ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: AUTOMATYKA z. 40 Nr kol. 527

Jerzy KLAMKA

WZGLĘDNA I ABSOLUTNA STEROWALNOŚĆ UKŁADÓW Z OPÓŹNIENIEM W STEROWANIU

Streszczenie: W pracy podano definicje względnej sterowalności oraz absolutnej sterowalności układów dynamicznych ze skupionymi i rozłożonymi opóźnieniami w sterowaniu. W oparciu o macierz względnej sterowalności, sformułowano warunek konieczny i wystarczający względnej sterowalności. Sformułowano również kryterium absolutnej sterowalności, którego stosowanie polega na sprawdzeniu sterowalności pewnego liniowego układu niestacjonarnego bez opóźnień. Rozpatrzono również problem sterowania z minimalną energią liniowym niestacjonarnym układem dynamicznym ze skupionymi i rozłożonymi opóźnieniami w sterowaniu. Korzystając z macierzy względnej sterowalności, podano postać sterowania z minimalną energią tymi układami.

1. Wprowadzenie

Sterowalność liniowych układów z opóźnieniami w sterowaniu była rozpatrywana w ostatnich latach przez wielu autorów [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. W pracach [1, 2, 6, 7, 8], rozważano układy liniowe wyłącznie ze skupionymi opóźnieniami w sterowaniu. Praca [4] jest poświęcona problemowi względnej sterowalności układów liniowych z wielokrotnymi zmiennymi w czasie opóźnieniami w sterowaniu. Względna sterowalność liniowych stacjonarnych układów z rozłożonymi opóźnieniami zarówno w stanie jak i w sterowaniu była analizowana w artykule [5], gdzie podano pewne algebraiczne kryteria względnej sterowalności. W artykule [3], podano pewne kryterium porównawcze badania względnej sterowalności, szczególnego typu układów z rozłożonym opóźnieniem w sterowaniu. W niniejszej pracy rozpatrzono problem względnej i absolutnej sterowalności liniowych niestacjonarnych układów dynamicznych ze skupionymi i rozłożonymi opóźnieniami w sterowaniu. Sformułowano warunki wystarczające i konieczne względnej sterowalności, a także absolutnej sterowalności. Podano postać sterowania z minimalną energią, wykorzystując do tego celu macierz względnej sterowalności zdefiniowaną uprzednio. Niniejsza praca uogólnia rezultaty zawarte w pracach [3, 4, 5].

2. Podstawowe definicje

Niech będzie dany liniowy niestacjonarny układ dynamiczny z wielokrotnymi stałymi opóźnieniami w sterowaniu, oraz z rozłożonym opóźnieniem w sterowaniu, opisany następującym wektorowym równaniem różniczkowym:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=0}^{i=M} B_i(t)u(t-h_i) + \int_{-h}^{0} B(t,s)u(t+s)ds \tag{1}$$

spełnionym prawie wszędzie na $[t_o, t_1]$, gdzie:

$$0 = h_o < h_1 < h_2 < \ldots < h_M \leqslant h \tag{2}$$

$x \in R^n$, sterowaniu u należy do klasy sterowań dopuszczalnych U, złożonej z wszystkich p-wymiarowych rzeczywistych, mierzalnych i ograniczonych funkcji określonych na $[t_o, t_1]$, $A(t)$ oraz $B_i(t)$, $(i=0,1,2,\ldots,M)$, są odpowiednio $n \times n$, oraz $n \times p$ wymiarowymi macierzami, których elementy są mierzalnymi i ograniczonymi funkcjami określonymi na przedziale $[t_o, t_1]$, natomiast $B(t,s)$ jest macierzą $n \times p$ wymiarową, o elementach mierzalnych i ograniczonych na zbiorze $[t_o, t_1] \times [-h, 0]$.
Poniżej dla wygody czytelnika przytoczono podstawowe definicje dotyczące względnej i absolutnej sterowalności układów liniowych z opóźnieniami w sterowaniu, które można znaleźć w pracach [1, 5, 6, 7, 8].

Definicja 1: Zbiór $z_t = \{x(t), u_t\}$, gdzie u_t jest funkcją określoną na $[-h, 0]$ równością $u_t(\tau) = u(t+\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$, nazywamy stanem zupełnym układu dynamicznego (1) w chwili t.

