ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: AUTOMATYKA z. 40 Nr kol. 527

Ernest CZOGAŁA, Dorota CZAJA-POŚPIECH

O PEWNEJ KONCEPCJI OPTYMALIZACJI OPARTEJ NA TEORII ZBIORÓW ROZMYTYCH

Streszczenie: W niniejszej pracy podano podstawowe pojęcie teorii zbiorów rozmytych i w oparciu o nie przedstawiono pojęcie rozwiązania rozmytego, a następnie optymalnego.
Wskazano na możliwość użycia maszyn cyfrowych w prezentowanej koncepcji optymalizacji.
Rozważania zilustrowano przykładami.

1. Wstęp

Często zdarzają się sytuacje, że należy przyjmować rozwiązanie (podejmować decyzję) w warunkach, kiedy cele (wymagania) i ograniczenia nie są dokładnie sprecyzowane [1, 2]. Zwykle taką niedokładność utożsamia się z przypadkowością (randomness).

Od czasu sformułowania przez L.A. Zadeh'a [1] tj. od 1965 r. podstaw teoretycznych zbiorów rozmytych można rozpatrywać niedokładność w innym sensie, opierając się na pojęciu rozmytości (fuzziness) zbioru. Zbiór uważa się za rozmyty, jeżeli nie można określić ostrej granicy przynależności jak również i nieprzynależności elementów do zbioru.

Różnica między przypadkowością a rozmytością polega na tym, że przypadkowość jest związana z miarą nieokreśloności, dotyczącej przynależności lub nieprzynależności jakiegoś elementu do nierozmytego zbioru, rozmytość natomiast wiąże się ze zbiorami, w których mogą być różne stopnie przynależności elementów do zbioru. Za rozmytość można więc uważać deterministyczne określenie stopnia przynależności elementu do zbioru. Różnica między losowością a rozmytością powoduje istnienie odmiennych metod teorii zbiorów rozmytych i teorii prawdopodobieństwa.

W wielu dziedzinach występuje konieczność wyboru takiego czy innego wariantu postępowania (rozwiązania, decyzji). Użycie maszyn cyfrowych pozwala na przeanalizowanie wielu wariantów i zbadanie efektywności realizacji postawionych zadań przez każdy wariant. Przeanalizowanie wielu wariantów pozwoli na wybór rozwiązania najlepszego ze względu na rozpatrywane kryteria a więc na przyjęcie rozwiązania optymalnego lub podjęcia decyzji optymalnej tj. takiej, która gwarantuje największą efektywność realizacji postawionego celu.

W niniejszej pracy, za [2], zwrócimy uwagę na trzy podstawowe pojęcia: rozmytego celu, rozmytego ograniczenia i rozmytego rozwiązania. Połączenie rozmytego celu i ograniczenia pozwala uzyskać rozmyte rozwiązanie [2]. W zasadniczej części obecnej pracy przedstawiono możliwość wyboru optymalnego rozwiązania sformułowanego w kategoriach zbiorów rozmytych. Rozważania zilustrowano przykładami.

2. Elementy teorii zbiorów rozmytych

2.1. Zapis, terminologia i podstawowe operacje

Zbiorami rozmytymi (mówiąc nieformalnie) są zbiory, w których nie ma ostrej granicy pomiędzy elementami należącymi i nienależącymi do tych zbiorów.

Mówiąc ściślej, zbiór rozmyty A, będący podzbiorem zbioru (przestrzeni) $U = \{u\}$, jest scharakteryzowany przez funkcję przynależności $\mu_A : U \to [0,1]$, która każdemu elementowi $u \in U$ przyporządkowuje liczbę $\mu_A(u)$ z przedziału $[0,1]$. Funkcja przynależności $\mu_A(u)$ reprezentuje tzw. stopień przynależności elementu u w A.

Można też powiedzieć, że zbiorem rozmytym A w U jest zbiór uporządkowanych par

$$A = \{u, \mu_A(u)\}, \forall u \in U \tag{1}$$

W przypadku kiedy zbiór A nie jest zbiorem rozmytym wtedy funkcja przynależności $\mu_A(u)$ przyjmuje wartości 0 lub 1.

