ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: AUTOMATYKA z. 42 Nr kol. 568

Bernard PYTLIK

O PEWNEJ DEFINICJI SYGNAŁU ROZMYTEGO I JEGO PRZEJŚCIU PRZEZ PODSTAWOWE UKŁADY AUTOMATYKI

Streszczenie. W artykule zdefiniowano pojęcie sumy kompleksowej zbiorów rozmytych, sformułowano i udowodniono dwa lematy oraz twierdzenie dotyczące tego pojęcia. Zdefiniowano pojęcie sygnału rozmytego. Przeanalizowano przekształcenie sygnału rozmytego w podstawowych układach statycznych automatyki.

1. Wstęp

Teoria zbiorów rozmytych jest teorią zajmującą się nieprecyzyjnymi,słabo określonymi pojęciami i wielkościami, a ponadto daje możliwość operowania nimi w ściśle matematycznym sensie. Podstawy teoretyczne tej teorii podał L.A. Zadeh w 1965 roku [1]. Od tego czasu teoria ta mocno się rozwinęła (dzięki pracom Bellmana, Browna, Gogena, Lee, Changa, Kóczy i innych) i znalazła stałe miejsce w wielu dziedzinach nauki. Teoria zbiorów rozmytych znalazła największe zastosowanie w takich dziedzinach, jak: lingwistyka, logika, teoria podejmowania decyzji, teoria sterowania, teoria automatów, teoria systemów i teoria informacji.

W niniejszej pracy zaprezentowano możliwość zastosowania teorii zbiorów rozmytych do analizy układów statycznych w automatyce.W pierwszej części pracy zdefiniowano pojęcie sumy kompleksowej zbiorów rozmytych, która znalazła zastosowanie przy dodawaniu sygnałów rozmytych. W drugiej części pracy zdefiniowano pojęcie sygnału rozmytego oraz przeanalizowano jego przekształcenie w podstawowych układach statycznych.

2. Podstawowe definicje, zapis, terminologia

Niech będzie dany niepusty zbiór E zwany przestrzenią.Rozmytym zbiorem w przestrzeni E jest funkcja odwzorowująca E w przedział $[0,1]$ (w przypadku zwykłego zbioru funkcją tą jest funkcja charakterystyczna).

Jeżeli A jest zbiorem rozmytym, to przyjmujemy, że A jest również nazwą funkcji przynależności. Wartość tej funkcji na elemencie a reprezentuje stopień przynależności tego elementu do zbioru A.

Zbiór rozmyty A można oznaczać jako: $\left\{(x,A(x)) : x \in E\right\}$.

Zbiór rozmyty A zawiera się w zbiorze rozmytym B $(A \subset B)$, jeśli $A(x) \leq B(x)$ dla wszystkich $x \in E$.

Funkcję $A'(x) = 1 - A(x)$ nazywamy dopełnieniem rozmytego zbioru A w przestrzeni E.

Sumą mnogościową zbiorów rozmytych $\bigcup_{t \in T} A_t$ jest funkcja $\sup_{t \in T} A_t(x)$.

Iloczynem mnogościowym zbiorów rozmytych $\bigcap_{t \in T} A_t$ jest funkcja $\inf_{t \in T} A_t(x)$.

Jeżeli f jest funkcją, która odwzorowuje zbiór E w zbiór Y $(f: E \to Y)$, to rozmyty zbiór $A \subset E$ indukuje w zbiorze Y rozmyty zbiór $f(A)$, który definiuje się jako funkcję $\sup_{x \in f^{-1} y} A(x)$, jeśli $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ lub zero, jeśli $f^{-1}(y) = \emptyset$ ($f^{-1}(y)$ oznacza przeciwobraz elementu y).

Nośnikiem rozmytego zbioru A jest zbiór

$$S(A) = \left\{ a \in E : A(a) > 0 \right\}$$

Zbiór rozmyty, którego nośnik jest zbiorem jednoelementowym, nazywamy elementem rozmytym.

