MODELOWANIE INŻYNIERSKIE ISNN 1896-771X
32, s. 127-134, Gliwice 2006

ANALIZA MATERIAŁÓW PIEZOELEKTRYCZNYCH METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH WPŁYW KIERUNKU POLARYZACJI

GRZEGORZ DZIATKIEWICZ

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki, Politechnika Śląska

Streszczenie. W pracy zastosowano metodę elementów brzegowych (MEB) do analizy statycznych problemów liniowej piezoelektryczności. Modelowano piezoelektryczne materiały ceramiczne jako: jednorodne, dielektryczne, liniowo-sprężyste i transwersalnie izotropowe. Rozwiązania fundamentalne MEB uzyskano stosując formalizm Stroha. Formalizm ten umożliwił również określenie wpływu orientacji osi polaryzacji piezoelektryków na rozwiązania zadań brzegowych liniowej piezoelektryczności w układach dwuwymiarowych.

1. WSTĘP

Materiały piezoelektryczne generują pole elektryczne, gdy są odkształcane i odkształcają się pod wpływem zadanego pola elektrycznego. To zjawisko jest szeroko wykorzystywane w wielu nowoczesnych urządzeniach, na przykład w sensorach, elementach wykonawczych mechatroniki, układach mikroelektromechanicznych i przetwornikach. Analiza tych środków technicznych wymaga rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych dla sprzężonych pól mechanicznych i elektrycznych. W tej pracy zastosowano metodę elementów brzegowych (MEB) [1] do analizy statycznych problemów liniowej piezoelektryczności. Materiał piezoelektryczny jest modelowany jako: jednorodny, transwersalnie izotropowy, liniowo-sprężysty i dielektryczny [3], [4]. Rozwiązania numeryczne MEB wymagają znajomości rozwiązań fundamentalnych operatora liniowej piezoelektryczności. Rozwiązania mają skomplikowaną formę nawet dla modelu materiału transwersalnie izotropowego. Aby uzyskać rozwiązania fundamentalne, w prezentowanej pracy zastosowano formalizm Stroha [2], [5], [7].

Spośród wielu rodzajów piezoelektryków, w pracy ograniczono się do analizy materiałów ceramicznych. Ostatnim etapem procesu wytwarzania ceramiki piezoelektrycznej jest nadawanie określonego kierunku polaryzacji. Kierunek polaryzacji ma duży wpływ na zachowanie się materiałów piezoelektrycznych. Przykładowo, projektując piezoelektryczny aktuator liniowy, można stwierdzić, że mała zmiana kierunku polaryzacji zmienia założone pola przemieszczeń. Z tego powodu wyznaczenie zależności między kierunkiem polaryzacji i odpowiedzią układu wydaje się być ważnym zadaniem. W niniejszej pracy powyższa zależność jest badana numerycznie z wykorzystaniem MEB.

Formalizm Stroha to bardzo efektywne narzędzie stosowane w zagadnieniach anizotropowej teorii sprężystości [7], rozszerzone i zastosowane w niniejszej pracy dla

liniowej piezoelektryczności [2], [5]. Orientacja osi polaryzacji jest uwzględniona w formalizmie Stroha. Wymaga on rozwiązania specjalnego problemu własnego ze względu na stałe materiałowe piezoelektryka. Dla przypadku zagadnień dwuwymiarowych te stałe to: 4 stałe sprężystości, 3 stałe piezoelektryczności i 2 stałe przenikalności dielektrycznej. Wartości i wektory własne, odpowiadające tym stałym, są specjalnie transformowane zgodnie z kierunkiem osi polaryzacji.

W pracy będą prezentowane przykłady numeryczne, które pokażą, że sformułowanie MEB pozwala na efektywną analizę wpływu kierunku polaryzacji na odpowiedź układu, w statycznych problemach liniowej piezoelektryczności.

2. SFORMUŁOWANIE MEB DLA LINIOWEJ PIEZOELEKTRYCZNOŚCI

Równania pól sprzężonych liniowej piezoelektryczności, w przypadku statyki, mają postać następujących równań różniczkowych cząstkowych [4]:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}u_{k,li} + e_{lij}\phi_{,li} &= -b_j \\ e_{ikl}u_{k,li} - \varepsilon_{il}\phi_{,li} &= 0 \end{aligned}, \tag{1}$$

gdzie tensory C_{ijkl}, e_{ikl} oraz ε_{il} to odpowiednio tensory stałych sprężystości, stałych piezoelektryczności oraz stałych przenikalności dielektrycznej, mierzonej przy stałym odkształceniu. Wektor przemieszczeń oznaczono jako u_k, potencjał elektryczny jako φ, natomiast b_j to wektor sił objętościowych. W równaniu elektrostatyki układu (1) pominięto natężenie objętościowe ładunku elektrycznego, ponieważ ceramiczne materiały piezoelektryczne, jako dielektryki, nie posiadają wewnętrznych swobodnych ładunków elektrycznych.