Nośnikiem (podparciem) zbioru rozmytego jest zbiór S(A) elementów $u \in U$, dla których funkcja przynależności $\mu_A(u)$ jest dodatnia, czyli

$$S(A) = \{u: \mu_A(u) > 0, \forall u \in U\} \tag{2}$$

Elementem rozmytym jest zbiór rozmyty, którego podparciem jest pojedynczy punkt u, co można zapisać

$$A = \mu u \equiv \mu/u \tag{3}$$

przy czym zapis ten nie oznacza działania pomiędzy μ i u a raczej stopień przynależności elementu u w zbiorze A.

Zauważmy, że nierozmyty element można zapisać:

$$A = 1u \equiv 1/u \tag{4}$$

Rozmyty zbiór A nazywamy <u>normalnym</u> wtedy i tylko wtedy jeżeli $\sup_u \mu_A(u) = 1$ tzn. supremum $\mu_A(u)$ na U jest równe jedności.
Rozmyty zbiór A nazywamy <u>subnormalnym</u>, jeżeli nie jest normalny. Niepusty subnormalny zbiór rozmyty A można sprowadzić do normalnego przez podzielenie każdej wartości $\mu_A(u)$ przez wartość $\sup_u \mu_A(u)$.

Zbiór rozmyty A mający skończoną ilość elementów w nośniku tego zbioru można zapisać poprzez zależność:

$$A = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n \equiv \mu_1/u_1 + \dots + \mu_n/u_n \tag{5}$$

lub

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i \equiv \sum_{i=1}^{n} \mu_i/u_i = \sum_{i=1}^{n} \mu(u_i)/u_i \tag{6}$$

Należy zwrócić uwagę, że znak + oraz $\sum$ oznacza raczej związek niż sumę arytmetyczną.

W przypadku kiedy nośnik zbioru rozmytego A zawiera nieprzeliczalną liczbę elementów wtedy zbiór rozmyty A można zapisać:

$$A = \int_U \mu_A(u)/u \tag{7}$$

przy czym znak całki nie jest konwencjonalnym zapisem całki, a raczej oznacza związek między pojedynczymi elementami rozmytymi.

Zauważmy, że nierozmyty zbiór U skończony:

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \tag{8}$$

może być zapisany w postaci:

$$U = 1/u_1 + 1/u_2 + \dots + 1/u_n \tag{9}$$

lub

$$U = \sum_{i=1}^{n} 1/u_i \tag{10}$$

Podstawowe operacje na zbiorach rozmytych są zdefiniowane następującymi wyrażeniami:

Zawieranie (inkluzja)

$$A \subset B \Longleftrightarrow \mu_A(u) \leqslant \mu_B(u), \quad \forall u \in U \tag{11}$$

Suma (złącze)

$$A \cup B \Longleftrightarrow \mu_{A \cup B}(u) = \mu_A(u) \quad \mu_B(u) \overset{df}{=} \max\left[\mu_A(u), \mu_B(u)\right] \tag{12}$$

Iloczyn (przekrój)

$$A \cap B \Longleftrightarrow \mu_{A \cap B}(u) = \mu_A(u) \wedge \mu_B(u) \overset{df}{=} \min\left[\mu_A(u), \ \mu_B(u)\right] \tag{13}$$

Dopełnienie

$$\neg A \Longleftrightarrow \mu_{\ A}(u) = 1 - \mu_A(u) \tag{14}$$

Łatwo pokazać, opierając się na zdefiniowanych operacjach, że funkcje przynależności spełniają następujące relacje:

$$\mu_A \leqslant \mu_A \quad \text{(prawo zwrotności)} \tag{15}$$

$$\mu_A \leqslant \mu_B, \ \mu_B \leqslant \mu_A \Longrightarrow \mu_A = \mu_B \quad \text{(prawo antysymetrii)} \tag{16}$$

$$\mu_A \leqslant \mu_B, \ \mu_B \leqslant \mu_C \Longrightarrow \mu_A \leqslant \mu_C \quad \text{(prawo przechodności)} \tag{17}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_A \vee \mu_A = \mu_A \\ \mu_A \wedge \mu_A = \mu_A \end{array}\right. \quad \text{(prawo idempotentności)} \tag{18}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_A \vee \mu_B = \mu_B \vee \mu_A \\ \mu_A \wedge \mu_B = \mu_B \wedge \mu_A \end{array}\right| \quad \text{(prawo przemienności)} \tag{19}$$

