta_{CIF_{ijt}} \geq cif_{ijt} \geq m_{CIF_{ijt}} - \alpha_{CIF_{ijt}} \\ 0 \quad dla \quad cif_{ijt} > m_{CIF_{ijt}} + \beta_{CIF_{ijt}} \end{cases}, p > 0. \tag{23}$$

Biorąc pod uwagę powyższe założenia, można przyjąć, że:

$$cif_{ijt}^{\min} = m_{CIF_{jit}} - \alpha_{CIF_{ijt}}, \tag{24}$$

$$cif_{ijt}^{\mathrm{mod}} = m_{CIF_{ijt}}, \text{ dla symetrycznej funkcji przynależności} \tag{25}$$

$$cif_{ijt}^{\max} = m_{CIF_{ijt}} + \beta_{CIF_{ijt}}. \tag{26}$$

Ocena ujemnych strumieni pieniężnych COF_{ijt} i-tego projektu przez j-tego eksperta w czasie t jest modelowana za pomocą liczby rozmytej typu LR o następującej funkcji przynależności:

$$\mu_{COFijt}(cof_{ijt}) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m_{COFijt} - cof_{ijt}}{\alpha_{COFijt}}\right) & dla \quad cof_{ijt} < m_{COFijt} \\ 1 \quad dla \quad cof_{ijt} = m_{COFijt} & \\ R\left(\dfrac{cof_{ijt} - m_{COFijt}}{\beta_{COFijt}}\right) & dla \quad cof_{ijt} > m_{COFiijt} \end{cases}, \tag{27}$$

gdzie: COF_{ijt} określone jest charakterystyczną trójką $(m_{COF_{ijt}}, \alpha_{COF_{ijt}}, \beta_{COF_{ijt}})$,

$\alpha_{COF_{ijt}}, \beta_{COF_{ijt}} > 0$ to ustalone rozrzuty lewo- i prawostronne (przedział określony przez eksperta $[cof_{ijt}^{\min}, cof_{ijt}^{\max}]$, wyrażający jego niepewność),

$m_{COF_{ijt}}$ to wartość ustalona przez eksperta jako najbardziej prawdopodobna bądź w przypadku braku jej podania liczona ze wzoru (28),

L i *R* to ustalone funkcje bazowe (29).

$$cof_{ijt}^{\mathrm{mod}} = \frac{cof_{ijt}^{\min} + cof_{ijt}^{\max}}{2}, \tag{28}$$

$$L(cof_{ijt}) = R(cof_{ijt}) = \begin{cases} 0 \quad dla \quad cof_{ijt} < m_{COF_{ijt}} - \alpha_{COF_{ijt}} \\ 1 - \left|cof_{ijt}\right|^{p} \quad dla \quad m_{COF_{ijt}} + \beta_{COF_{ijt}} \geq cof_{ijt} \geq m_{COF_{ijt}} - \alpha_{COF_{ijt}} \\ 0 \quad dla \quad cof_{ijt} > m_{COF_{ijt}} + \beta_{COF_{ijt}} \end{cases}, p > 0. \tag{29}$$

Biorąc pod uwagę powyższe założenia, można przyjąć, że:

$$cof_{ijt}^{\min} = m_{COF_{jit}} - \alpha_{COF_{ijt}}, \tag{30}$$

$$cof_{ijt}^{\mathrm{mod}} = m_{COF_{ijt}}, \text{ dla symetrycznej funkcji przynależności} \tag{31}$$

$$cof_{ijt}^{\max} = m_{COF_{ijt}} + \beta_{COF_{ijt}}. \tag{32}$$

Ocena kosztu kapitału D_{ijt_z} *i*-tego projektu *j*-tego eksperta w czasie t_z jest modelowana za pomocą liczby rozmytej typu *LR* o następującej funkcji przynależności:

$$\mu_{D_{ijt_z}}(d_{ijt}) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m_{D_{ijt_z}} - d_{ijt}}{\alpha_{D_{ijt_z}}}\right) & dla \quad d_{ijt} < m_{D_{ijt_z}} \\ 1 \quad dla \quad d_{ijt} = m_{D_{ijt_z}} & \\ R\left(\dfrac{d_{ijt} - m_{D_{ijt_z}}}{\beta_{D_{ijt_z}}}\right) & dla \quad d_{ijt} > m_{D_{ijt_z}} \end{cases}, \tag{33}$$

gdzie: D_{ijt_z} jest określone charakterystyczną trójką $(m_{D_{ijt_z}}, \alpha_{D_{ijt_z}}, \beta_{D_{ijt_z}})$,

$\alpha_{D_{ijt_z}}, \beta_{D_{ijt_z}} > 0$ to ustalone rozrzuty lewo- i prawostronne (określone przez eksperta jako wyraz niepewności $[d_{ijt_z}^{\min}, d_{ijt_z}^{\max}]$),

$m_{D_{ijt_z}}$ to wartość ustalona przez eksperta jako najbardziej prawdopodobna bądź liczona ze wzoru (34),

L i R to ustalone funkcje bazowe (35).

$$d_{ijt_z}^{\mathrm{mod}} = \frac{d_{ijt_z}^{\min} + d_{ijt_z}^{\max}}{2}, \tag{34}$$

$$L(d_{ijt}) = R(d_{ijt}) = \begin{cases} 0 & dla \quad d_{ijt} < m_{D_{ijt_z}} - \alpha_{D_{ijt_z}} \\ 1 - \left|d_{ijt}\right|^p & dla \quad m_{D_{ijt_z}} + \beta_{D_{ijt_z}} \geq d_{ijt} \geq m_{D_{ijt_z}} - \alpha_{D_{ijt_z}}, \quad p > 0. \\ 0 & dla \quad d_{ijt} > m_{D_{ijt_z}} + \beta_{D_{ijt_z}} \end{cases} \tag{35}$$

Zważywszy na przyjęte założenia odnośnie do przedziału wartości podanej przez eksperta, otrzymujemy:

$$d_{ijt}^{\min} = m_{D_{ijt_z}} - \alpha_{D_{ijt_z}}, \tag{36}$$

$$d_{ijt}^{\mathrm{mod}} = m_{D_{ijt_z}}, \quad \text{dla symetrycznej funkcji przynależności} \tag{37}$$

$$d_{ijt}^{\max} = m_{D_{ijt_z}} + \beta_{D_{ijt_z}}. \tag{38}$$

2.2.1. Wskaźnik NPV

Wartość zaktualizowana (bieżąca) netto NPV (*Net Present Value*) danego przedsięwzięcia jest określona jako wartość otrzymana przez zdyskontowanie oddzielnie przepływów finansowych dla każdego roku przez cały okres trwania inwestycji, przy określonym stałym poziomie stopy dyskontowej. Różnica ta jest zdyskontowana na moment, w którym jest przewidziane rozpoczęcie przedsięwzięcia. Obliczenia dokonuje się według następującej reguły:[5]

$$NPV = \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+d)^t}, \tag{39}$$

lub

$$NPV = \sum_{t=1}^{T} \frac{CIF_t - COF_t}{(1+d)^t}, \tag{40}$$

[5] Janc A.: Metody oceny przedsięwzięć inwestycyjnych w procesie planowania. PWN, Warszawa-Poznań 1990.

gdzie:

d – stopa dyskontowa,

T – czas trwania przedsięwzięcia inwestycyjnego,

CF_t – przepływy pieniężne związane z daną produkcją (włącznie z nakładami),

CIF_t – dodatnie strumienie gotówki (dochody) (CIF – *Cash Inflow*),

COF_t – ujemne strumienie gotówki (nakłady inwestycyjne) (COF – *Cash Outflow*).