Definicja 2: Układ dynamiczny (1) nazywa się względnie sterowalnym na przedziale $[t_o, t_1]$, jeżeli dla każdego stanu zupełnego z_{t_o} i dla każdego wektora $x_1 \in R^n$, istnieje sterowanie dopuszczalne $u \in U$, takie, że odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria układu dynamicznego (1) spełnia następujący warunek: $x(t_1) = x_1$.

Definicja 3: Układ dynamiczny (1) nazywa się absolutnie sterowalnym na przedziale $[t_o, t_1]$, $(t_o < t_1 - h)$, jeżeli dla każdego stanu zupełnego z_{t_o}, istnieje sterowanie dopuszczalne $u \in U$, takie, że $u_{t_1} = 0$, i odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria układu spełnia warunek: $x(t_1) = 0$. Z powyższych definicji wynika, że układ dynamiczny może być względnie sterowany na $[t_o, t_1]$, nie będąc absolutnie sterowalnym na tym odcinku.

Jednoznaczne, absolutnie ciągłe rozwiązanie równania (1) z początkowym stanem zupełnym z_{t_o}, jest następującej postaci [3, 5]:

$$x(t) = F(t,t_o)x(t_o) + \int_{t_o}^{t} F(t,\tau) \sum_{i=0}^{i=M} B_i(\tau)u(\tau-h_i)d\tau +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} F(t,\tau) \left[\int_{-h}^{0} B(\tau,s)u(\tau+s)ds \right] d\tau \tag{3}$$

gdzie: $F(t,\tau)$ jest macierzą tranzycji równania jednorodnego. Dla $t=t_1$, zależność (3) może być przedstawiona w następującej formie:

$$x(t_1) = F(t_1,t_o)x(t_o) + \sum_{i=0}^{i=M} \int_{t_o-h_i}^{t_1-h_i} f(t_1,\tau+h_i)B_i(\tau+h_1)u(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{t_o}^{t_1} F(t_1,\tau) \left[\int_{-h}^{0} B(\tau,s)u(\tau+s)ds \right] d\tau \tag{4}$$

Bez utraty ogólności, można założyć, że zachodzi relacja: $t_o = t_1-h_m$, gdzie: m jest liczbą całkowitą taką, że $m \leqslant M$. Powyższe założenie nie będzie obowiązywało jedynie w przypadku rozpatrywania absolutnej sterowalności, (paragraf 5). Wartość sterowania $u(t)$ dla $t < t_o$, wchodzi do definicji stanu zupełnego z_{t_o}. W celu wydzielenia tych wartości, należy dokonać następujących przekształceń:

$$\sum_{i=0}^{i=M} \int_{t_o-h_i}^{t_1-h_i} F(t_1,\tau+h_i)B_i(\tau+h_i)u(\tau)d\tau = \sum_{i=0}^{i=m} \int_{t_o}^{t_1-h_i} F(t_1,\tau+h_i)B_i(\tau+h_i)u(\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=m} \int_{t_o-h_i}^{t_o} F(t_1,\tau+h_i)B_i(\tau+h_i)u_{t_o}(\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{i=M} \int_{t_o-h_i}^{t_1-h_i} F(t_1,\tau+h_i)B_i(\tau+h_i)u_{t_o}(\tau)d\tau \tag{5}$$

Zmieniając porządek całkowania w drugiej całce w wyrażeniu (4), oraz stosując twierdzenie Fubiniego, uzyskuje się następującą zależność:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t_1,\tau)\left[\int_{-h}^{0} B(\tau,s)u(\tau+s)ds\right]d\tau + \int_{-h}^{0}\left[\int_{t_0}^{t_1} F(t_1,\tau)B(\tau,s)u(\tau+)d\tau\right]ds =$$

$$= \int_{-h}^{0}\left[\int_{t_0+s}^{t_1+s} F(t_1,ts)B(t-s,s)u(t)dt\right]ds = \int_{-h}^{0}\left[\int_{t_0+s}^{t_0} F(t_1,t-s)B(t-s,s)u_{t_0}(t)dt\right]ds$$

$$+ \int_{-h}^{0}\left[\int_{t_0}^{t_1+s} F(t_1,t-s)B(t-s,s)u(t)dt\right]ds \tag{6}$$