Aby otrzymać klasyczne sformułowanie zadania brzegowego, układ równań (1) musi zostać uzupełniony o warunki brzegowe, zarówno mechaniczne jak i elektryczne:

$$\begin{aligned} &\Gamma_t : t_i = \bar{t}_i \,;\, \Gamma_u : u_i = \bar{u}_i \\ &\Gamma_\phi : \phi = \bar{\phi} \,;\, \Gamma_\omega : \omega = \bar{\omega} \end{aligned}. \tag{2}$$

W powyższych zależnościach t_i oznacza wektor sił powierzchniowych, a ω oznacza gęstość ładunku powierzchniowego, Γ_t, Γ_u, Γ_φ oraz Γ_ω oznaczają, odpowiednio, fragmenty brzegu gdzie siły powierzchniowe, przemieszczenia, potencjał oraz gęstość powierzchniowa ładunku są dane. Zadanie gęstości powierzchniowej ładunku na fragmencie brzegu Γ_ω jest równoważne z zadaniem warunku Neumanna na tym fragmencie brzegu [6].

Równania pól sprzężonych (1) wraz z warunkami brzegowymi (2) tworzą zagadnienie brzegowe liniowej piezoelektryczności.

Powyższe sformułowanie można zapisać w znacznie wygodniejszej formie, używając wielkości uogólnionych. W tym celu wprowadzono następujące wektory:

$$U_K = \begin{Bmatrix} u_k \\ \phi \end{Bmatrix};\; T_J = \begin{Bmatrix} t_j \\ \omega \end{Bmatrix};\; B_J = \begin{Bmatrix} b_j \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{3}$$

gdzie U_K, T_J i B_J to odpowiednio wektory uogólnionych przemieszczeń, sił powierzchniowych oraz sił objętościowych.

Używając uogólnionych przemieszczeń oraz uogólnionych sił objętościowych równania pól sprzężonych można przedstawić w formie operatorowej:

$$L_{JK}U_K = -B_J, \tag{4}$$

gdzie L_{JK} to eliptyczny operator różniczkowy liniowej piezoelektryczności.

W niniejszym sformułowaniu liniowej piezoelektryczności (równania konstytutywne Voigta), dla modelu materiału transwersalnie izotropowego, w przypadku dwuwymiarowym, operator L_{JK} jest dany jako:

$$L_{JK} = \begin{bmatrix} c_{11}\partial_{11} + c_{33}\partial_{22} & (c_{12}+c_{13})\partial_{12} & (e_{21}+e_{13})\partial_{12} \\ & c_{33}\partial_{11} + c_{22}\partial_{22} & e_{13}\partial_{11} + e_{22}\partial_{22} \\ sym & & -\varepsilon_{11}\partial_{11} - \varepsilon_{22}\partial_{22} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

gdzie ∂_{ij} to operator różniczkowania ze względu na współrzędne, natomiast c_{ij}, e_{ij} oraz ε_{ij} to odpowiednio wartości stałych sprężystości, piezoelektryczności oraz przenikalności dielektrycznej.

Mając dany model matematyczny, można przystąpić do zbudowania relacji wzajemności, która jest ważną zależnością metody elementów brzegowych. W tym celu wykorzystuje się metodę odchyłek ważonych oraz formuły Greena, które pozwalają otrzymać następującą zależność:

$$\int_\Omega (L_{JK}U_K U_{MJ} - L_{JK}U_{MK}U_J)d\Omega = \int_\Gamma (U_{MJ}T_J - T_{MJ}U_J)d\Gamma, \tag{6}$$

gdzie U_{MJ} jest funkcją wagi, a T_{MJ} zależy od pochodnych funkcji wagi. Symbol Ω oznacza obszar zajmowany przez rozważane ciało, modelowane jako piezoelektryk. W powyższym równaniu pominięto uogólnione siły objętościowe.

