MODELOWANIE INŻYNIERSKIE ISNN 1896-771X
32, s. 65-70, Gliwice 2006

PODATNOŚĆ DYNAMICZNA PRĘTA SWOBODNEGO DRGAJĄCEGO WZDŁUŻNIE W RUCHU UNOSZENIA

ANDRZEJ BUCHACZ
SŁAWOMIR ŻÓŁKIEWSKI

Instytut Automatyzacji Procesów Technologicznych I Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Zakład Mechatroniki i Projektowania Układów Technicznych, Politechnika Śląska, Gliwice

Streszczenie. Praca dotyczy podatności układów prętowych swobodnych przy uwzględnieniu w rozpatrywanym aparacie matematycznym wpływu ruchu unoszenia na ruch lokalny analizowanego ośrodka. Założono, że analizowany układ jest jednorodnym prętem sprężystym o przekroju symetrycznym. Celem pracy jest wyprowadzenie podatności dynamicznej pręta swobodnego drgającego wzdłużnie z uwzględnieniem ruchu unoszenia. Podatność dynamiczną wyznaczono za pomocą przybliżonej metody Galerkina, wcześniej rzutując równania ruchu na osie globalnego układu współrzędnych.

1. WSTĘP

W pracy rozważa się problem drgań wzdłużnych rotującego pręta, uwzględniając przy tym wzajemny wpływ ruchu unoszenia i ruchu względnego. Dynamikę układów technicznych można opisać, biorąc pod uwagę podatność dynamiczną. W niniejszym opracowaniu podatność dynamiczną wyznaczono za pomocą metody Galerkina. W dotychczasowych pracach rozważa się zarówno konkretne szczegółowe przypadki konfiguracji układu mechanicznego [1-6] jak też podejmuje się próby uogólnienia ruchu [5,6].

Rozważany układ porusza się ruchem obrotowym, który opisano za pomocą układu lokalnego i układu globalnego. Równania ruchu wyprowadzono za pomocą równań Lagrange'a II rodzaju, przyjmując współrzędne i prędkości uogólnione jako rzuty na osie globalnego układu współrzędnych. Ruch pręta ograniczono do ruchu w jednej, wybranej płaszczyźnie układu współrzędnych.

2. MODEL PRĘTA SWOBODNEGO DRGAJĄCEGO WZDŁUŻNIE W RUCHU UNOSZENIA

Rozważa się model pręta swobodnego, będącego w ruchu unoszenia. Pręt jest jednorodny, sprężysty o pełnym przekroju A. Założono niezmienność przekroju na całej długości pręta l. Pręt wykonano z tworzywa o module sprężystości podłużnej Younga E oraz gęstości ρ. Koniec pręta obciążono siłą harmoniczną o jednostkowej amplitudzie, działającą w kierunku zgodnym z osią pręta. Znane są warunki początkowe pręta. Model opisano w układzie globalnym niezależnym od pręta, który jest płaskim układem dwuwymiarowym (XY) oraz w układzie lokalnym (xy).

Wyznaczono równania ruchu pręta w następującej postaci [1,2]:
Rzut na oś X:

$$\frac{\partial^2 u_X}{\partial t^2} - \frac{E}{r} \cdot \frac{\partial^2 u_X}{\partial x^2} = w^2 \cdot \left(s \cdot \cos j + u_X \right) + 2 \cdot w \cdot \frac{\partial u_Y}{\partial t} \tag{1}$$

Rzut na oś Y:

$$\frac{\partial^2 u_Y}{\partial t^2} - \frac{E}{r} \cdot \frac{\partial^2 u_Y}{\partial x^2} = w^2 \cdot \left(s \cdot \sin j + u_Y \right) - 2 \cdot w \cdot \frac{\partial u_X}{\partial t} \tag{2}$$