Definiuje się funkcję macierzową $\bar{B}(t,s)$ w sposób następujący:

$$\bar{B}(t,s) = \begin{cases} B(t,s), & \text{dla } t\in[t_0,t_1], \quad s\in[-h,0] \\ 0, & \text{dla } t>t_1, \quad s\in[-h,0] \end{cases} \tag{7}$$

Wówczas ostatnia część równości (6) może być wyrażona w postaci:

$$\int_{-h}^{0}\left[\int_{t_0}^{t_1+s} F(t_1,t-s)B(t-s,s)u(t)dt\right]ds = \int_{-h}^{0}\left[\int_{t_0}^{t_1} F(t_1,t-s)\bar{B}(t-s,s)u(t)dt\right]ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{-h}^{0} F(t_1,t-s)\bar{B}(t-s,s)ds\right]u(t)dt \tag{8}$$

Dla skrócenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenia:

$$G_i(t_1,t) = \sum_{j=0}^{j=i} F(t_1,t+h_j)B_j(t+h_j) \tag{9}$$

$$\bar{S}(t_1,t) = \int_{-h}^{0} F(t_1,t-s)\bar{B}(t-s,s)ds \tag{10}$$

$$q(z_{t_o},x(t_1))= x(t_1)-F(t_1,t_o)x(t_o)- \int_{-h}^{0}\left[\int_{t_o+s}^{t_o} F(t_1,t-s)B(t-s,s)u_{t_o}(t)dt\right]ds =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=m} \int_{t_o-h_i}^{t_o} F(t_1,t+h_i)B_i(t+h_i)u_{t_o}(t)dt- \sum_{i=m+1}^{i=M} \int_{t_o-h_i}^{t_1-h_i} F(t_1,t+h_i)B_i(t+h_i)u_{t_o}(t)dt \quad (11)$$

Wykorzystując zależności (5), (6), (8), (9), (10, oraz (11), po prostych przekształceniach równań (4) przyjmie postać następującą:

$$q(z_{t_o},x(t_1))= \sum_{i=0}^{i=m} \int_{t_o}^{t_1-h_i} F(t_1,t+h_i)B_i(t+h_i)u(t)dt+ \int_{t_o}^{t_1} S(t_1,t)u(t)dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_i+1}^{t_1-h_i} \left(\sum_{j=0}^{j=i} F(t_1,t+h_j)B_j(t+h_j)+S(t_1,t)\right)u(t)dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} (G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t)u(t)dt \quad (12)$$

Macierz względnej sterowalności $W(t_o,t_1)$ dla układu dynamicznego (1) definiuje się podobnie jak macierz sterowalności dla układu dynamicznego bez opóźnień w sterowaniu:

$$W(t_o,t_1)= \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} (G_i(t_1,t)+\bar{S}(t_1,t))(G_i(t_1,t)+\bar{S}(t_1,t))^T dt \quad (13)$$

gdzie: symbol "T", oznacza transpozycję macierzy lub wektora.

Podobnie jak w formule (7), definiuje się następujące funkcje macierzowe

$$\bar{B}(t) = \begin{cases} B_i(t) & \text{dla} \quad t \in [t_o,t_1] \\ 0 & \text{dla} \quad t > t_1 \end{cases} \qquad i=0,1,2,\ldots,M \quad (14)$$

Dla uproszczenia zapisu wprowadza się następujące oznaczenia:

$$G(t_1,t) = \sum_{i=0}^{i=m-1} F(t_1,t+h_i)\bar{B}(t+h_i) \quad (15)$$

$$\overline{P}(t_1,t) = \overline{G}(t_1,t) + \overline{S}(t_1,t) \tag{16}$$

Z założeń przyjętych dla macierzy $A(t)$, $B(t,s)$, oraz $B_i(t)$, $(i=0,1,\ldots,M)$ wynika, że funkcja macierzowa $\overline{P}(t_1,t)$ jest mierzalna i ograniczona ze względu na zmienną t w przedziale $[t_o,\infty)$, oraz:

$$W(t_o,t_1) = \int_{t_o}^{t_1} \overline{P}(t_1,t)\overline{P}(t_1,t)^T dt$$

3. Warunki konieczne i wystarczające względnej sterowalności

Wykorzystując macierz względnej sterowalności $W(t_o,t_1)$, zdefiniowaną w paragrafie 2, można sformułować warunek konieczny i wystarczający względnej sterowalności układu dynamicznego (1), na przedziale $[t_o,t_1]$.