Gdy jako funkcję wagi wybierze się rozwiązanie fundamentalne operatora L_{JK} oraz przeprowadzi się przejście graniczne do brzegu, można otrzymać brzegowe równanie całkowe w postaci:

$$c_{KJ}U_J + \int_\Gamma T_{KJ}U_J d\Gamma = \int_\Gamma U_{KJ}T_J d\Gamma, \tag{7}$$

gdzie c_{KJ} to współczynnik zależny od kształtu brzegu. Zgodnie z definicją, rozwiązanie fundamentalne dane jest przez:

$$L_{JK}U_{MK} = -\delta_{JM}\delta, \tag{8}$$

gdzie δ_{JM} to tensor izotropowy Kroneckera, a δ oznacza dystrybucję Diraca. W brzegowym równaniu całkowym występuje wielkość T_{KJ}, która zależy także od pochodnych rozwiązania fundamentalnego:

$$T_{MJ} = C_{iJKl}U_{MK,l}n_i, \tag{9}$$

a tensor C_{iJKl} zawiera stałe sprężystości, piezoelektryczności oraz przenikalności dielektrycznej. Wektor n_i to jednostkowy wektor normalny, zewnętrzny do brzegu.

Aby rozwiązać w sposób przybliżony brzegowe równania całkowe (7), zastosowano MEB. W tej metodzie brzeg Γ jest dzielony na elementy brzegowe, a uogólnione przemieszczenia i siły powierzchniowe są na nim aproksymowane za pomocą funkcji kształtu. W prezentowanej pracy, dla prostoty rozważań, ograniczono się do stałych elementów brzegowych.

Stosując zdyskretyzowane brzegowe równanie całkowe do wszystkich węzłów brzegowych, można otrzymać następujący układ równań algebraicznych liniowych:

$$HU = GT\,. \tag{10}$$

W (10) H oznacza macierz zależną od pochodnych rozwiązania fundamentalnego, a G to macierz zależna od rozwiązania fundamentalnego. Wektory U i T zawierają węzłowe wartości uogólnionych przemieszczeń i sił powierzchniowych na brzegu. Powyższy układ równań jest modyfikowany zgodnie z warunkami brzegowymi i rozwiązywany w celu wyznaczenia poszukiwanych wielkości brzegowych.

3. FORMALIZM STROHA

3.1 Podstawowe zależności

Ponieważ materiały piezoelektryczne są anizotropowe, stąd rozwiązania fundamentalne są trudne do uzyskania i mają skomplikowaną postać, nawet dla przypadku transwersalnej izotropii. W niniejszej pracy zastosowano, rozszerzony dla liniowej piezoelektryczności, formalizm Stroha. Jest to znane i bardzo efektywne narzędzie matematyczne stosowane dotychczas głównie w płaskich zagadnieniach anizotropowej teorii sprężystości.

Zakłada się tutaj, że pole uogólnionych przemieszczeń można przedstawić jako [2], [5], [7]:

$$U = af(z)\,, \tag{11}$$

gdzie a jest nieznanym wektorem, a $f(z)$ oznacza analityczną funkcję zmiennej zespolonej z, którą można przedstawić jako:

$$z = x_1 + px_2\,, \tag{12}$$

gdzie x_1 i x_2 są współrzędnymi na płaszczyźnie, a p oznacza nieznaną stałą zespoloną. Uwzględniając zależności (11) i (12) w równaniach pól sprzężonych (4) można otrzymać następujące kwadratowe zagadnienie własne:

$$\left\{Q + p(R + R^T) + p^2 T\right\}a = 0\,, \tag{13}$$

gdzie macierze Q, R oraz T zależą tylko od stałych materiałowych. Równanie (13) może być transformowane do postaci liniowego zagadnienia własnego.

Wiadomo, że zagadnienie własne (13) w przypadku dwuwymiarowym daje 3 pary zespolonych sprzężonych wartości własnych oraz odpowiadających im wektorów własnych. Wielkości te służą do konstrukcji rozwiązań fundamentalnych oraz ich pochodnych, które mają w tym wypadku postać:

$$\begin{aligned} U_{KL} &= \frac{-1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\sum_{J=1}^{3} A_{LJ} V_{JK} \ln(z_J - s_J)\right], \\ T_{KL} &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\sum_{J=1}^{3} B_{LJ} \frac{p_J n_1 - n_2}{z_J - s_J} V_{JK}\right], \end{aligned} \tag{14}$$

w powyższych równaniach A oznacza macierz, której kolumny zawierają wektory własne odpowiadające wartościom własnym z dodatnią częścią urojoną, B to macierz zależna od A