Kryterium NPV umożliwia ocenę projektu i podjęcie właściwej decyzji. I tak[6]:

- jeżeli $NPV > 0$, to projekt może być realizowany,
- jeżeli $NPV < 0$, to nie powinno się go realizować,
- jeżeli $NPV = 0$, to decyzję o ewentualnej jego realizacji powinno podjąć się na podstawie innych informacji.

Na podstawie określonych wielkości strumieni pieniężnych czy ogólnie przepływów pieniężnych dla każdego eksperta wyznacza się oceny rozmyte typu LR projektów inwestycyjnych $NPV_{ij}(m_{NPV_{ij}}, \alpha_{NPV_{ij}}, \beta_{NPV_{ij}})$, zgodnie ze wzorem:

a) dla określonych przepływów pieniężnych

$$NPV_{ij} = \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_{ijt}}{\prod_{t_z=1}^{t} \left(1 + D_{ijt_z}\right)}, \tag{41}$$

b) dla określonych dodatnich i ujemnych strumieni pieniężnych

$$NPV_{ij} = \sum_{t=1}^{T} \frac{CIF_{ijt} - COF_{ijt}}{\prod_{t_z=1}^{t} \left(1 + D_{ijt_z}\right)}. \tag{42}$$

W zależności od określonej funkcji L oraz R dla przepływów finansowych COF_{ijt}, CIF_{ijt}, CF_{ijt} i D_{ijt_z}, które tworzą liczbę rozmytą NPV_{ij}, funkcję przynależności oceny NPV_{ij} określamy następująco:

a) dla $p = 1$

Do określenia funkcji przynależności wartości wskaźnika NPV_{ij} należy wyznaczyć parametry $(m_{NPV_{ij}}, \alpha_{NPV_{ij}}, \beta_{NPV_{ij}})$. Zakładając wartość parametru $p = 1$ dla funkcji L oraz R można przyjąć w przybliżeniu trójkątną funkcję przynależności $\mu_{NPV_{ij}}(npv_{ij})$:

[6] Pluta W., Jajuga T.: Inwestycje. Capital budgeting – budżetowanie kapitałowe. Fundacja Rozwoju Rachunkowości w Polsce, Warszawa 1995.

$$\mu_{NPV_{ij}}(n_{ij}) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m_{NPV_{ij}} - npv_{ij}}{\alpha_{NPV_{ij}}}\right) & dla \quad npv_{ij} < m_{NPV_{ij}} \\ 1 \quad dla \quad npv_{ij} = m_{NPV_{ij}} & \\ R\left(\dfrac{npv_{ij} - m_{NPV_{ij}}}{\beta_{NPV_{ij}}}\right) & dla \quad npv_{ij} > m_{NPV_{ij}} \end{cases}. \tag{43}$$

Funkcje L i R można wtedy zapisać w następujący sposób:

$$L(npv_{ij}) = R(npv_{ij}) = \begin{cases} 0 \quad dla \quad npv_{ij} < m_{NPV_{ij}} - \alpha_{NPV_{ij}} \\ 1 - |npv_{ij}| \quad dla \quad m_{NPV_{ij}} + \beta_{NPV_{ij}} \geq npv_{ij} \geq m_{NPV_{ij}} - \alpha_{NPV_{ij}} \\ 0 \quad dla \quad npv_{ij} > m_{NPV_{ij}} + \beta_{NPV_{ij}} \end{cases}. \tag{44}$$

Dla dokładnego określenia funkcji przynależności niezbędne jest jednak skorzystanie z poziomej reprezentacji liczb rozmytych.

b) Dla $p > 0, p \neq 1$

Chcąc określić funkcję przynależności wartości wskaźnika NPV_{ij}, można posłużyć się poziomą reprezentacją zbioru rozmytego. W tym celu należy dokonać podziału liczb rozmytych COF_{ijt}, CIF_{ijt}, CF_{ijt} i D_{ijt_z} na α-przekroje.