Twierdzenie 1: Układ dynamiczny (1) jest względnie sterowalny na przedziale $[t_o, t_1]$, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następująca relacja: rząd $W(t_o,t_1) = n$.

Dowód: Warunek wystarczający. Niech będzie dany dowolny stan zupełny z_{t_o} układu (1) w chwili t_o, oraz dowolny wektor $x_1 \in R^n$. Wykażemy, że sterowanie $u(t)$, dla $t\in[t_o,t_1]$, zdefiniowane poniżej, przeprowadza układ (1) ze stanu zupełnego z_{t_o} do punktu $x(t_1) = x_1$.

$$u(t) = (G_i(t_1,t) + \overline{S}(t_1,t))^T W^{-1}(t_o,t_1)q(z_{t_o},x_1) \tag{17}$$

dla $t\in[t_1-h_{i+1},t_1-h_i)$, oraz $i=0,1,2,\ldots,(m-1)$.

Macierz $W^{-1}(t_o,t_1)$ istnieje, gdyż przy dowodzie warunku wystarczającego zakłada się, że rząd $W(t_o,t_1) = n$. Podstawiając (17) do (4), oraz wykorzystując zależności (12) i (13) uzyskuje się poniższe równości:

$$x(t_1) = F(t_1,t_o)x(t_o) + \sum_{i=0}^{i=m} \int_{t_o-h_i}^{t_o} F(t_1,\tau+h_i)B_i(\tau+h_i)u_{t_o}(\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{i=M} \int_{t_o-h_i}^{t_1-h_i} F(t_1,\tau+h_i)B_i(\tau+h_i)u_{t_o}(\tau)d\tau + \int_{-h}^{0}\left[\int_{t_o+s}^{t_o} F(t_1-t-s)B(t-s,s)u_{t_o}(t).dt\right]ds$$

$$+\sum_{i=0}^{i=m-1}\int_{t_o}^{t_1-h_i} F(t_1,\tau+h_i)B_i(\tau+h_i)u(\tau)d\tau +$$

$$+\int_{t_o}^{t_1}\left[\int_{-h}^{0} F(t_1,t-s)\bar{B}(t-s,s)ds\right]u(t)dt = x_1-q(z_{t_o},h_1) +$$

$$+\sum_{i=0}^{i=m-1}\int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} (G_i(t_1,t)+\bar{S}(t_1,t))(g_i(t_1,t)+\bar{S}(t_1,t))^T \,.$$

$$\cdot\, W^{-1}(t_o,t_1)q(z_{t_o},x_1)dt = x_{1-q}(z_{t_o},x_1) + \sum_{i=0}^{i=m-1}\int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} (G_i(t_1,t) +$$

$$+ \bar{S}(t_1,t))(G_i(t_1,t)+\bar{S}(t_1,t))^T dt \,.\, W^{-1}(t_o,t_1)q(z_{t_o}, x_1) =$$

$$= x_1-q(z_{t_o},x_1)+W(t_o,t_1)q(z_{t_o},x_1) = x_1$$

Stąd, sterowanie u(t) zdefiniowane relacją (17) przeprowadza układ (1) ze stanu zupełnego z_{t_o} do x_1. Ponieważ z_{t_o} oraz x_1 były dobrane dowolnie, więc zgodnie z definicją 2 względnej sterowalności, układ dynamiczny (1) jest względnie sterowalny na przedziale $[t_o,t_1]$. W ten sposób warunek wystarczający został udowodniony.

