

## METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ANALIZIE DYNAMICZNEJ UKŁADÓW SPRĘŻYSTO – PLASTYCZNYCH

TOMASZ CZYŻ

*Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki, Politechnika Śląska*

Streszczenie. W pracy przedstawiono modelowanie materiałów sprężysto-plastycznych za pomocą sformułowania początkowych naprężeń metody elementów brzegowych (MEB). Omówiono stosowane równania całkowe oraz realizację numeryczną metody. W analizie dynamicznej zastosowano metodę podwójnej wzajemności MEB. Opracowano program komputerowy, który zastosowano do obliczenia przemieszczeń i naprężeń w tarczy obciążonej siłami dynamicznymi.

### 1. WSTĘP

W niektórych problemach inżynierskich, takich jak np. obróbka plastyczna, model liniowo sprężystego materiału może okazać się niewystarczający do opisu zachodzących zjawisk. Analiza dynamiczna układów o nieliniowościach fizycznych zalicza się do zagadnień trudnych i zwłaszcza w przypadku złożonej geometrii układu wymaga zastosowania metod komputerowych. W analizie tego typu zjawisk alternatywą dla dobrze znanej inżynierom metody elementów skończonych (MES) może być metoda elementów brzegowych (MEB). Zaletą tej metody jest przede wszystkim dokładność obliczania naprężeń oraz mniejsza liczba stopni swobody układu.

Podstawy MEB dla nieliniowych materiałów zostały omówione w książkach Tellesa [1] i Gao i Daviesa [2]. Najbardziej popularnymi sformułowaniami w analizie materiałów sprężysto-plastycznych są metoda początkowych naprężeń i odkształceń. W pracy zastosowano metodę początkowych naprężeń. Metoda ta wymaga dyskretyzacji obszaru ulegającego uplastycznieniu, jednak nie wpływa to na zwiększenie stopni swobody układu.

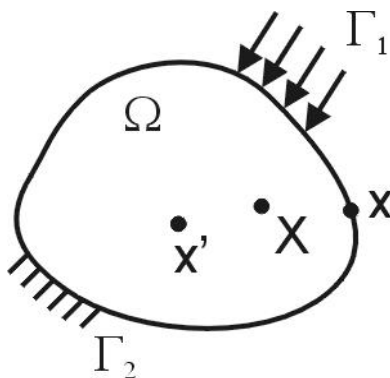
Zagadnienie dynamiczne można rozwiązywać MEB różnymi technikami. Początkowo używano do tego celu rozwiązań podstawowych elastodynamiki. Ta metoda pozwalała analizować układy nieskończone i nie wymagała dyskretyzacji wnętrza obszaru. Wadą jednak był długi czas obliczeń i skomplikowane rozwiązania podstawowe. Drugą metodą rozwiązania zagadnienia dynamicznego było użycie rozwiązań podstawowych elastostatyki. Uprościło to obliczenia, ale wymagało podziału całego obszaru ciała na komórki, w których aproksymowano przyspieszenia. Metoda prowadziła do znacznego zwiększenia stopni swobody układu.

W celu eliminacji całek po obszarze w analizie dynamicznej MEB w pracy zastosowano metodę podwójnej wzajemności MEB [3]. Metodę zastosowali po raz pierwszy Kontoni i Beskos [4] dla materiału sprężysto-plastycznego.

W prezentowanej pracy zastosowano elementy brzegowe i komórki wyższego rzędu niż w [4]. Zastosowano także własną procedurę iteracyjną.

## 2. RÓWNANIA MEB DLA MATERIAŁÓW SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH

Rozważmy ciało sprężysto-plastyczne (rys. 1) zajmujące obszar  $\Omega$  i ograniczone brzegiem  $\Gamma$ . Na części brzegu  $\Gamma_1$  zadane są siły powierzchniowe, a na części brzegu  $\Gamma_2$  określono przemieszczenia. Punkt  $x'$  jest dowolnym punktem ciała,  $x$  – punktem brzegowym, a  $X$  – punktem należącym do wnętrza ciała.