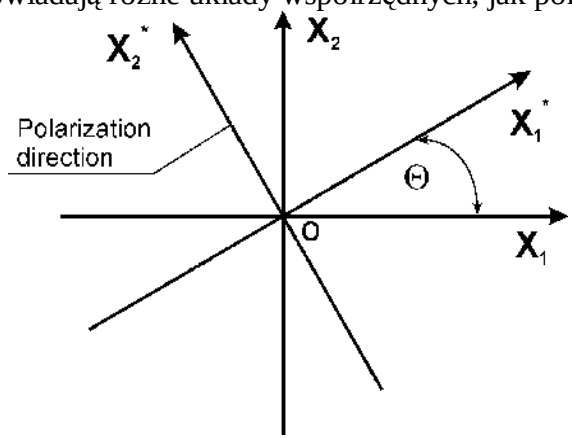
oraz macierzy zawierających stałe materiałowe. Macierz V zależy od macierz A i B. Zmienne zespolone z_J oraz s_J dane są przez:

$$\begin{aligned} z_J &= x_1 + p_J x_2 \\ s_J &= x_1^0 + p_J x_2^0 \end{aligned}, \tag{15}$$

gdzie x_1^0 oraz x_2^0 oznaczają współrzędne punktu źródłowego, a p_J jest j-tą wartością własną (z dodatnią częścią urojoną) zagadnienia (13); n_1 oraz n_2 to składowe wektora normalnego do brzegu.

3.2 Wpływ kierunku polaryzacji

Własności materiałowe piezoelektryków są określane w kierunku polaryzacji. Powyższe zadanie brzegowe sformułowano przy założeniu, że kierunek polaryzacji jest równoległy do osi pionowej globalnego układu współrzędnych. Piezoelektryki można polaryzować w różnych kierunkach, którym odpowiadają różne układy współrzędnych, jak pokazano na rys. 1:



Rys.1. Transformacja układu współrzędnych

Zagadnienie własne (13) w układzie osi polaryzacji ma postać [7]:

$$\left\{Q^* + p^*(R^* + (R^*)^T) + (p^*)^2 T^*\right\} a^* = 0, \tag{16}$$

Macierze w układzie obróconym można określić za pomocą macierzy obrotu Ω i macierzy określonej w pierwotnym układzie współrzędnych $\Omega(\Theta)$:

$$\begin{aligned} Q^* &= \Omega Q(\Theta)\Omega^T \\ R^* &= \Omega R(\Theta)\Omega^T \\ T^* &= \Omega T(\Theta)\Omega^T \end{aligned}, \tag{17}$$

Macierz obrotu względem osi prostopadłej do płaszczyzny x_1-x_2 ma postać:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Macierze zawierające stałe materiałowe dla układu obróconego można otrzymać przez transformację macierzy określonych w układzie pierwotnym:

$$\begin{bmatrix} Q(\Theta) & R(\Theta) \\ R^T(\Theta) & T(\Theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta I & \sin\Theta I \\ -\sin\Theta I & \cos\Theta I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & R \\ R^T & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Theta I & -\sin\Theta I \\ \sin\Theta I & \cos\Theta I \end{bmatrix}, \tag{19}$$

gdzie macierz I oznacza macierz jednostkową o rozmiarze macierzy Q, R i T.

Zagadnienie własne można wyrazić, w układzie obróconym, z wykorzystaniem (19) jako:

$$\Omega\{Q(\Theta) + p^*(R(\Theta) + R^T(\Theta)) + (p^*)^2 T(\Theta)\}\Omega^T a^* = 0, \tag{20}$$

co prowadzi, po wykorzystaniu równania na $Q(\Theta)$ z (19), do następującego równania:

$$\left\{Q + \left(\frac{\sin\Theta + p^*\cos\Theta}{\cos\Theta - p^*\sin\Theta}\right)(R + R^T) + \left(\frac{\sin\Theta + p^*\cos\Theta}{\cos\Theta - p^*\sin\Theta}\right)^2 T\right\}\Omega^T a^* = 0. \tag{21}$$

Porównując ostatnie równanie z równaniem (13) można wyznaczyć wielkości:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sin\Theta + p^*\cos\Theta}{\cos\Theta - p^*\sin\Theta} \\ a &= \Omega^T a^* \end{aligned} \tag{22}$$