Warunek konieczny: Dowód nie wprost. Załóżmy, że układ dynamiczny (1) jest względnie sterowalny na przedziale $[t_o,t_1]$, lecz rząd $W(t_o,t_1) < n$. Wówczas istnieje niezerowy wektor $g \in R^n$, taki, że zachodzi równość:

$$\langle g, W(t_o,t_1)g\rangle = g^T W(t_o,t_1)g = 0 \qquad (18)$$

Stąd otrzymuje się natychmiast następujące zależności:

$$\langle g, W(t_o,t_1)g\rangle = \sum_{i=0}^{i=m-1}\int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} \langle g, (G_i(t_1,t) +$$

$$+ \bar{S}(t_1,t)) \,.\, (G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t))^T g\rangle dt = \sum_{i=0}^{i=m-1}\int_{t_1-h_{i-1}}^{t_1-h_i} \langle (G_i(t_1,t) +$$

$$+ \bar{S}(t_1,t))^T g,\ (G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t))^T g\rangle dt = \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} \|(G_i(t_1,t) +$$

$$+ \bar{S}(t_1,t)^T g\|^2 dt = 0 \tag{19}$$

Ponieważ wektor $g \neq 0$, więc na mocy (19) prawdziwa jest równość:

$$(G_i(t_1,t)+ \bar{S}(t_1,t))^T g = 0 \text{ prawie wszędzie, dla } t \in [t_1-h_{i+1}, t_1-h_i),$$

$$i=0,1,\ldots,(m-1) \tag{20}$$

Z założenia układ dynamiczny (1) jest względnie sterowalny na przedziale $[t_0,t_1]$, a więc wybierając z_{t_0}, oraz x_1, tak, aby zachodziło: $g(z_{t_0},x_1) = g$, otrzymuje się następującą zależność:

$$q(z_{t_0},x_1)=g= \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} (G_i(t_1,t)+\bar{S}(t_1,t))u(t)dt$$

Uwzględniając powyższą zależność, oraz równość (20) uzyskuje się relacje:

$$\langle g,g\rangle = g^T g = g^T\Big(\sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} (G_i(t_1,t)+ \bar{S}(t_1,t)u(t)dt\Big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} g^T(G_i(t_1,1)+\bar{S}(t_1,t))u(t)dt = 0$$

Z powyższych zależności wynika, że wektor $g = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $g \neq 0$. Zatem przypuszczenie, że rząd $W(t_0,t_1)<n$, było fałszywe czyli rząd $W(t_0,t_1) = n$, co jednocześnie kończy dowód twierdzenia 1.

Wniosek 1: Jeżeli $B(t,s) = 0$ na zbiorze $[t_0,t_1] \times [-h,0]$, to wówczas układ dynamiczny (1) jest względnie sterowalny na $[t_0,t_1]$, wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} G_i(t_1,t)G_i(t_1,t)^T dt = n.$$

Dowód: Wniosek 1 wynika natychmiast z twierdzenia 1. Wszystkie szczególne przypadki rozpatrywane w pracach [5, 6, 7, 8], mogą być łatwo uzyskane z twierdzenia 1. lub też na mocy wniosku 1.

4. Sterowanie z minimalną energią

W przypadku, gdy układ dynamiczny (1) jest względnie sterowalny na przedziale $[t_o, t_1]$, to istnieje wówczas wiele różnych sterowań u(t), przeprowadzających układ dynamiczny ze stanu zupełnego z_{t_o}, do stanu chwilowego x_1. Problem sterowania z minimalną energią, polega na wyborze spośród tych sterowań takiego, które minimalizuje całkowitą energię sygnału sterującego, czyli minimalizuje wartość następującego wskaźnika jakości:

$$J(u) = \int_{t_o}^{t_1} \|u(t)\|^2_{R(t)} dt \tag{21}$$

gdzie: R(t) jest $p \times p$ wymiarową ciągłą i symetryczną macierzą, która jest istotnie dodatnio określona dla $t \in [t_o, t_1]$. Stąd macierz odwrotna $R^{-1}(t)$ istnieje dla wszystkich $t \in [t_o, t_1]$. Wprowadza się oznaczenia:

$$W_R(t_o, t_1) = \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} (G_i(t_1,t)+\bar{S}(t_1,t))R^{-1}(t)(G_i(t_1,t)+\bar{S}(t_1,t))^T dt \tag{22}$$