Rys. 1. Ciało sprężysto-plastyczne

Gdy znane są brzegowe przemieszczenia  $u_j(x, \tau)$  i siły powierzchniowe  $t_j(x, \tau)$ , w dowolnej chwili czasu  $\tau$  wówczas przemieszczenie  $u_j(x', \tau)$  i naprężenie  $s_{ij}(x', \tau)$  można wyznaczyć za pomocą równań całkowych MEB [4]:

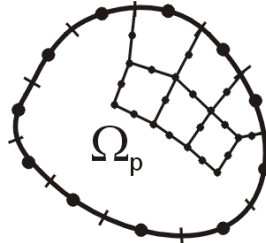
$$c_{ij}(x)u_j(x', \tau) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x, \tau)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x, \tau)d\Gamma(x) - \rho \int_{\Omega} U_{ij}(x', X)\ddot{u}_j(X, \tau)d\Omega(X) + \int_{\Omega} E_{jki}(x', X)\sigma_{jk}^p(X, \tau)d\Omega(X), \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}(x', \tau) = \int_{\Gamma} U_{ijk}(x', x)t_k(x, \tau)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} T_{ijk}(x', x)u_k(x, \tau)d\Gamma(x) - \rho \int_{\Omega} U_{ijk}(x', X)\ddot{u}_k(X, \tau)d\Omega(X) + \int_{\Omega} E_{ijkl}(x', X)\sigma_{kl}^p(X, \tau)d\Omega(X) + G_{ij}[\sigma_{kl}^p(X, \tau)]. \quad (2)$$

W powyższych równaniach  $c_{ij}(x')$  jest współczynnikiem zależnym od położenia punktu,  $\rho$  - gęstością,  $\ddot{u}_k(X, \tau)$  - przyspieszeniem punktu  $X$ ,  $s_{kl}^p(X, \tau)$  - naprężeniem plastycznym w punkcie  $X$ , a wielkości oznaczone dużymi literami to rozwiązania podstawowe i pochodne tych rozwiązań.

### 3. REALIZACJA NUMERYCZNA

Rozwiązanie numeryczne otrzymuje się poprzez dyskretyzację przemieszczeń, sił powierzchniowych i współrzędnych punktów brzegowych, oraz naprężeń w obszarze, który ulega uplastycznieniu (rys. 2). Brzeg ciała dzieli się na elementy, w których interpoluje się wielkości brzegowe, a obszar uplastyczniony dzieli się na komórki, w których interpoluje się naprężenia plastyczne.



Rys. 2. Dyskretyzacja układu

Brzeg ciała podzielono na 3-węzłowe elementy liniowe, a obszar uplastyczniony na 8-węzłowe komórki czworokątne. Zmienność wielkości interpolowano kwadratowymi funkcjami kształtu. Równania (1) ułożone dla węzłów brzegowych i równania (2) ułożone dla węzłów komórek można zapisać w formie macierzowej:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\mathbf{t} + \mathbf{E}\mathbf{s}^p, \quad (3)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{G}'\mathbf{t} - \mathbf{H}'\mathbf{u} - \mathbf{M}'\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{E}'\mathbf{s}^p. \quad (4)$$

W równaniach tych  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{t}$  oznaczają wektory przemieszczeń i sił powierzchniowych w węzłach brzegowych,  $\mathbf{s}^p$  - wektor naprężeń plastycznych w węzłach komórek obszaru uplastycznionego. Macierze  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}'$  powstają w wyniku całkowania odpowiednich rozwiązań podstawowych i funkcji kształtu wzdłuż elementów brzegowych, a macierze  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{E}'$  powstały wskutek całkowania rozwiązań podstawowych po obszarze komórek ulegających uplastycznieniu. Macierze  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{M}'$  są wyznaczone w wyniku aproksymacji przyspieszeń we wnętrzu obszaru na podstawie przyspieszeń brzegowych.

Rozwiązanie układu równań (3), odbywa się metodami całkowania bezpośredniego w dziedzinie czasu. W pracy zastosowano metodę Houbolta, która wprowadza sztuczne tłumienie i filtruje wysokie częstotliwości odpowiedzi układu związane z błędami numerycznymi. Powoduje to zmniejszenie zmienności przemieszczeń i naprężeń w czasie.