Pojęcie α-przekrojów znajduje zastosowanie ze względu na to, że ułatwia identyfikację funkcji przynależności. Na podstawie odpowiedniej ilości α-przekrojów można odtworzyć z żądaną dokładnością funkcje przynależności zbioru rozmytego[7]. Znając przynależność elementów rozważań do poszczególnych α-przekrojów, możemy określić przybliżoną funkcję przynależności zbioru rozmytego A. Pozioma reprezentacja zbioru rozmytego może służyć do opisu liczb rozmytych o dowolnie skomplikowanych kształtach.[8] Dokładność obliczeń można zwiększyć zwiększając liczbę α – przekrojów.

Zbiorem poziomu α (α – *level set*) lub α-przekrojem zbioru A (α – *cut*) nazywamy zbiór określony przez funkcję charakterystyczną:

$$\chi_{A\alpha} = \begin{cases} 1 \quad dla \quad \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 \quad dla \quad \mu_A(x) < \alpha \end{cases}. \tag{45}$$

Dokonując przekrojów, można w dalszej kolejności przeprowadzić obliczenia na wartościach z granic przedziałów. W ten sposób otrzymamy wartości funkcji przynależności $\mu_{NPV_{ij}}(npv_{ij})$ liczby NPV_{ij}.

[7] Piech H.: Wnioskowanie na bazie strategii rozmytych. WNT, Częstochowa 2005.

[8] Wang G., Liu Q., Yao Y.: Rough set, fuzzy sets, data mining and granular computing. Springer Verlaq New York, New York 2003.

Dla określenia wartości wskaźnika *NPV* dla poszczególnych projektów można wyznaczyć ważoną ocenę wskaźnika, uwzględniającą zaufanie do poszczególnych ekspertów. Wartość wskaźnika NPV liczymy ze wzoru:

$$NPV_i = \frac{\sum_{j=1}^{Q} V_{Ej} \cdot NPV_{ij}}{\sum_{j=1}^{Q} V_{Ej}}. \tag{46}$$

W dalszej kolejności należy wyostrzyć oceny rozmyte wskaźnika NPV_i. Przy wykorzystaniu zaproponowanej metody środka ciężkości otrzymuje się rzeczywistą wartość wskaźnika $NPV(i)$. Aby określić najbardziej efektywny projekt na podstawie wskaźnika *NPV*, należy poszukiwać rozwiązania, dla którego wartość oceny wskaźnika *NPV* jest maksymalna:

$$NPV(i) \to MAX. \tag{47}$$

Wyznaczona w ten sposób wartość *NPV* wskazuje na optymalny projekt ze względu na wskaźnik *NPV*.

Aby uwzględnić wartość wskaźnika *NPV* w ocenie łącznej razem ze wskaźnikiem *IRR*, należy dokonać unormowania wartości wskaźnika *NPV*, zgodnie z następującym wzorem:

$$NPV_j(i) = \frac{NPV_{ij}}{\max(NPV_{ij})} \tag{48}$$

gdzie $\max(NPV_{ij})$ to największa wartość wskaźnika *NPV*.

2.2.2. Wskaźnik IRR

Wewnętrzna stopa zwrotu jest to stopa, dla której aktualna wartość dochodów generowanych przez produkcję jest równa nakładom początkowym koniecznym do rozpoczęcia tej produkcji, czyli dla której $NPV = 0$. Jest więc to stopa dyskontowa równoważąca wartość bieżącą nakładów związanych z jego realizacją. Wartość wskaźnika IRR wyznacza się z następującego wzoru[9]:

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+d)^t} = 0, \tag{49}$$

gdzie CF_t – przepływy pieniężne związane z danym projektem.

Obliczona z powyższego wzoru wartość d jest szukaną wartością *IRR*. W metodzie IRR ocena efektywności przedsięwzięcia sprowadza się do porównania wewnętrznej stopy zwrotu z żądaną stopą zwrotu lub kosztem kapitału CC. Jeśli ponadto zachodzi poniższy warunek:

[9] Wrzosek F.: Ocena efektywności rzeczowych inwestycji przedsiębiorstw. Sygma, Wrocław 1994.

$$IRR > CC, \tag{50}$$

to ocena przedsięwzięcia jest pozytywna.