$$u^{*}(t) = R^{-1}(t)(G_i(t_1,t)+\bar{S}(t_1,t))^T W_R^{-1}(t_o,t_1) q(z_{t_o}, x_1) \tag{23}$$

dla $t \in [t_1-h_{i+1}, t_1-h_i)$, oraz $i=0,1,\ldots,(m-1)$

Twierdzenie 2: Załóżmy, że układ dynamiczny (1) jest względnie sterowalny na przedziale $[t_o, t_1]$. Niech $\bar{u}(t)$ będzie dowolnym sterowaniem przeprowadzającym układ dynamiczny (1) ze stanu zupełnego z_{t_o}, do x_1 oraz niech $u^{*}(t)$ będzie sterowaniem określonym relacją (23). Wówczas sterowanie $u^{*}(t)$ przeprowadza układ dynamiczny (1) ze stanu zupełnego z_{t_o} do x_1 oraz zachodzi następująca nierówność:

$$\int_{t_o}^{t_1} \|u(t)\|^2_{R(t)} dt \geqslant \int_{t_o}^{t_1} \|u^{*}(t)\|^2_{R(t)} dt \tag{24}$$

Ponadto minimalna wartość wskaźnika jakości jest dana wzorem następującym:

$$J(u^{*}) = \int_{t_0}^{t_1} \|u^{*}(t)\|^2_{R(t)} dt = \|q(z_{t_0}, x_1)\|^2_{W_R^{-1}(t_0,t_1)} \tag{25}$$

Dowód: Sterowanie $u^{*}(t)$ określone relacją (23) przeprowadza układ dynamiczny (1) ze stanu zupełnego z_{t_0} do x_1, co łatwo można sprawdzić w podobny sposób, jak w dowodzie warunku wystarczającego twierdzenia 1. Fakt, że sterowania $\bar{u}(t)$ oraz $u^{*}(t)$ przeprowadzają układ dynamiczny (1) ze stanu zupełnego z_{t_0} do x_1, implikuje następującą równość:

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} (G_i(t_1,t)+\bar{S}(t_1,t))\bar{u}(t)dt = \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} (G_i(t_1,t) +$$

$$+ \bar{S}(t_1,t))u^{*}(t)dt \tag{26}$$

Wykorzystując zależność (26) uzyskuje się następującą równość:

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} \langle (G_i(t_1,t)+ \bar{S}(t_1,t))(\bar{u}(t)-u^{*}(t)dt,\ W_R^{-1}(t_0,t_1)q(z_{t_0},x_1)\rangle = 0 \tag{27}$$

Na mocy zależności (23) oraz własności iloczynu skalarnego uzyskuje się

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} < \bar{u}(t)-u^{*}(t),\ u^{*}(t) > dt = \int_{t_0}^{t_1} < \bar{u}(t)-u^{*}(t),\ u^{*}(t) > dt = 0 \tag{28}$$

Po prostych przekształceniach, z relacji (28) uzyskuje się nierówność:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\bar{u}(t)\|^2_{R(t)} dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \|u^{*}(t)\|^2_{R(t)} dt \tag{29}$$

Stąd pierwsza część twierdzenia 2 została w ten sposób udowodniona.

Minimalną energię $J(u^{*})$, odpowiadającą sterowaniu $u^{*}(t)$, wyznacza się podstawiając $u^{*}(t)$ dane zależnością (23) do wskaźnika jakości (21). Stąd:

$$J(u^*) = \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} \| R^{-1}(t)(G_i(t_1,t) +$$

$$+ \bar{S}(t_1,t))^T W_R^{-1}(t_o,t_1) q(z_{t_o},x_1) \|^2_{R(t)} dt = \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} < R^{-1}(t)(G_i(t_1,t)+$$

$$+ \bar{S}(t_1,t))^T W_R^{-1}(t_o,t_1) q(z_{t_o},x_1),\ R(t) R^{-1}(t)(G_i(t_1,t) +$$