W każdym kroku czasowym obliczane są nieznane przemieszczenia i siły brzegowe oraz obliczane są naprężenia w komórkach wewnętrznych. W obydwu równaniach (3) i (4) występuje wektor nieznanych naprężeń plastycznych. Naprężenia te są obliczane za pomocą równania naprężeń (4) oraz związków konstytutywnych teorii plastyczności, które bazują na przyrostowej relacji pomiędzy naprężeniem i odkształceniem

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{sp} d\epsilon_{kl}, \quad (5)$$

gdzie  $d\epsilon_{kl}$  jest całkowitym przyrostem odkształcenia. Dla wzmocnienia izotropowego

$$C_{ijkl}^{sp} = C_{ijkl} - \frac{1}{\gamma} C_{ijmn} a_{mn} a_{op} C_{opkl}, \quad (6)$$

gdzie  $C_{ijkl}$  jest tensorem sprężystym, a  $a_{mn}$  jest pochodną funkcji plastyczności ze względu na odpowiednią składową naprężeń. Parametr  $\gamma$  również zależy od pochodnych potencjału plastyczności, od tensora sprężystości oraz parametru wzmocnienia  $H$

$$\gamma = a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + H. \quad (7)$$

Równanie naprężeń (4) zależy od niewiadomych brzegowych obliczonych w równaniu przemieszczeń (3), więc do rozwiązania problemu sprężysto-plastycznego w każdym kroku czasowym trzeba zastosować procedurę iteracyjną.

Na początku procedury iteracyjnej przyjmuje się naprężenia plastyczne obliczone w poprzednim kroku czasowym. Na podstawie tych naprężeń oblicza się niewiadome brzegowe z równania (3) oraz naprężenia sprężyste z równania (4). Znając przyrost naprężeń sprężystych

$$d\sigma_{ij}^s = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}, \quad (8)$$

można wyznaczyć przyrost naprężenia plastycznego [5]

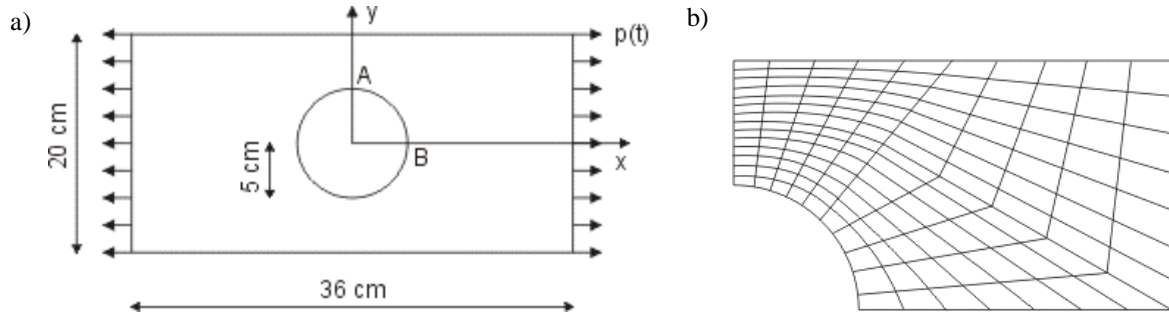
$$d\sigma_{ij}^p = \frac{1}{\gamma} C_{ijmn} a_{mn} a_{kl} d\sigma_{kl}^s. \quad (9)$$

Po dodaniu przyrostu do całkowitych naprężeń plastycznych podstawia się je do równania (3) obliczając znów niewiadome brzegowe, za pomocą których oblicza się naprężenia sprężyste z równania (4).

Procedurę powtarza się, aż zmiana wyników będzie na tyle mała, że będzie można ją pominąć [6]. W obliczeniach numerycznych stosowano tylko jedną iterację, ponieważ nie zauważono istotnej poprawy wyników przy większej liczbie powtórzeń.