Wewnętrzna stopa zwrotu to stopa, dla której wartość dochodów generowanych przez produkcję jest równa nakładom, czyli jest to stopa, dla której wskaźnik $NPV = 0$. Zakładając zmienną w czasie wartość przepływów pieniężnych, przyjmuje się następującą formułę określania wartości wskaźnika *IRR*:

a) dla określonych ogólnie przepływów pieniężnych:

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{{}_{SC}CF_{ijt}}{\left(1 + IRR_{ij}\right)^{t}} = 0, \tag{51}$$

b) dla określonych dodatnich i ujemnych strumieni pieniężnych:

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{{}_{SC}(CIF_{ijt} - COF_{ijt})}{\left(1 + IRR_{ij}\right)^{t}} = 0, \tag{52}$$

gdzie :

${}_{SC}CF_{ijt}$ – środek ciężkości z liczby rozmytej określającej przepływy pieniężne określone przez j-eksperta dla i-projektu przypadające na okres t,

${}_{SC}(CIF_{ijt} - COF_{ijt})$ – środek ciężkości z różnicy dwóch liczb rozmytych odpowiednio dodatnich i ujemnych strumieni pieniężnych,

IRR_{ij} – rzeczywista wartość stopy dyskontowej określonej dla *i*-projektu na podstawie wartości przepływów pieniężnych określonych przez *j*-eksperta i przypadającej na okres *t*.

Ponieważ projekt jest określony jako efektywny, jeśli różnica między wewnętrzną stopą zwrotu IRR_{ij} i żądaną stopą zwrotu $ŻSZ_i$ (określoną przez inwestora) jest dodatnia. W tym celu dla każdego projektu wyznacza się różnicę $IRR_{ij} - ŻSZ_I$. Aby określić ocenę łączną wskaźnika IRR oraz NPV, należy dokonać normowania tych wartości ($IRR_{ij} - ŻSZ_I$), otrzymując w rezultacie unormowaną ocenę różnicy wewnętrznej stopy zwrotu i żądanej stopy zwrotu R_{ij} :

$$R_{ij} = \frac{IRR_{ij} - ŻSZ_i}{\max(IRR_{ij} - ŻSZ_i)}, \tag{53}$$

gdzie $\max(IRR_{ij} - ŻSZ_i)$ to największa wartość spośród różnic $IRR_{ij} - ŻSZ_I$, określonych dla poszczególnych projektów.

Dla określenia rzeczywistej wartości wskaźnika *IRR* należy wyznaczyć ważoną ocenę wskaźnika, uwzględniającą zaufanie do poszczególnych ekspertów (przy uwzględnieniu nieunormowanych wartości liczb rozmytych IRR_{ij}):

$$IRR_i = \frac{\sum_{j=1}^{Q} V_E(j) \cdot IRR_{ij}}{\sum_{j=1}^{Q} V_E(j)}, \tag{54}$$

gdzie $V_E(j)$ – to środek ciężkości z liczby określającej zaufanie do *j*-eksperta.

Ze względu na charakter tego wskaźnika optymalizacja sprowadza się do zadania poszukiwania rozwiązania, dla którego wartość różnicy wewnętrznej stopy zwrotu i żądanej stopy zwrotu jest maksymalna:

$$IRR_i - \dot{Z}SZ_i \to MAX. \tag{55}$$

Wartość tej różnicy stanowi podstawę do oceny efektywności projektu.