$$+ \bar{S}(t_1,t))^T W_R^{-1}(t_o,t_1) q(z_{t_o},x_1) > dt \tag{30}$$

Ponieważ macierz względnej sterowalności $W(t_o,t_1)$ jest symetryczna, więc również macierz $W_R(t_o,t_1)$ jest symetryczna. Stąd na mocy podstawowych własności iloczynu skalarnego uzyskuje się następujące równości:

$$J(u^*) = \int_{t_o}^{t_1} \| u^*(t) \|^2_{R(t)} dt = \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} < q(z_{t_o},x_1),\ W_R^{-1}(t_o,t_1) \cdot (G_i(t_1,t) +$$

$$+ \bar{S}(t_1,t)) R^{-1}(t)(G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t))^T W_R^{-1}(t_o,t_1) q(z_{t_o},x_1) > dt =$$

$$= < q(z_{t_o},x_1),\ W_R^{-1}(t_o,t_1) \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_{t_1-h_{i+1}}^{t_1-h_i} (G_i(t_1,t) +$$

$$+ \bar{S}(t_1,t)) R^{-1}(t) \cdot (G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t))^T dt\ W_R^{-1}(t_o,t_1) q(z_{t_o},x_1) > =$$

$$= < q(z_{t_o},x_1),\ W_R^{-1}(t_o,t_1) q(z_{t_o},x_1) > = \| q(z_{t_o},x_1) \|^2_{W_R^{-1}(t_o,t_1)}$$

W ten sposób twierdzenie 2 zostało udowodnione.

Twierdzenie 2 uogólnia rezultaty zamieszczone w pracach [4] oraz [8], na przypadek występowania rozłożonego opóźnienia w sterowaniu. Należy podkreślić, że wartość minimalna wskaźnika jakości $J(u^*)$ zależy wyłącznie od początkowego stanu zupełnego z_{t_o}, oraz wartości końcowej x_1.

5. Warunki konieczne i wystarczające absolutnej sterowalności

W niniejszym paragrafie zakłada się, że spełniona jest nierówność: $t_0 < t_1 - h$. Uzasadnione jest to tym, że w przeciwnym przypadku nie ma sensu mówić o absolutnej sterowalności. Twierdzenie 3 podane poniżej, pozwala na określanie absolutnej sterowalności układu z rozłożonym opóźnieniem w sterowaniu, na podstawie sterowalności układu bez opóźnień. Uogólnia ono rezultaty zawarte w pracach [6] oraz [8] na przypadek występowania rozłożonego opóźnienia w sterowaniu układu dynamicznego.

Twierdzenie 3: Układ dynamiczny (1) jest absolutnie sterowalny na przedziale $[t_0, t_1]$, $(t_0 < t_1 - h)$, wtedy i tylko wtedy, gdy liniowy niestacjonarny układ dynamiczny bez opóźnień w sterowaniu, postaci:

$$x(t) = A(t)x(t) + D(t)u(t) \tag{31}$$

gdzie:

$$D(t) = G_M(t,t) + S(t,t) \tag{32}$$

jest sterowalny na przedziale $[t_0, t_1 - h]$.

Dowód: Ponieważ $t_0 < t_1 - h$, więc na mocy (11), oraz (12) uzyskuje się:

$$q(z_{t_0}, x(t_1)) = \int_{t_0}^{t_1-h} (G_M(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t))u(t)dt +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=M} \int_{t_1-h}^{t_1-h_i} (G_i(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t))u_{t_1}(t)dt \tag{33}$$

Podstawiając $x(t_1) = 0$, oraz $u_{t_1} = 0$, jak w definicji 3, uzyskuje się równość

$$q(z_{t_0}, 0) = \int_{t_0}^{t_1-h} (G_M(t_1,t) + \bar{S}(t_1,t))u(t)dt = F(t_0,t) \int_{t_0}^{t_1-h} F(t_0,t)D(t)u(t)dt \tag{34}$$

Stąd, łatwo można wywnioskować, że układ dynamiczny (1) jest absolutnie sterowalny na przedziale $[t_0, t_1]$, wtedy i tylko wtedy, gdy równość (34) jest spełniona dla wszystkich stanów zupełnych z_{t_0}, to znaczy, że istnieje sterowanie $u \in U$, takie, że równość (34) jest spełniona dla dowolnego, ale ustalonego z_{t_0}. Z drugiej strony, powyższe stwierdzenie jest równoważne sterowalności na przedziale $[t_0, t_1 - h]$ układu dynamicznego postaci (31), Tak więc twierdzenie zostało udowodnione.