Jeśli A jest elementem rozmytym o nośniku $S(A)$ równym a, to fakt ten będziemy oznaczać następująco:

$$A = A(a)/a$$

Zgodnie z tą notacją nierozmyty element A będziemy oznaczać $1/a$ lub prościej tylko przez a.

Rozmyty zbiór może być traktowany jako suma mnogościowa elementów rozmytych

$$A = \bigcup_{a \in S(A)} A(a)/a$$

3. Suma kompleksowa zbiorów rozmytych

Niech dany będzie zbiór E, który z działaniem dodawania jest grupą przemienną. Oznaczmy przez $F(E)$ zbiór wszystkich zbiorów rozmytych w zbiorze E i określmy na nim działanie "$\oplus$", które będziemy nazywać dodawaniem kompleksowym.

Sumą kompleksową rozmytych zbiorów A i B nazywać będziemy zbiór

$$A \oplus B = \left\{ (a+b,\ A \oplus B(a+b)) \right\}$$

gdzie a i b są elementami zbioru E należącymi odpowiednio do rozmytych zbiorów A i B ze stopniami przynależności $A(a)$ i $B(b)$.

Zajmijmy się teraz związkami zachodzącymi między funkcjami przynależności zbiorów A, B i $A \oplus B$. Na wstępie załóżmy, że B jest elementem rozmytym $B(b)/b$, wtedy dla każdego $x \in E$ definiujemy

$$A \oplus B(b)/b(x) \overset{df}{=} A(x-b)B(b).$$

Jeżeli B nie jest elementem rozmytym, to można go przedstawić w postaci sumy mnogościowej elementów rozmytych

$$B = \bigcup_{b \in S(B)} B(b)/b.$$

Wtedy

$$A \oplus B = A \oplus \bigcup_{b \in S(b)} B(b)/b = \bigcup_{b \in S(b)} A \oplus B(b)/b$$

oraz

$$A \oplus B(x) = \sup_{b \in S(b)} (A(x-b)B(b))$$

lub

$$A \oplus B(x) = \sup_{b \in E} (A(x-b)B(b)).$$

Warto zauważyć, że sumą kompleksową elementów rozmytych $A(a)/a$ i $B(b)/b$ jest element rozmyty $A(a).B(b)/(a+b)$.

<u>Lemat 1</u>

Dodawanie kompleksowe zbiorów rozmytych jest przemienne.

D o w ó d

Wobec faktu, że $a+b = b+a$, wystarczy udowodnić, że

$$A \oplus B(x) = B \oplus A(x). \tag{3.1}$$

W tym celu załóżmy niewprost, że dla pewnego $x \in E$ równość (3.1) nie jest spełniona. Zatem spełniona jest jedna z dwu nierówności:

$$A \oplus B(x) > B \oplus A(x) \tag{3.2}$$

$$A \oplus B(x) < B \oplus A(x) \tag{3.3}$$

Zakładamy dalej, że spełniona jest nierówność (3.2), czyli, że

$$\sup_{b\in E}(A(x-b)B(b)) > \sup_{a\in E}(B(x-a)A(a))$$

Wtedy istnieje taki punkt $\xi \in E$, że:

$$A(x-\xi)B(\xi) > \sup_{a\in E}(B(x-a)A(a)).$$

Stąd mamy, że dla dowolnego punktu $a\in E$ spełniona jest nierówność

$$A(x-\xi)B(\xi) > B(x-a)A(a),$$

co jest nieprawdą, bo dla $a = x-\xi$ otrzymujemy równość.

W przypadku, gdy spełniona jest nierówność (3.3), dowód przebiega analogicznie.

Lemat 2

Dodawanie kompleksowe zbiorów rozmytych jest łączne.