W przypadku założenia zmiennej w czasie wartości przepływów pieniężnych oraz stopy dyskontowej można przyjąć inną interpretację określania wartości wskaźnika *IRR*, jako średnią ze stóp dyskontowych z kolejnych okresów trwania inwestycji:

a) dla określonych ogólnie przepływów pieniężnych:

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{{}_{SC}CF_{ijt}}{\prod_{t_z=1}^{t}\left(1 + d_{ijt_z}\right)} = 0, \tag{56}$$

b) dla określonych dodatnich i ujemnych strumieni pieniężnych:

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{{}_{SC}(CIF_{ijt} - COF_{ijt})}{\prod_{t_z=1}^{t}\left(1 + d_{ijt_z}\right)} = 0, \tag{57}$$

gdzie :

${}_{SC}CF_{ijt}$ – środek ciężkości z liczby rozmytej określającej przepływy pieniężne określone przez j-eksperta dla i-projektu przypadające na okres t,

${}_{SC}(CIF_{ijt} - COF_{ijt})$ – środek ciężkości z różnicy dwóch liczb rozmytych określających odpowiednio dodatni i ujemny strumień pieniężny,

d_{ijt_z} – rzeczywista wartość stopy dyskontowej określonej dla *i*-projektu na podstawie wartości przepływów pieniężnych określonych przez *j*-eksperta i przypadającej na okres *t*.

W wyniku przyjętego założenia o zmiennej wartości stopy dyskontowej w kolejnych okresach trwania inwestycji wskaźnik IRR można określić jako średnią wartość stopy dyskontowej ze stóp z kolejnych okresów trwania inwestycji:

$$IRR_{Sij} = \frac{\sum_{t_z=1}^{T} d_{ijt_z}}{T}, \tag{58}$$

Ponieważ projekt uznany jest za efektywny, jeśli różnica między wewnętrzną stopą zwrotu (IRR_{Sij}) i żądaną stopą zwrotu $\dot{Z}SZ_i$ (określoną przez inwestora) jest dodatnia. W tym celu dla każdego projektu wyznacza się różnicę $IRR_{Sij} - \dot{Z}SZ_I$ (odpowiednio $IRR_{WSPj} - \dot{Z}SZ_I$). Aby określić ocenę łączną względem wskaźnika NPV oraz wskaźnika IRR, należy dokonać normowania tych różnic, otrzymując w rezultacie unormowaną ocenę różnicy wewnętrznej stopy zwrotu i żądanej stopy zwrotu R_{Sij}:

$$R_{Sij} = \frac{IRR_{Sij} - \dot{Z}SZ_i}{\max(IRR_{Sij} - \dot{Z}SZ_i)}, \tag{59}$$

gdzie $\max(IRR_{Sij} - \dot{Z}SZ_i)$ to największa wartość spośród różnic, określonych dla poszczególnych projektów.

Dla określenia rzeczywistej wartości wskaźnika *IRR* należy wyznaczyć ważoną ocenę wskaźnika, uwzględniającą zaufanie do poszczególnych ekspertów:

$$IRR_i = \frac{\sum_{j=1}^{Q} V_E(j) \cdot IRR_{Sij}}{\sum_{j=1}^{Q} V_E(j)}, \tag{60}$$

gdzie $V_E(j)$ – to środek ciężkości z liczby określającej zaufanie do *j*-eksperta.

Optymalizacja sprowadza się do zadania poszukiwania rozwiązania, dla którego wartość różnicy wewnętrznej stopy zwrotu i żądanej stopy zwrotu jest maksymalna:

$$IRR_i - \dot{Z}SZ_i \to MAX. \tag{61}$$

Wartość tej różnicy stanowi podstawę do oceny efektywności projektu.