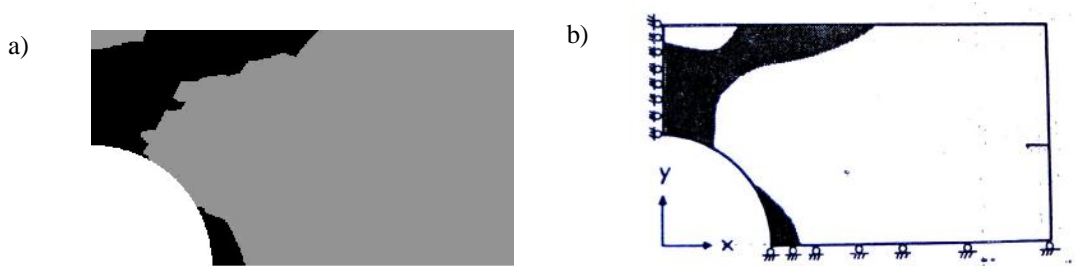
#### 4. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Na podstawie przedstawionego algorytmu obliczeń opracowano program komputerowy do analizy tarcz wykonanych z materiałów sprężysto-plastycznych. Tarcza z otworem znajdująca się płaskim stanie naprężenia o wymiarach przedstawionych na rys. 3a, jest poddana obciążeniu równomiernemu o przebiegu w czasie opisanym funkcją Heaviside'a o wartości  $p_0=75$  MPa. Materiał tarczy spełnia kryterium plastyczności Hubera-Misesa. Po uplastycznieniu wykazuje liniowe wzmocnienie i ma następujące własności: moduł Younga  $E=210000$  MPa, moduł wzmocnienia  $E_t = 5000$  MPa, współczynnik Poissona  $\nu = 0.3$ , gęstość  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>, granicę plastyczności  $\sigma_Y = 235$  MPa. Tarcza jest symetryczna względem osi  $x$  i  $y$ , więc analizowano tylko jej ćwiartkę. Wzdłuż linii podziału tarczę zamocowano na podporach przesuwnych. Brzeg ćwiartki tarczy został podzielony na 48 elementów brzegowych, a wewnątrz na 140 czworokątnych komórek (rys. 3b).

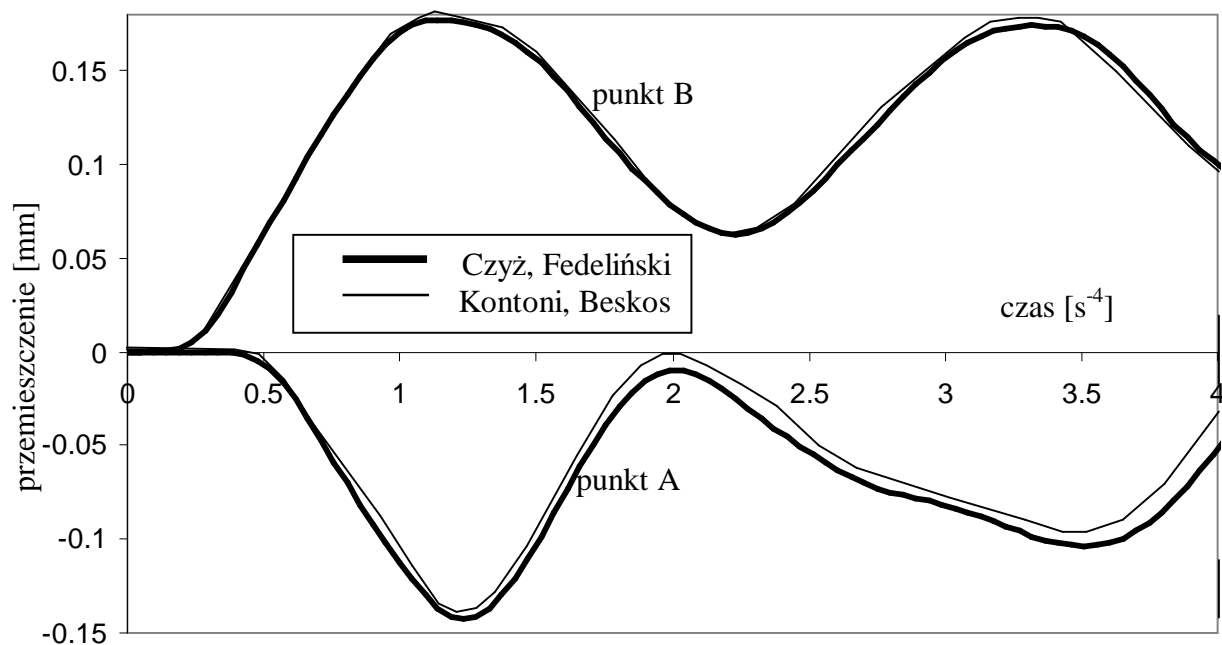


Rys. 3. Tarcza z otworem: a) wymiary, b) dyskretyzacja

Krok czasowy analizy wynosi  $4.7 \mu\text{s}$ , a czas analizy wynosił  $400 \mu\text{s}$ . Wyniki obliczeń numerycznych porównano z rozwiązaniami Kontoni i Beskos [4], którzy stosowali MEB i liniowe funkcje kształtu. Rys. 4 przedstawia porównanie stref, które uległy uplastycznieniu po zakończeniu analizy.