$$\left.\begin{array}{l} (\mu_A \vee \mu_B) \vee \mu_C = \mu_A \vee (\mu_B \vee \mu_C) \\ (\mu_A \wedge \mu_B) \wedge \mu_C = \mu_A \wedge (\mu_B \wedge \mu_C) \end{array}\right. \quad \text{(prawa łączności)} \tag{20}$$

$$\mu_A \wedge (\mu_A \vee \mu_B) = \mu_A$$
$$\mu_A \vee (\mu_A \wedge \mu_B) = \mu_A$$
(prawo absorbcji) (21)

$$\mu_A \wedge (\mu_B \vee \mu_C) = (\mu_A \wedge \mu_B) \vee (\mu_A \wedge \mu_C)$$
$$\mu_A \vee (\mu_B \wedge \mu_C) = (\mu_A \vee \mu_B) \wedge (\mu_A \vee \mu_C)$$
(prawo rozdzielności) (22)

$$\neg(\mu_A \vee \mu_B) = \mu_{\neg A} \wedge \mu_{\neg B}$$
$$\neg(\mu_A \wedge \mu_B) = \mu_{\neg A} \vee \mu_{\neg B}$$
(prawo de Morgana) (23)

$$\mu_{\neg\neg A} = \mu_A$$
(prawo inwolucji) (24)

$$\left.\begin{array}{l} \mu_A \vee 0 = \mu_A, \quad \mu_A \wedge 1 = \mu_A \\ \mu_A \vee 1 = 1, \quad \mu_A \wedge 0 = 0 \end{array}\right|$$
(prawo identyczności) (25)

$$\left.\begin{array}{l} \mu_A \vee \mu_{\neg A} \neq 1 \\ \mu_A \wedge \mu_{\neg A} \neq 0 \end{array}\right|$$
(uchyb praw dopełnienia) (26)

Można też w zależności od potrzeby określić inne operacje [2, 4] jak np.:

iloczyn algebraiczny zbiorów rozmytych:

$$A\ B \Leftrightarrow \mu_{AB}(u) = \mu_A(u) \cdot \mu_B(u) \tag{27}$$

suma algebraiczna zbiorów rozmytych

$$A \hat{+} B \Leftrightarrow \mu_{A\hat{+}B}(u) = \mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u) \cdot \mu_B(u) \tag{28}$$

potęgowanie zbioru rozmytego

$$A^{\alpha} \Leftrightarrow \mu_{A^{\alpha}}(u) = \left[\mu_A(u)\right]^{\alpha} \tag{29}$$

mnożenie zbioru rozmytego przez liczbę rzeczywistą

$$\alpha A \Leftrightarrow \mu_{\alpha A}(u) = \alpha \mu_A(u) \tag{30}$$

gdzie: α jest liczbą rzeczywistą większą od zera spełniającą nierówność:

$$\alpha \sup_u \mu_A(u) \leqslant 1 \quad \text{i inne.}$$

2.2. Relacje rozmyte

Relacją rozmytą R między zbiorami U i V jest rozmyty podzbiór iloczynu kartezjańskiego U x V (U x V jest zbiorem uporządkowanych par (u, v); $u \in U$, $v \in V$).

Relacja ta jest scharakteryzowana przez funkcję przynależności $\mu_R(u,v)$ i wyraża się w postaci:

$$R \overset{df}{=} \int_{U \times V} \mu_R(u,v)/(u,v) \tag{31}$$

Ogólniej, dla n-krotnej relacji rozmytej R, która jest rozmytym podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ mamy:

$$R \overset{df}{=} \int_{U_1 \times \ldots \times U_n} \mu_R(u_1, \ldots, u_n)/(u_1, \ldots, u_n) \tag{32}$$

przy czym $u_i \in U_i$, $i=1,2,\ldots,n$

Relacje mogą być prezentowane w postaci macierzowej.

Jeżeli R jest relacją między U i V a S jest relacją między V i W, wtedy złożenie R i S jest relacją rozmytą oznaczoną $R \circ S$, definiowane w następujący sposób:

$$R \circ S = \int_{U \times W} \sup_v (\mu_R(u,v) \mu_S(v,w))/(u,w) \tag{33}$$

przy czym supremum oblicza się na całej przestrzeni V. Taka relacja nazywana jest złożeniem maksyminowym.