2.2.3. Oceny łączne projektów

Na podstawie unormowanych ocen wskaźników NPV oraz IRR są określane oceny łączne względem tych wskaźników dla każdego projektu (i każdego eksperta).

$$O_{Łij} = \frac{V_j(1) * NPV_j(i) + V_j(2) \cdot R_{Sij}}{\sum_{k=1}^{2} V_j(k)} \tag{62}$$

Na podstawie otrzymanych ocen łącznych projektów dla poszczególnych ekspertów można w dalszej kolejności określić ostateczne oceny projektów, uwzględniając zaufanie do ekspertów:

$$O_i = \frac{\sum_{j=1}^{Q} V_E(j) \cdot O_{Łij}}{\sum_{j=1}^{Q} V_E(j)} \tag{63}$$

Mając określone ostateczne oceny poszczególnych projektów, należy dokonać wyboru optymalnego projektu spośród rozpatrywanych. W tym celu należy znaleźć największą wartość oceny spośród ocen wszystkich projektów O_i. W ten sposób optymalizacja sprowadza się do poszukiwania projektu, dla którego wartość oceny jest maksymalna:

$$O_i \rightarrow MAX \tag{64}$$

Na podstawie tej wartości określonej dla każdego projektu wyznacza się projekt optymalny na podstawie przyjętych wskaźników.

3. Podsumowanie

Ocena efektywności inwestycji rzeczowych jest zadaniem skomplikowanym, ponieważ ma za zadanie wskazanie jak najlepszego rozwiązania spośród proponowanych, w sytuacji kiedy nie są jeszcze dokładnie znane wszystkie potrzebne do podjęcia decyzji parametry finansowe. Najczęściej wykorzystywanymi wskaźnikami przy ocenie projektów są wskaźnik NPV oraz wskaźnik IRR. Dzięki przyjęciu rozmytości parametru kosztu kapitału oraz przepływów pieniężnych w kolejnych okresach trwania inwestycji można dokładniej określić opłacalność projektu oraz dokonać analizy wyboru projektu najbardziej opłacalnego.

Bibliografia

1. Chojcan J.: Zbiory rozmyte i ich zastosowanie. Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2001.
2. Driankow D., Hellendoorn H., Reinfrank M.: Wprowadzenie do sterowania rozmytego. WNT, Warszawa 1996.
3. Dubois D., Prade H.: Fuzzy set and systems – theory and applications. Academic press, New York 1980.

4. Janc A.: Metody oceny przedsięwzięć inwestycyjnych w procesie planowania. PWN, Warszawa-Poznań 1990.
5. Kacprzyk J.: Wieloetapowe sterowanie rozmyte. WNT, Warszawa 2001.
6. Kulczycki P., Hryniewicz O., Kacprzyk J.: Techniki informacyjne w badaniach systemowych. WNT, Warszawa 2007.
7. Kurek W.: Efektywność inwestycji rzeczowych w gospodarce rynkowej. UMCS w Lublinie, Rzeszów 1997.
8. Łachwa A.: Rozmyty świat zbiorów, liczb relacji, faktów, reguł i decyzji. AOW Exit, Warszawa 2001.
9. Marcinek K.: Finansowa ocena przedsięwzięć inwestycyjnych przedsiębiorstw. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 2000.
10. Nowicki R.K.: Rozmyte systemy decyzyjne w zadaniach z ograniczoną wiedzą. Exit, Warszawa 2009.
11. Piech H.: Wnioskowanie na bazie strategii rozmytych. WNT, Częstochowa 2005.
12. Piegat A.: Modelowanie i sterowanie rozmyte. Exit, Warszawa 1999.
13. Pluta W., Jajuga T.: Inwestycje. Capital budgeting – budżetowanie kapitałowe. Fundacja Rozwoju Rachunkowości w Polsce, Warszawa 1995.
14. Rutkowski L.: Metody i techniki sztucznej inteligencji. PWN, Warszawa 2009.
15. Trocki M., Grucza B., Ogonek K.: Zarządzanie projektami. PWE, Warszawa 2003.
16. Wilczek M.T.: Podstawy zarządzania projektem inwestycyjnym. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 2004.
17. Wang G., Liu Q., Yao Y.: Rough set, fuzzy sets, data mining and granular computing. Springer Verlaq New York, New York 2003.
18. Wrzosek F.: Ocena efektywności rzeczowych inwestycji przedsiębiorstw. Sygma, Wrocław 1994.