3. PODATNOŚĆ DYNAMICZNA PRĘTA SWOBODNEGO DRGAJĄCEGO WZDŁUŻNIE W RUCHU UNOSZENIA

Przyjęto opis funkcji przemieszczenia uwzględniając już na samym początku obliczeń to, że wymuszenie ma charakter harmoniczny, a co za tym idzie, funkcja własna zmiennej czasu jest również funkcją harmoniczną. Poszukuje się, zatem rozwiązania jako:

$$u_X = \sum_{n=0}^{\infty} A_X \cdot \cos(kx) \cdot \sin(\Omega t), \tag{3}$$

$$u_Y = \sum_{n=0}^{\infty} A_Y \cdot \cos(kx) \cdot \cos(\Omega t), \tag{4}$$

gdzie zgodnie z warunkami brzegowymi oraz przy uwzględnieniu zerowej częstości drgań własnych:

$$k = n \cdot \frac{p}{l}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \mathbf{K}, . \tag{5}$$

Ortogonalizując równania ruchu, czyli mnożąc obustronnie przez funkcję własną zmiennej przemieszczenia oraz całkując obustronnie w granicach od zera do *l*, otrzymano równania odnośnie do dwóch rzutów na osie globalnego układu współrzędnych:
Rzut na oś X:

$$\begin{aligned} &\int_0^l \frac{\partial^2 u_X}{\partial t^2} \cdot \cos(kx)\, dx - \frac{E}{r} \cdot \int_0^l \frac{\partial^2 u_X}{\partial x^2} \cdot \cos(kx)\, dx = \\ &= \int_0^l w^2 \cdot \left(s \cdot \cos j + u_X \right) \cdot \cos(kx)\, dx + 2 \cdot w \cdot \int_0^l \frac{\partial u_Y}{\partial t} \cdot \cos(kx)\, dx. \end{aligned} \tag{6}$$

Rzut na oś Y:

$$\begin{aligned} &\int_0^l \frac{\partial^2 u_Y}{\partial t^2} \cdot \cos(kx)\, dx - \frac{E}{r} \cdot \int_0^l \frac{\partial^2 u_Y}{\partial x^2} \cdot \cos(kx)\, dx = \\ &= w^2 \cdot \int_0^l \left(s \cdot \sin j + u_Y \right) \cdot \cos(kx)\, dx - 2 \cdot w \cdot \int_0^l \frac{\partial u_X}{\partial t} \cdot \cos(kx)\, dx. \end{aligned} \tag{7}$$

Całkując przez części elementy równań (6 i 7), wyliczono:

$$\begin{aligned}&-\frac{E}{r}\cdot\left[X(x)\cdot\frac{\partial u_X}{\partial x}-X'(x)\cdot u_X\right]_0^l+\frac{E}{r}\cdot k^2\cdot\int_0^l u_X\cdot\cos(kx)\,dx+\int_0^l\frac{\partial^2 u_X}{\partial t^2}\cdot\cos(kx)\,dx=\\&=w^2\cdot\int_0^l(s\cdot\cos j+u_X)\cdot\cos(kx)\,dx+2\cdot w\cdot\int_0^l\frac{\partial u_Y}{\partial t}\cdot\cos(kx)\,dx,\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{E}{r}\cdot\left[X(x)\cdot\frac{\partial u_Y}{\partial x}-X'(x)\cdot u_Y\right]_0^l+\frac{E}{r}\cdot k^2\cdot\int_0^l u_Y\cdot\cos(kx)\,dx+\int_0^l\frac{\partial^2 u_Y}{\partial t^2}\cdot\cos(kx)\,dx=\\&=w^2\cdot\int_0^l(s\cdot\sin j+u_Y)\cdot\cos(kx)\,dx-2\cdot w\cdot\int_0^l\frac{\partial u_X}{\partial t}\cdot\cos(kx)\,dx.\end{aligned}\tag{9}$$

W wyniku zrzutowania warunków brzegowych oraz w związku z tym, że znana jest funkcja własna przemieszczenia, można zapisać kolejne zależności:

$$\begin{aligned}&X(0)=1,\quad X(l)=\cos(kl)=1,\\&X'(0)=0,\quad X'(l)=-k\cdot\sin(kl)=0,\\&E\cdot A\cdot\frac{\partial u_X(0,t)}{\partial x}=0,\quad E\cdot A\cdot\frac{\partial u_Y(0,t)}{\partial x}=0,\\&E\cdot A\cdot\frac{\partial u_X(l,t)}{\partial x}=2\cdot\int_0^l F_0\cdot d(x-l)\cdot\sin(\Omega t)dx,\quad E\cdot A\cdot\frac{\partial u_Y(l,t)}{\partial x}=0.\end{aligned}\tag{10}$$