Jeżeli przestrzenie zmiennych u, v, w są zbiorami skończonymi wtedy relacja $R \circ S$ jest tzw. iloczynem maksyminowym macierzy relacji R i macierzy relacji S.

Określimy teraz iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych. Iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych $A \subset U$ i $B \subset V$ definiuje się w następujący sposób:

$$A \times B \overset{df}{=} \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v))/(u,v) \tag{34}$$

Uogólniając powyższe można określić iloczyn kartezjański $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Jeżeli $A_1,\dots,A_n$ są zbiorami rozmytymi odpowiednio zbiorów $U_1,\dots,U_n$, wtedy iloczyn kartezjański $A_1 \times A_2 \times A_3 \times\dots\times A_n$ jest rozmytym podzbiorem zbioru $U_1 \times\dots\times U_n$ zdefiniowanym następująco:

$$A_1 \times\dots\times A_n = \int_{U_1\times\dots\times U_n} (\mu_{A_1}(u_1)\wedge\dots\mu_{A_n}(u_n))/(u_1,\dots u_n) \qquad (35)$$

Podamy jeszcze bardzo ważną zasadę tzw. zasadę rozszerzania:

Niech f będzie przekształceniem U w V tzn. $v = f(u)$ są odpowiednimi elementami U i V. Niech A będzie rozmytym podzbiorem U wyrażony w postaci:

$$A = \sum_i \mu_A(u_i)/u_i \qquad (36)$$

lub

$$A = \int_U \mu_A(u)/u \qquad (37)$$

Zgodnie z zasadą rozszerzania, obraz zbioru rozmytego A poprzez przekształcenie f przyjmuje postać:

$$f(A) = \sum_i \mu_A(u_i)/f(u_i) \qquad (38)$$

lub

$$f(A) = \int_U \mu_A(u)/f(u) \qquad (39)$$

3. Sformułowanie zagadnienia wyboru optymalnego rozwiązania

Podstawą rozważań w tym punkcie jest schemat postępowania, którego najważniejszą cechą jest równorzędne traktowanie celów i ograniczeń w zagadnieniach, w których istnieje problem wyboru rozwiązania.

Niech będzie dana przestrzeń wszystkich sensownych rozwiązań U (przestrzeń wszystkich sensownych decyzji). Przyjmijmy, że są zadane ograniczenia, które będziemy uważać za podzbiory (zbiory) rozmyte $G_r(r=1,2,\dots,n)$ przestrzeni U. Ograniczenia te nazywają się też ograniczeniami rozmytymi. W analogiczny sposób możemy utożsamić cele zwane też celami rozmytymi, ze zbiorami rozmytymi $W_s(s=1,2,\dots m)$ będącymi również podzbiorami rozmytymi przestrzeni U.

Biorąc pod uwagę rezultat działania wszystkich celów i ograniczeń traktowanych równorzędnie jako zbiory rozmyte uzyskuje się zbiór rozmyty, który za pracą [2] nazywać będziemy rozwiązaniem rozmytym. Można też powiedzieć, że rozwiązaniem rozmytym lub po prostu rozwiązaniem będziemy nazywać zbiór rozmyty R otrzymany jako połączenie (nałożenie) zadanych celów i ograniczeń.

Połączenie (lub nałożenie) zbiorów rozmytych może być traktowane również w zależności od interpretacji rozpatrywanego zagadnienia [2].

Z uwagi na najczęściej występującą sprzeczność między ograniczeniami i celami stosuje się połączenie rozumiane jako przekrój zbiorów rozmytych [2]. Oznacza ono łączny wpływ ograniczeń i celów na rozwiązanie.

Zakładając więc istnienie zadanych n-celów i m-ograniczeń rozwiązanie można określić połączeniem traktowanym jako przekrój wszystkich celów i ograniczeń tj.:

$$R = W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_n \cap G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_m \tag{40}$$

Z uwagi na podstawowe operacje określone na zbiorach rozmytych funkcję przynależności rozwiązania można zapisać:

$$\mu_R = \mu_{W_1} \wedge \mu_{W_2} \wedge \ldots \wedge \mu_{W_n} \wedge \mu_{G_1} \wedge \ldots \wedge \mu_{G_m} \tag{41}$$

Jeszcze raz należy podkreślić iż mimo, że najczęściej rozwiązanie przyjmuje się w sensie przekroju zbiorów rozmytych można też dla połączenia przyjąć inną operację (np. iloczyn algebraiczny funkcji przynależności).