D o w ó d

Ponieważ $(a+b)+c = a+(b+c)$, zatem wystarczy udowodnić, że dla każdego $x\in E$

$$(A \oplus B) \oplus C(x) = A \oplus (B \oplus C)(x) \tag{3.4}$$

Wychodząc z oczywistych równości

$$\sup_{c\in E}(\sup_{a\in E}(B(x-c-a)A(a)C(c))) = \sup_{(a,c)\in E^2}(B(x-c-a)A(a)C(c))$$

$$\sup_{a\in E}(\sup_{c\in E}(B(x-a-c)C(c)A(a))) = \sup_{(a,c)\in E^2}(B(x-c-a)A(a)C(c))$$

otrzymujemy równoważną równość

$$\sup_{c\in E}(C(c)\sup_{a\in E}(B(x-c-a)A(a))) = \sup_{a\in E}(A(a)\sup_{c\in E}(B(x-a-c)C(c))),$$

która z kolei równoważne jest równości

$$(B \oplus A) \oplus C(x) = (B \oplus C) \oplus A,$$

stąd wobec przemienności dodawania kompleksowego (lemat 1) dostajemy równość (3.4).

Na podstawie przedstawionych wyżej lematów można sformułować następujące twierdzenia:

Jeśli zbiór E z dodawaniem tworzy grupę przemienną, to zbiór wszystkich podzbiorów rozmytych zbioru E z działaniem dodawania kompleksowego tworzy półgrupę przemienną.

4. Przekształcenie sygnału rozmytego w podstawowych układach statycznych

4.1. Pojęcie sygnału rozmytego

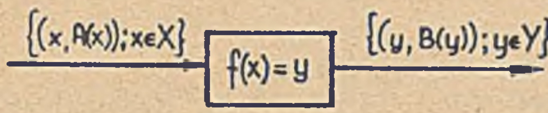
Niech dana będzie przestrzeń sygnałów E. Rozmyty zbiór sygnałów przestrzeni E nazywać będziemy sygnałem rozmytym w tej przestrzeni.

Sygnał rozmyty, którego nośnik jest zbiorem jednoelementowym, nazywać będziemy elementarnym sygnałem rozmytym.

Jeżeli w przestrzeni sygnałów E określone jest działanie dodawania sygnałów, które ze zbiorem E tworzy grupę przemienną, to w zbiorze wszystkich sygnałów rozmytych w przestrzeni E można zdefiniować działanie dodawania kompleksowego, które z tym zbiorem tworzy półgrupę przemienną.

4.2. Przekształcenie sygnału rozmytego

Rozpatrzmy najprostszy element statyczny o znanej charakterystyce statycznej f (rys. 1). Ponieważ f jest funkcją, która przekształca prze-



Rys. 1. Przekształcenie sygnału rozmytego w najprostszym elemencie statycznym

strzeń sygnałów wejściowych X w przestrzeń sygnałów wyjściowych Y, to - podając na wejście tego elementu rozmyty sygnał A - na wyjściu otrzymamy rozmyty sygnał B = f(A) o funkcji przynależności, którą można zdefiniować w następujący sposób:

$$\bigwedge_{y\in Y} B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in f^{-1}(y)} A(x) & \text{jeśli } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{jeśli } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \qquad (4.1)$$

Szeregowe połączenie elementów (stopni)

Rozpatrzmy przekształcenie sygnału rozmytego przez układ przedstawiony na rysunku 2. Jest to układ z szeregowo połączonymi elementami (bez obciążania się) o zadanych charakterystykach statycznych f_1 i f_2.