Uwzględniając w równaniach (8 i 9) zależności (10) uzyskano:

$$\begin{aligned}&-\Omega^2\cdot A_X\cdot\sin(\Omega t)+\frac{E}{r}\cdot k^2\cdot A_X\cdot\sin(\Omega t)-\frac{2\cdot\cos(kl)}{r\cdot A\cdot g_n^2}\cdot\int_0^l F_0\cdot\sin(\Omega t)\cdot d(x-l)dx=\\&=\frac{1}{g_n^2}\cdot\int_0^l w^2\cdot s\cdot\cos(j)\cdot\cos(kx)\,dx+w^2\cdot A_X\cdot\sin(\Omega t)+2\cdot w\cdot\Omega\cdot A_Y\cdot\sin(\Omega t).\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}&-\Omega^2\cdot A_Y\cdot\cos(\Omega t)+\frac{E}{r}\cdot k^2\cdot A_Y\cdot\cos(\Omega t)=\\&=\frac{1}{g_n^2}\cdot\int_0^l w^2\cdot s\cdot\sin(j)\cdot\cos(kx)\,dx+w^2\cdot A_Y\cdot\cos(\Omega t)+2\cdot w\cdot\Omega\cdot A_X\cdot\cos(\Omega t).\end{aligned}\tag{12}$$

gdzie norma równania jest następująca:

$$g_n^2=\int_0^l\cos^2(kx)\,dx=\frac{2\cdot k\cdot l+\sin(2kl)}{4\cdot k}=\frac{l}{2}.\tag{13}$$

Dalej w celu uproszczenia obliczeń przyjęto s=0, czyli równania (11 i 12) zapisano jako:

$$-\Omega^2 \cdot A_X + \frac{E}{r} \cdot A_X \cdot k^2 - \frac{2 \cdot \cos(kl)}{r \cdot A \cdot g_n^2} \cdot \int_0^l F_0 \cdot d\,(x-l)dx = w^2 \cdot A_X + 2 \cdot w \cdot \Omega \cdot A_Y. \tag{14}$$

$$-\Omega^2 \cdot A_Y + \frac{E}{r} \cdot A_Y \cdot k^2 = w^2 \cdot A_Y + 2 \cdot w \cdot \Omega \cdot A_X. \tag{15}$$

Obliczając odpowiednie całki i po przedstawieniu układu w zapisie macierzowym oraz po przekształceniach matematycznych, otrzymano:

$$\begin{bmatrix} \left(c^2 \cdot k^2 - \Omega^2 - w^2\right) & 2 \cdot w \cdot \Omega \\ 2 \cdot w \cdot \Omega & \left(c^2 \cdot k^2 - \Omega^2 - w^2\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_X \\ A_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2 \cdot \cos(kl) \cdot F_0}{r \cdot A \cdot l} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

gdzie przez c oznaczono prędkość rozchodzenia się fali podłużnej w pręcie swobodnym:

$$c = \sqrt{\frac{E}{r}}. \tag{17}$$

W związku z wydzieleniem przez masę belki oraz rozwinięciem wyznaczników Cramera otrzymano wyznacznik główny układu w postaci:

$$W = \begin{vmatrix} \left(c^2 \cdot k^2 - \Omega^2 - w^2\right) & 2 \cdot w \cdot \Omega \\ 2 \cdot w \cdot \Omega & \left(c^2 \cdot k^2 - \Omega^2 - w^2\right) \end{vmatrix} \tag{18}$$

oraz wyznaczniki odnośnie do zmiennych A_X i A_Y:

$$W_{A_X} = \begin{vmatrix} \dfrac{2 \cdot \cos(kl) \cdot F_0}{r \cdot A \cdot l} & 2 \cdot w \cdot \Omega \\ 0 & \left(c^2 \cdot k^2 - \Omega^2 - w^2\right) \end{vmatrix}, \tag{19}$$

$$W_{A_Y} = \begin{vmatrix} \left(c^2 \cdot k^2 - \Omega^2 - w^2\right) & \dfrac{2 \cdot \cos(kl) \cdot F_0}{r \cdot A \cdot l} \\ 2 \cdot w \cdot \Omega & 0 \end{vmatrix}, \tag{20}$$

gdzie:

$$A_X = \frac{W_{A_X}}{W}, \quad A_Y = \frac{W_{A_Y}}{W}, \tag{21}$$

dalej po obliczeniach wyznaczono amplitudy:

$$A_X = \frac{2\cdot\cos(kl)\cdot F_0\cdot\left(c^2\cdot k^2-\Omega^2-w^2\right)}{r\cdot A\cdot l\cdot\left[\left(c^2\cdot k^2-\Omega^2-w^2\right)^2-4\cdot w^2\cdot\Omega^2\right]}, \tag{22}$$

$$A_Y = \frac{4\cdot\cos(kl)\cdot F_0\cdot w\cdot\Omega}{r\cdot A\cdot l\cdot\left[\left(c^2\cdot k^2-\Omega^2-w^2\right)^2-4\cdot w^2\cdot\Omega^2\right]}, \tag{23}$$

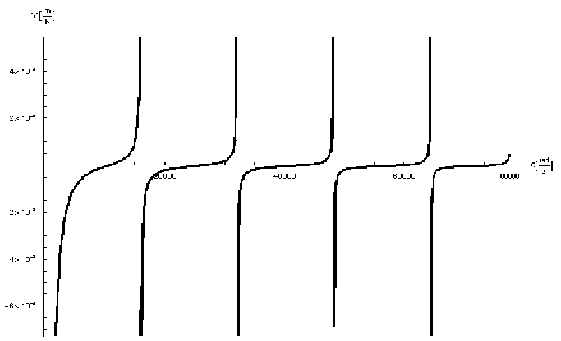
czyli poszczególne przemieszczenia są równe:

$$u_X = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot\cos(np)\cdot F_0\cdot\left(c^2\cdot n^2\cdot\frac{p^2}{l^2}-\Omega^2-w^2\right)\cdot\cos\left(np\,\frac{x}{l}\right)\cdot\sin(\Omega t)}{r\cdot A\cdot l\cdot\left[\left(c^2\cdot n^2\cdot\frac{p^2}{l^2}-\Omega^2-w^2\right)^2-4\cdot w^2\cdot\Omega^2\right]}, \tag{24}$$

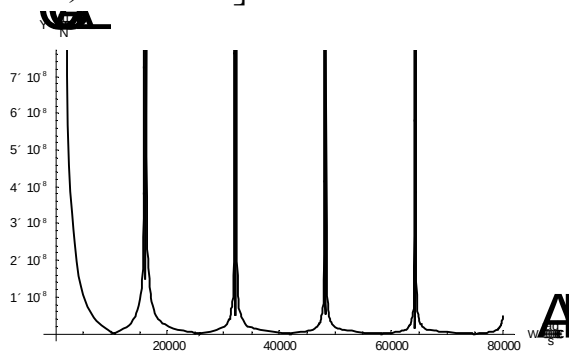
$$u_Y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot\cos(np)\cdot F_0\cdot w\cdot\Omega\cdot\cos\left(np\,\frac{x}{l}\right)\cdot\cos(\Omega t)}{r\cdot A\cdot l\cdot\left[\left(c^2\cdot n^2\cdot\frac{p^2}{l^2}-\Omega^2-w^2\right)^2-4\cdot w^2\cdot\Omega^2\right]}. \tag{25}$$

Podatność dynamiczna pręta swobodnego drgającego wzdłużnie z uwzględnieniem ruchu unoszenia jest określona formułą:

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot\cos(np)\cdot\left(c^2\cdot n^2\cdot\frac{p^2}{l^2}-\Omega^2-w^2\right)\cdot\cos\left(np\,\frac{x}{l}\right)}{r\cdot A\cdot l\cdot\left[\left(c^2\cdot n^2\cdot\frac{p^2}{l^2}-\Omega^2-w^2\right)^2-4\cdot w^2\cdot\Omega^2\right]}. \tag{26}$$



Rys. 5. Podatność dynamiczna (26) drgającego wzdłużnie pręta przy prędkości unoszenia ω=100 rad/s



Rys. 6. Moduł podatności dynamicznej (26) drgającego wzdłużnie pręta przy prędkości unoszenia ω=100 rad/s

4. PODSUMOWANIE

Podatność dynamiczną wyznaczono za pomocą przybliżonej metody Galerkina, wcześniej rzutując równania ruchu na osie globalnego układu współrzędnych. Praca jest wyprowadzeniem równań ruchu i podatności dynamicznej pręta drgającego wzdłużnie

z uwzględnieniem ruchu unoszenia. Otrzymane podatności dynamiczne mogą być wykorzystane w analizie układów złożonych. Różnice w charakterystykach wyznaczonych za pomocą metody ścisłej i metody przybliżonej są minimalne. Gdy układ porusza się ruchem unoszenia, wpływa to na jego charakterystyki dynamiczne. Sformułowany w pracy model matematyczny obejmuje związki pomiędzy występującymi lokalnie przemieszczeniami na skutek uwzględnienia odkształcalności ogniw oraz pomiędzy zadanym wstępnie ruchem roboczym.

LITERATURA

1 Buchacz A., Sformułowanie problemu drgań wzdłużnych układów prętowych. XLII Sympozjon PTMTS „Modelowanie w Mechanice" Wisła: 2003, ZN KMS s. 46-52
2 Buchacz A., Żółkiewski S.: Dynamic analysis of the manipulator's mechanism with longitudinal vibrations of flexible links in transportation. XLIII Sympozjon PTMTS „Modelowanie w Mechanice", Wydawnictwo Katedry Mechaniki Stosowanej z.34/04, Wisła 2004, s.23-24.
3 Buchacz A., Żółkiewski S.: Longitudinal three-dimensional vibrations of the round rod with taking into consideration the transportation effect. XII международную научно - техническую конференцию "Машиностроение и техносфера XXI века". International Conference of Machine-Building and Technosphere of the XXI Century. Sevastopol 2005 vol. 5, p. 17-20.
4 Buchacz A., Żółkiewski S.: Longitudinal vibrations of the flexible n-bar manipulator in terms of plane motion and taking into consideration the transportation effect. Worldwide Congress on Materials and Manufacturing Engineering and Technology. 7th International Conference on Computer Integrated Manufacturing, Intelligent Manufacturing Systems, Gliwice – Wisła 2005 Issue 6, p. 26-29.
5 Szefer G.: Dynamics of elastic bodies undergoing large motions and unilateral contact. Journal of Technical Physics. Quarterly Vol. XLI No. 4, Warszawa 2000.
6 Szefer G.: Dynamics of elastic bodies in terms of plane frictional motion. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2, 39, 2001.

Praca wykonana w ramach grantu 4 T07A 009 28 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Informatyzacji
This work was supported by Polish Ministry of Scientific Research and Information Technology
(Polish State Committee for Scientific Research) Grant No. 4 T07A 009 28

DYNAMICAL FLEXIBILITY OF THE FREE ROD WITH LONGITUDINAL VIBRATIONS IN TRANSPORTATION

Summary. The thesis considers the dynamical flexibility of free rod's systems with taking into consideration the transportation in the mathematical model and the global movement effect to local vibrations of the analyzing centre. The considered arrangement is the homogeneous flexible free rod with a symmetrical section. This paper's objective is deriving of the dynamical flexibility of the free rod vibrating with longitudinal vibrations and taking into consideration the transportation. First the equations of motion projected into coordinate axes of the global reference system were derived and after that evaluated the dynamical flexibility using the Galerkin's method.