Wniosek 2: Układ dynamiczny (1) jest absolutnie sterowalny na przedziale $[t_0, t_1]$, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następująca relacja:

$$\text{rząd} \int_{t_0}^{t_1-h} F(t_1,t)D(t)D(t)^T F(t_1,t)^T dt = n \qquad (35)$$

Dowód: wniosek 2 jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 3.

6. Wnioski końcowe

W artykule rozpatrzono zagadnienia względnej i absolutnej sterowalności liniowych niestacjonarnych układów dynamicznych ze stałymi skupionymi wielokrotnymi opóźnieniami w sterowaniu oraz z rozłożonymi opóźnieniami w sterowaniu. Wyprowadzono warunki konieczne i wystarczające względnej sterowalności rozpatrywanych układów. Zagadnienie określania absolutnej sterowalności sprowadzono do problemu badania sterowalności układu dynamicznego bez opóźnień w sterowaniu. Przedstawiono także problem sterowania z minimalną energią oraz podano analityczną postać tego sterowania i wzór na odpowiadającą mu minimalną energię. Uzyskane wyniki są rozszerzeniem rezultatów zawartych w pracach [3, 4, 5, 6, 8].

LITERATURA

[1] Banks H.T., Jacobs M.Q., Latina M.R.: "The synthesis of optimal controls for linear problems with retarded controls", Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 8, pp. 319-366, 1971.

[2] Chyung D.H.: "On the controllability of linear systems with delay in control" I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, vol. AC-15, no. 2, pp. 225-257, April 1970.

[3] Kirlica W.P., Sosenkin A.M.:"Uprawliajemost liniejnych sistiem s razpriedielennym zapazdywaniem" Differencialnyje Urawnienia, tom X, nr 6 str. 1003-1008, 1974.

[4] Klamka J.: "Controllability of linear systems with time-variable delays in control", International Journal of Control, (w druku), 1976.

[5] Manitius A.: "On the controllability conditions for systems with distributed delays in state and control", Archiwum Automatyki i Telemechaniki, vol. 17, no. 4, str. 363-377, 1972.

[6] Olbrot A.W.: "On the controllability of linear systems with time delays in control", I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, vol. AC -17, no.5 pp. 664-666, October, 1972.

[7] Sebakhy O., Bayoumi M.M.: As simplified criterion for the controllability of linear systems with delay in control", I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, vol. AC-16, no. 4, pp. 364-365, August, 1971.

[8] Sebakhy O., Bayoumi M.M.: "Controllability of linear time-varying systems with delay in control", International Journal of Control, vol. 17, no. 1, pp. 127-135, 1973.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ И АБСОЛЮТНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ

Р е з ю м е

В работе рассмотрена относительная и абсолютная управляемость линейных нестационарных систем со средоточенными и распределёнными запаздываниями по управлению. Определено матрицу относительной управляемости для этих систем, и сформулировано необходимые и достаточные условия относительной управляемости. Представлено критерия абсолютной управляемости, которые требуют определения управляемости линейной нестационарной системы без запаздывания по управлению. В статье рассматривается тоже проблема оптимального управления с минимальной энергией. Учитывая матрицу относительной управляемости представлено закон управления с минимальной энергией и определено значение минимальной энергии.

RELATIVE AND ABSOLUTE CONTROLLABILITY OF SYSTEMS WITH DELAYS IN THE CONTROL

S u m m a r y

Relative controllability and absolute controllability of linear time-varying systems with lumped and distributed delays in the control are considered. The relative controllability matrix for these systems is defined, and necessary and sufficient conditions for relative controllability are derived. The Criterion for absolute controllability is also formulated. This criterion requires the testing of controllability of some linear time-varying system without delays in the control. This paper is also devoted to a study of minimal energy control. Using the relative controllability matrix of the system, the formula for minimal energy control is given, and the minimum walue of the energy is also obtained. This paper takes into consideration some previous results, concerning relative and absolute controllability of linear systems with lumped and distributet delays in the control.