Rys. 2. Przekształcenie sygnału rozmytego przez układ z szeregowo połączonymi elementami

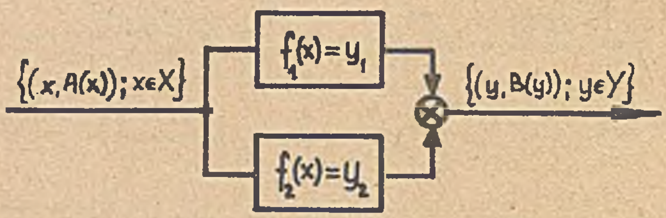
Funkcja f, która ustala przekształcenie sygnąłu w tym układzie, jest równa złożeniu funkcji f_1 i f_2 ($f = f_2 \circ f_1$). Funkcja f jest funkcją jednej zmiennej, zatem funkcję przynależności sygnału wyjściowego

$$B = f(A) = f_2(f_1(A))$$

można zapisać wzorem (4.1).

Równoległe połączenie elementów

Rozważmy przekształcenie sygnału rozmytego przez układ z równolegle połączonymi elementami o zadanych charakterystykach statycznych f_1, f_2 (rys. 3). Zauważmy, że funkcja, która ustala przekształcenie sygnału w tym układzie, jest funkcją jednej zmiennej i równa jest sumie funkcji f_1 oraz f_2, zatem - podając na wejście rozmyty sygnał A - na wyjściu otrzymamy rozmyty sygnał



Rys. 3. Przekształcenie sygnału rozmytego przez układ z równolegle połączonymi elementami

$$B = (f_1 + f_2)(A), \tag{4.2}$$

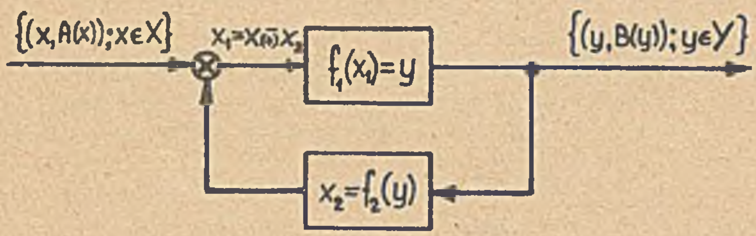
którego funkcję przynależności B(y) można zapisać wzorem (4.1).

Układ ze sprzężeniem zwrotnym

Rozpatrzmy układ ze sprzężeniem zwrotnym taki, jak to przedstawiono na rysunku 4. Ogólnie taki układ można opisać zależnością

$$y = f_1(x_{(\mp)}\, f_2(y)),$$

gdzie znak minus (plus) oznacza, że układ jest z ujemnym (dodatnim) sprzężeniem zwrotnym.



Rys. 4. Przekształcenie sygnału rozmytego przez układ ze sprzężeniem zwrotnym

Zależność (4.2) możemy przedstawić za pomocą nie rozwiązanego względem y równania

$$F(x,y) = 0. \tag{4.3}$$

Z naszego punktu widzenia interesujące jest zagadnienie istnienia i jednoznaczności funkcji uwikłanej $y = f(x)$ - niezależnie od możliwości przedstawienia jej analitycznym wzorem.

Wiadomo, że jeśli funkcja $F(x,y)$ jest ciągła wraz ze swą pochodną $F'_y(x,y)$ w pewnym otoczeniu pewnego punktu (x_0, y_0), przy czym $F(x_0,y_0)=0$ lecz $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$, to równanie (4.3) określa y w otoczeniu punktu (x_0, y_0) jako funkcję jednoznaczną i ciągłą zmiennej x, która dla $x = x_0$ przyjmuje wartość $y_0 = f(x_0)$.

Załóżmy, że funkcje f_1, f_2 są takie, że funkcja

$$F(x,y) = y - f_1(x_{(\mp)}\, f_2(y))$$

spełnia przedstawione wyżej założenia.

Wtedy podając na wejście układu rozmyty sygnał

$$A = \bigcup_{x \in S(A)} A(x)/x$$

otrzymamy na wyjściu rozmyty sygnał B, którego funkcję przynależności można zdefiniować następująco:

$$B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in\{x:F(x,y)=0\}} A(x) & \text{jeśli } \{x,F(x,y)=0\} \neq \emptyset \\ 0, & \text{jeśli } \{x,F(x,y)=0\} = \emptyset \end{cases} \tag{4.4}$$

W szczególności, jeśli funkcje f_1, f_2 są liniowe, to równanie (4.3) można rozwikłać, tzn. przedstawić za pomocą analitycznego wzoru wyrażającego y przez x.