W celu ilustracji powyższych rozważań rozpatrzymy w przestrzeni $U \equiv X$ (dodatnia oś rzeczywista) działanie jednego ograniczenia traktowanego jako zbiór rozmyty (np. x powinno się znajdować "blisko" liczby 10) oraz celu również traktowanego jako zbiór rozmyty (np. x powinno być możliwie jak największe). Wtedy rozwiązanie można zapisać w formie:

$$R = W \cap G \tag{42}$$

i odpowiednio

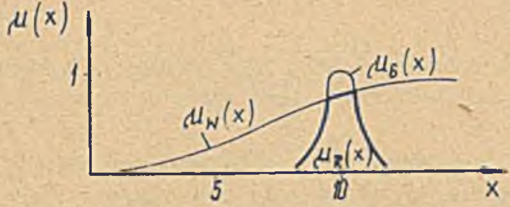
$$\mu_R(x) = \mu_W(x) \wedge \mu_G(x) \tag{43}$$

Zarówno cele jak i ograniczenia można zapisać wykorzystując dwuparametrową rodzinę funkcji [2]:

$$\mu(x) = \left[1 + a(x - x_o)^m\right]^{-1} \tag{44}$$

gdzie: a jest liczbą dodatnią, a m parzystą liczbą ujemną lub dodatnią.

Rozwiązanie podane zależnością (43) można przedstawić graficznie (rys. 1).



Rys. 1

Traktując rozwiązanie jako przekrój dwóch zbiorów rozmytych jest ono również zbiorem rozmytym o funkcji przynależności oznaczonej linią grubą.

Funkcja przynależności celu nie koniecznie musi być otrzymana z zależności (44). Może ona być otrzymana z funkcji celu (efektywności) za pomocą normalizacji [2]. Przypadki takie rozpatrzymy w przykładach.

Interesującym z punktu widzenia zastosowań będzie zbiór rozwiązań gwarantujących największą efektywność realizacji pewnych zamierzeń.

Wprowadzimy teraz pojęcie optymalnego rozwiązania. Zakładając, że rozwiązanie R jest rozwiązaniem rozmytym z funkcją przynależności $\mu_R(u)$ określimy taki zbiór K punktów w U, w którym funkcja $\mu_R(u)$ osiąga maksimum (jezeli ono istnieje).

<u>Optymalnym rozwiązaniem</u> [2] nazywamy nierozmyty podzbiór R^M zbioru R określony warunkami:

$$\mu_{R^M}(u) = \begin{cases} \max \mu_R(u) & \text{dla } u \in K \\ 0 & \text{dla } u \notin K \end{cases} \tag{45}$$

Każde rozwiązanie u z nośnika zbioru R^M nazywamy <u>maksymalizującym rozwiązaniem</u> [2].

W przykładzie rozpatrywanym poprzednio rozwiązanie maksymalizujące będzie na prawo od liczby 10. Inaczej mówiąc maksymalizującym rozwiazaniem nazywamy dowolne rozwiązanie w przestrzeni U, które maksymalizuje funkcję $\mu_R(u)$.

Należy tutaj zauważyć, że jeśli $U \equiv X \equiv R^n$ to dostatecznym warunkiem jednoznaczności maksymalizującego rozwiązania jest silna wypukłość zbioru rozmytego R tzn. wypukłość zbioru R z istnieniem unimodalnej funkcji przynależności [2].

Wypukłość zbioru rozmytego jest zapewniona wtedy i tylko wtedy, jeżeli jego funkcja przynależności dla każdej pary punktów u_1, u_2 z U czyni zadość nierówności [1, 2]:

$$\mu_R\left[\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2\right] \geqslant \min\left[\mu_R(u_1), \mu_R(u_2)\right] \tag{46}$$

dla wszystkich $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Zbiór rozmyty jest wklęsły, jeżeli jego dopełnienie jest wypukłe. Można też wykazać [1], że jeżeli dwa zbiory rozmyte są wypukłe, to wypukły jest także ich przekrój.