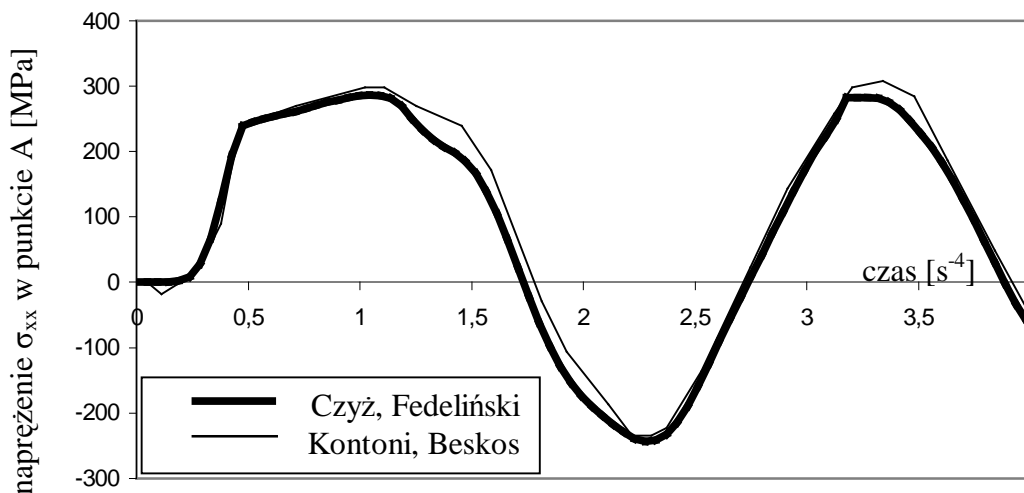


Rys. 4. Strefy plastyczne: a) Czyż i Fedeliński b) Kontoni i Beskos



Rys. 5. Porównanie przemieszczeń punktu A i B

W punkcie A porównano przemieszczenie pionowe, a w punkcie B przemieszczenie poziome (rys. 5). Na rys. 6 przedstawiono porównanie naprężeń  $\sigma_{xx}$  w punkcie A. Bardzo dobra zgodność wyników wykazuje poprawność zastosowanych algorytmów i opracowanego programu komputerowego.



Rys. 6. Porównanie naprężeń  $\sigma_{xx}$  w punkcie A

## LITERATURA

1. Telles J.C.F.: The boundary element method applied to inelastic problems, Lecture Notes in Engineering, Vol. 1. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983.
2. Gao X., Davies T.G.: Boundary element programming in mechanics. Cambridge University Press, 2002.
3. Dominguez J.: Boundary elements in dynamics, CMP, Southampton, 1993.
4. Kontoni D.P.N., Beskos D.E.: Transient dynamic elastoplastic analysis by the dual reciprocity BEM. Engineering Analysis with Boundary Elements, 12, 1993, s. 1-16.
5. Telles J.C.F, Carrer J.A.M.: Static and transient dynamic nonlinear stress analysis by the boundary element method with implicit techniques. Engineering Analysis with Boundary Elements, 9, 1994, s. 1-10.
6. Czyż T., Fedeliński P.: Elasto-plastic dynamic analysis by boundary element method. Ed. Garstecki A., Mochnacki B., Szczygiol N., w materiałach 16th International Conference on Computer Methods in Mechanics, Short Papers, Częstochowa, 2005, s. 69-70

## BOUNDARY ELEMENT METHOD IN DYNAMIC ANALYSIS OF ELASTOPLASTIC STRUCTURES

Summary. The paper shows numerical aspects of modelling elastoplastic materials by the boundary element method. The initial stress approach is used in the elastoplastic analysis. In the dynamic analysis mass matrices are computed by the dual reciprocity method (DRBEM). The computer program code was developed to compute displacements and stresses in a rectangular plate with a hole loaded by dynamic forces.