Istotnie, załóżmy, że

$$f_1(z) = K_1 z,$$

$$f_2(y) = K_2 y,$$

wtedy dla $z = x_{(+)}^{\,(-)} f_2(y)$ otrzymamy

$$y = \frac{K_1 x}{1 \underset{(-)}{(+)} K_1 K_2} \qquad \text{dla } K_1K_2 \neq 1$$

Więc $B(y)$ można zdefiniować jako

$$B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in f^{-1}(y)} A(x) & \text{gdy } f^{-1}(y) \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \tag{4.5}$$

Funkcje $B(y)$ definiowane przez (4.4) i (4.5) są identyczne, bo dla ustalonego y identyczne są zbiory $f^{-1}(y)$ oraz $\{x, F(x,y) = 0\}$.

4.3. Seperacja (detekcja) sygnałów względem stopnia przynależności.

Rozmyty sygnał, zgodnie z definicją podaną wcześniej, jest rozmytym zbiorem sygnałów, a zatem zbiorem, w którym zatarta została ostra granica między elementami należącymi a nie należącymi do niego. Nie można więc powiedzieć, że dany sygnał a jest elementem rozmytego sygnału A, za wyjątkiem trywialnego przypadku, gdy stopień przynależności $A(a)$ tego sygnału do zbioru A jest równy jedności. Wprowadzając odpowiednie poziomy stopnia przynależności, będziemy mogli mówić o przynależności sygnału a do rozmytego sygnału A względem odpowiedniego poziomu.

Przyjmijmy przykładowo dwa poziomy stopnia przynależności α i β takie, że $0<\beta<\alpha<1$. Za pracą [1] będziemy uważać, że:

1^o a należy do A, jeżeli $A(a) \geqslant \alpha$

2^o a nie należy do A, jeżeli $A(a) \leqslant \beta$

3^o a ma nieokreślony stan względem A, jeżeli $\beta < A(a) < \alpha$

Problem tego rodzaju należy do logiki trójwartościowej z trzema wartościami $E(A(a) \geqslant \alpha)$, $F(\beta < A(a) < \alpha)$, $G(A(a) \leqslant \beta)$.

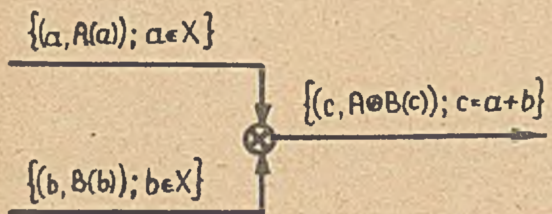
Zagadnienie to można uogólnić, wprowadzając n poziomów α_i (i = 1,2, 3,...,n) spełniających warunek:

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < 1.$$

Mając wprowadzone odpowiednie poziomy stopnia przynależności dla sygnałów rozmytych, mamy możliwość separacji lub detekcji sygnałów i to niezależnie na wejściu jak i na wyjściu układu.

5. Uwagi i wnioski końcowe

Zdefiniowanie sumy kompleksowej sygnałów rozmytych pozwala nam na przeprowadzenie "rozmytej" analizy węzła sumacyjnego (patrz rys. 5), a co za tym idzie, na rozpatrywanie dużo bardziej skomplikowanych układów. Węzeł ten należy odróżnić od węzła, który rozpatrywaliśmy przy przekształceniu sygnału rozmytego przez układ z równolegle połączonymi elementami. Funkcja, która ustalała przekształcenie w tym układzie, była funkcją jednej zmiennej. W powyższym przypadku węzeł taki należy traktować jako element o dwu niezależnych wejściach i jednym wyjściu. Tego typu element można traktować jako sumator, który sumuje sygnały podawane na wejście. Funkcja, która w tym przypadku opisuje przekształcenie sygnałów (dodawanie), jest funkcją dwu zmiennych.