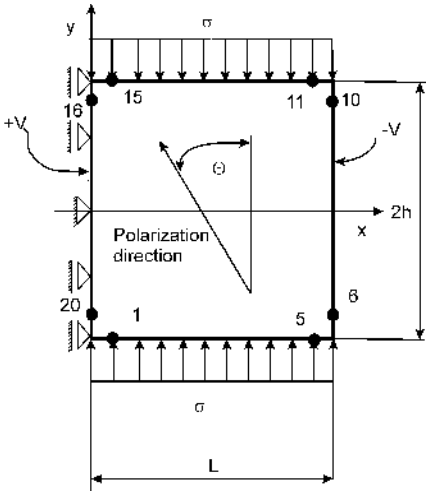
Należy zauważyć, że w rozwiązaniach fundamentalnych (14) występują macierze A i B, zawierające wektory własne. Macierze te również transformują się jak wektory (tensory pierwszego rzędu), ponieważ macierz obrotu Ω jest ograniczona tylko do obrotu względem osi prostopadłej do płaszczyzny x_1-x_2 , a nie dla każdej transformacji ortogonalnej [7]:

$$\begin{aligned} A &= \Omega^T A^* \\ B &= \Omega^T B^* \end{aligned}. \tag{23}$$

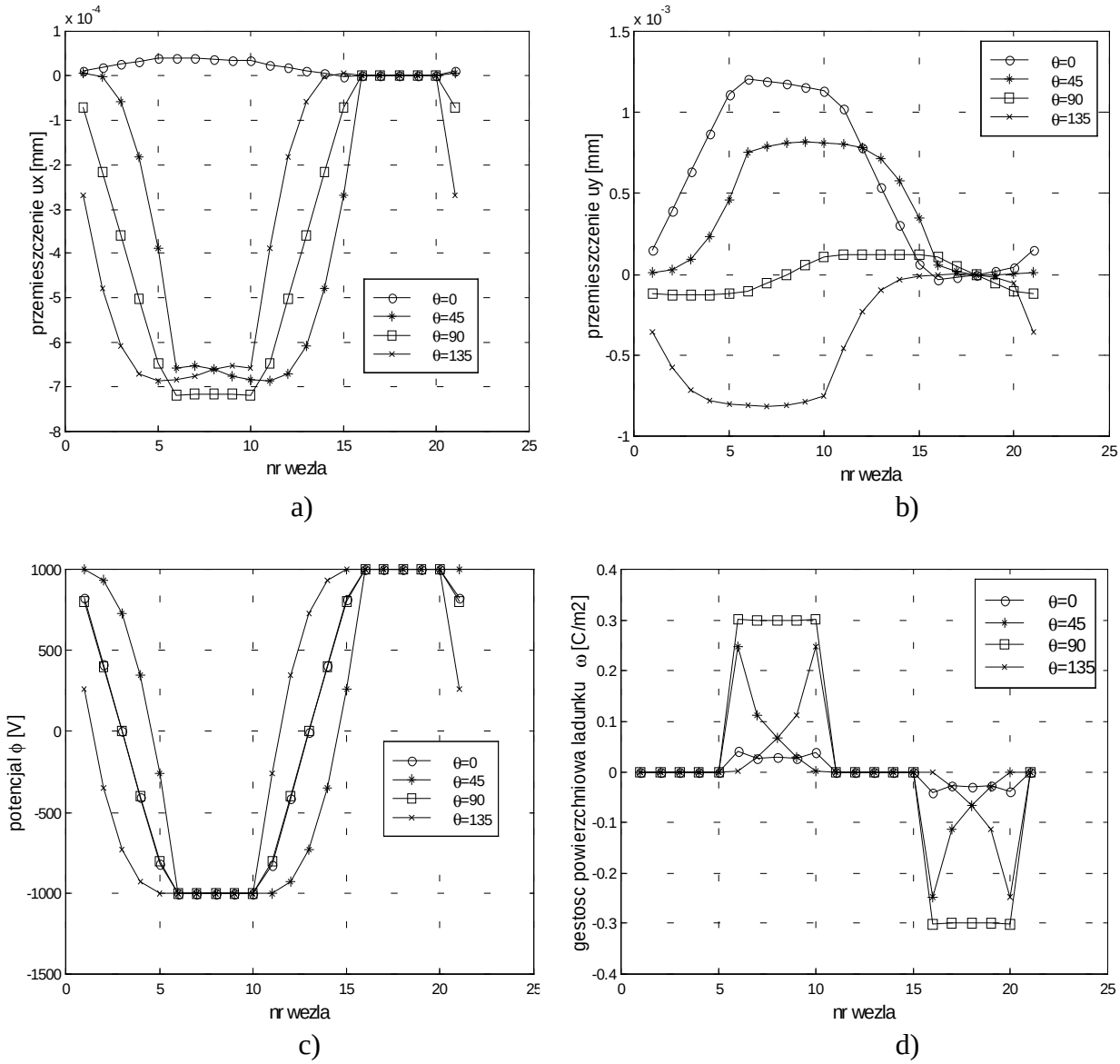
Używając formalizmu Stroha, określono wpływ kierunku polaryzacji (dla którego są określane własności materiałowe) na wartości własne i wektory własne, które służą do konstrukcji rozwiązania fundamentalnego. Znając własności w układzie osi polaryzacji, można je transformować do dowolnego układu obróconego o kąt Θ, za pomocą transformacji wartości własnych i wektorów własnych formalizmu Stroha.

4. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Rozważano tarczę o długości L= 1mm i wysokości 2h=1mm, wykonaną z materiału PZT-4 [2], podpartą i obciążoną jak na rys. 2. Założono naprężenia ściskające o wartości σ=5 MPa oraz zadano potencjał na krawędziach pionowych o wartości V_0=1000 V. Na krawędziach poziomych zadano warunek izolacji. Do dyskretyzacji brzegu tarczy użyto 20 elementów brzegowych. Na rysunkach pokazano rozkład przemieszczeń oraz wielkości elektrycznych przy uwzględnieniu kątów polaryzacji Θ=0, 45, 90, 135°.



Rys. 2. Tarcza wykonana z ceramiki PZT-4 wraz z warunkami brzegowymi



Rys. 3. Zmienność a) przemieszczeń w kierunku x, b) przemieszczeń w kierunku y, c) potencjału elektrycznego, d) gęstości powierzchniowej ładunku wzdłuż brzegu

Łatwo zauważyć, że zmiana kąta polaryzacji może jakościowo zmienić pole wybranej wielkości fizycznej, wynikającej z rozwiązania prezentowanego zadania brzegowego.

5. PODSUMOWANIE

Prezentowane przykłady świadczą o dużej przydatności MEB do rozwiązywania zagadnień brzegowych liniowej piezoelektryczności. Formalizm Stroha pozwala w prosty i skuteczny sposób uwzględnić wpływ kierunku polaryzacji na zachowanie się analizowanych układów. Dodatkowo formalizm ten umożliwia uzyskanie w zamkniętej formie rozwiązań fundamentalnych, co przy zastosowaniu innych metod (transformacja Radona, transformacja Fouriera, metoda szeregów) nie zawsze jest możliwe.

Praca finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w latach 2005-2006 jako projekt badawczy nr 4 T07A 051 28.

LITERATURA

1. Brebbia C.A., Dominguez J.: Boundary elements. An introductory course. Computational Mechanics Publications, McGraw – Hill Book Company, Southampton – Boston 1992.
2. Dziatkiewicz G., Fedelinski P.: Boundary element method for solving direct and inverse problems of piezoelectricity. In 10th International Conference on "Numerical Methods in Continuum Mechanics" NMCM 2005, CD-ROM Proceedings, University of Zilina, Zilina 2005.
3. Gaul L., Kogl M.: A boundary element method for transient piezoelelctric analysis. Engineering Analysis with Boundary Elements, 24, 2000, s. 591-598.
4. Ikeda T.: Fundamentals of piezoelectricity. Oxford University Press, Oxford 1990.
5. Pan E.: A BEM analysis of fracture mechanics in 2D anisotropic piezoelectric solids. Engineering Analysis with Boundary Elements, 23, 1999, s. 67-76.
6. Rawa H.: Elektryczność i magnetyzm w technice. PWN, Warszawa 2001.
7. Ting T.C.T.: Anisotropic elasticity. Theory and applications. Oxford University Press, New York – Oxford 1996.

THE BEM ANALYSIS OF PIEZOELECTRICS INFLUENCE OF POLARIZATION DIRECTION

Summary. In this paper the boundary element method (BEM) is implemented to solve the static problem of two – dimensional linear piezoelectricity. The piezoelectric ceramic material is modelled as: homogenous, dielectric, linear elastic and transversal isotropic. The BEM fundamental solution is obtained using the Stroh formalism. The Stroh formalism allows to analyze efficiently influence of the polarization direction in the static, two – dimensional problems of linear piezoelectricity.