Określenie optymalnego rozwiązania w kategoriach zbiorów rozmytych w ogólnym sensie opiera się na twierdzeniu dotyczącym separacji wypukłych zbiorów rozmytych. Twierdzenie to brzmi:

Niech A i B będą ograniczonymi wypukłymi zbiorami w R^n z maksymalnymi stopniami przynależności M_A i M_B odpowiednio $M_A = \sup_u \mu_A(u)$, $M_B = \sup_u \mu_B(u)$. Niech M będzie maksymalnym stopniem przynależności dla przekroju $A \cap B$ ($M = \sup_u \min[\mu_A(u), \mu_B(u)]$ Wtedy stopień separacji wyraża się zależnością:

$$D = 1 - M \tag{47}$$

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w pracy [1].

4. Przykłady obliczeniowe

Rozpatrzmy teraz przykłady, których rozwiązania w granicznym przypadku można znaleźć poprzez klasyczne poszukiwanie ekstremum lub poprzez stosowanie nieoznaczonych współczynników Lagrange'a.

1^o Rozważmy problem poszukiwania największej wartości powierzchni pola prostokąta $S = xy$ jeżeli ograniczenie jest zadane w postaci zbioru rozmytego poprzez zależność:

$$L = 2x + 2y \underset{\sim}{\leq} A \tag{48}$$

przy czym w celu dokonania konkretnych obliczeń przyjęto $A = 12$. Wężyk pod znakiem nierówności oznacza rozmytość wyrażającą się słowem "w przybliżeniu".

Innymi słowy należy tak wybrać współrzędne wektora $\mathbb{X} = (x,y)$, aby uzyskać maksymalne pole prostokąta $S = xy$ zamkniętego obwodem A.

Zauważmy w przypadku pominięcia rozmytości maksimum pola otrzymuje się dla:

$$x = y = \frac{A}{4} = 3 \tag{49}$$

Identyczny wynik otrzymuje się stosując metodę nieoznaczonych współczynników Lagrange'a.

Obecnie rozwiążemy powyższy problem w kategoriach rozwiązania rozmytego. W tym celu należy określić funkcje przynależności celu rozmytego i ograniczenia rozmytego.

Funkcja przynależności rozmytego celu może być otrzymana z funkcji celu (efektywności) po dokonaniu normalizacji

$$\mu_S(\mathbb{X}) = \frac{xy}{\max(xy)} \tag{50}$$

Natomiast dla funkcji przynależności ograniczenia rozmytego wykorzystamy zależność (44) skąd:

$$\mu_L(\mathbb{X}) = \frac{1}{1+a(2x+2y-A)^m} \tag{51}$$

Zauważmy, że obydwie funkcje są wypukłe w sensie (46). Parametry a, m można określić mając dodatkowe informacje np. o zakresie niedokładności [2]. W naszym przypadku przyjęto a = 1 i m = 4. Rozwiązanie przyjmuje więc postać:

$$\mu_R(\mathbb{X}) = \mu_S(\mathbb{X}) \wedge \mu_L(\mathbb{X}) \tag{52}$$

Analizując za pomocą maszyny cyfrowej rozwiązania przy skończonym kroku (np. $\Delta = 0,25$) dla warunków początkowych $x_o = \Delta$ i $y_o = \frac{A}{2} - \Delta$, można uzyskać optymalne rozwiązanie opierając się na zależności (45).

Zakładając, że dla tego kroku wystarczają nam rozwiązania maksymalizujące z dokładnością δ, można uzyskać zbiór K rozwiązań maksymalizujących zgodnie z warunkiem:

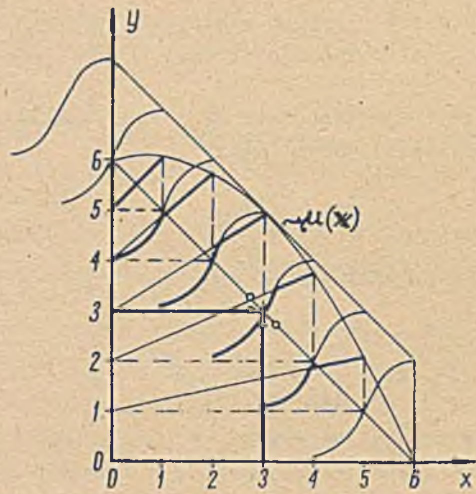
$$\mu_{R^M}(\mathbb{X}) = \begin{cases} \max \mu_R(\mathbb{X}) - \delta & \text{dla } \mathbb{X} \in K \\ 0 & \text{dla } \mathbb{X} \notin K \end{cases} \tag{53}$$

W naszym przypadku przyjmując $\delta = 0,05$ zbiór K składa się z 5 rozwiązań (rys. 2), wśród których nadal można poszukiwać rozwiązania o największej funkcji przynależności. Łatwo zauważa się, że dla poprzednio przyjętych wartości x_o i y_o rozwiązanie takie znajduje się dokładnie w punkcie x = y = 3.