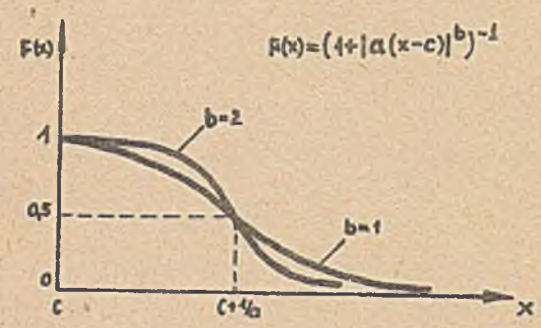


Rys. 5. Sumator realizujący sumę kompleksową sygnałów rozmytych

Biorąc pod uwagę fakt, że dodawanie kompleksowe jest łączne, można rozpatrywać sumatory o większej liczbie niezależnych wejść.

Przyjęta w pracy definicja sygnału rozmytego, jako zbioru rozmytego w przestrzeni sygnałów, umożliwia wykorzystanie niekonwencjonalnego aparatu matematycznego teorii zbiorów rozmytych do analizy układów statycznych.

W pracy nie rozpatruje się problemu definiowania funkcji przynależności dla określonego sygnału rozmytego. Pomocna może się okazać funkcja $F(x) = (1 + |a(x-c)|^b)^{-1}$ podana przez Bellmana, Zadeha w pracy [1], któ-



Rys. 6. Wykres funkcji przynależności zbioru rozmytego F dla b = 1 i b = 2

rej wykres dla dwóch konkretnych wartości b = 1 i b = 2 podano na rys. 6. Funkcja ta ma tę istotną zaletę, że postać rozmytego zbioru jest kształtowana przez trzy parametry: a, b, c interpretowane odpowiednio jako rozciąganie, kontrastowanie oraz zmiana punktu minimalnej rozmytości.

Interpretując sygnał rozmyty jako zmienną lingwistyczną, której wartościami są etykiety zbiorów rozmytych mające formę zwrotów lub sentencji w naturalnym lub sztucznym języku, należy przede wszystkim nadać znaczenie terminom podstawowym (odpowiednio zadając funkcje przynależności). Mając zdefiniowane funkcje przynależności dla terminów podstawowych można, dokonując analizy syntaktycznej (składniowej), wyznaczyć funkcje przynależności dla terminów złożonych [2].

LITERATURA

[1] Zadeh L.A.: Fuzzy sets. Information and Control 8, 338-353 (1965).

[2] Zadeh L.A.: Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans. on Syst., Man and Cyb.SMC-3, no. 1, 28-44 (1973).

[3] Bellman R.E., Zadeh L.A.: Decision - Making in Fuzzy Environment, Management Science, 17, no. 4, 141-164 (1970).

ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАСПЛЫВЧАТОГО СИГНАЛА
И ЕГО ПЕРЕХОДЕ ЧЕРЕЗ ОСНОВНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИКИ

Р е з ю м е

В работе даётся определение понятия комплексной суммы расплывчатых множеств. Определяются и доказываются две леммы и теорема относящаяся к этому понятию. Определяется тоже расплывчатый сигнал и производится анализ преобразовывания расплывчатого сигнала в основных статических системах автоматики.

A DEFINITION OF A FUZZY SIGNAL AND ITS TRANSMITION THROUGHT BASIC AUTOMATICS SYSTEMS

S u m m a r y

In the article there has been defined the notion of complex sum of fuzzy sets, there have been formulated and proved two lemmata and a theorem refering to this notion. The notion of a fuzzy signal has been defined.The transformation of a fuzzy signal in basic etatic systems of automatics has been analysed.