2° W analogiczny sposób rozwiążemy problem poszukiwania maksymalnej objętości prostopadłościennego zbiornika zamkniętego przy ograniczeniu rozmytym:

$$S = 2xy + 2yz + 2xz \underset{\sim}{\leq} B \tag{54}$$

gdzie: dla obliczeń przyjęto B = 150.



Rys. 2

Usuwając rozmytość i stosując wymienione wyżej klasyczne metody uzyskuje się jako rozwiązanie maksymalizujące objętość prostopadłościanu:

$$x = y = z = \frac{B}{30} = 5 \tag{55}$$

Rozpatrując zagadnienie w kategoriach rozmytych określimy następująco funkcje przynależności odpowiednio dla celu i ograniczenia:

$$\mu_V(\mathbf{X}) = \frac{xyz}{\max(xyz)} \tag{56}$$

$$\mu_S(\mathbf{X}) = \frac{1}{1+a(2xy+2yz+2xz-B)^m} \tag{57}$$

gdzie: $\mathbf{X} = (x,y,z)$, $a=1$, $m=4$.

Wyznaczając podobnie jak w poprzednim przykładzie rozwiązanie maksymalizujące uzyskuje się rozwiązanie w pobliżu liczby 5.

5. Uwagi i wnioski końcowe

W pracy przedstawiono podstawowe koncepcje dotyczące teorii zbiorów rozmytych oraz sformułowano za pracą [2], w oparciu o te koncepcje, pojęcie rozwiązania rozmytego a następnie optymalnego.

Rozwiązanie rozmyte przyjęto jako w pewnym sensie połączenie celów i ograniczeń, przy czym połączenie potraktowano jako iloczyn odpowiednich zbiorów rozmytych.

W rozważaniach niniejszej pracy zakładano, że wszystkie cele i ograniczenia mają jednakową ważność. Mogą istnieć jednak sytuacje, w których pewne wybrane ograniczenia i cele mają inną (np. większą) ważność niż pozostałe. Należy wtedy zastosować odpowiednie współczynniki wagi charakteryzujące w określony sposób cele i ograniczenia [2].

W końcowej części pracy podano metodykę rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych w kategoriach rozmytości, które w granicznym przypadku sprowadzają się do klasycznych zagadnień optymalizacji. Można zauważyć, że w warunkach rozmytości i przybliżenia, celowe wydaje się wykorzystanie maszyn cyfrowych.

LITERATURA

[1] Zadeh L.A.: Fuzzy sets, Information and Control 8, 1965.

[2] Bellman R.E., Zadeh L.A.: Decision-Making in Fuzzy Environment, Management Science 17, N° 4, 1970.

[3] Zadeh L.A.: Fuzzy Algorithms, Inform. and Control, 12, 1968.

[4] Zadeh L.A.: Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes, IEEE Trans. on S.,M., and C. Vol. SMC-3 N° 1, 1973.

О НЕКОТОРОЙ КОНЦЕПЦИИ ОПТИМАЛИЗАЦИИ ОСНОВАННОЙ НА ТЕОРИИ РАСПЛЫВЧАТЫХ МНОЖЕСТВ

Р е з ю м е

В работе представлено основные понятия теории расплывчатых множеств и на этом основании даны понятия расплывчатого и оптимального решения.

Указаны возможности использования вычислительных машин в представленной концепции оптимализации. Выводы иллюстрируются примерами.

ON A CONCEPT OF OPTIMIZATION BASED ON FUZZY SETS THEORY

S u m m a r y

The essential notions of fuzzy sets theory and then, based on these, the notion of fuzzy solution as well as the optimal solution have been presented.

The possibility of using digital computers in the presented concept of optimization has been indicated.

The considerations have been illustrated by examples.