MODELOWANIE INŻYNIERSKIE ISNN 1896-771X
32, s. 61-64, Gliwice 2006

SIECIOWA METODA MODELOWANIA MECHANICZNYCH UKŁADÓW ZŁOŻONYCH

ANDRZEJ BUCHACZ
ANDRZEJ WRÓBEL

Instytut Automatyzacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Politechnika Śląska

Streszczenie. Niniejszy artykuł przedstawia modelowanie drgających układów złożonych za pomocą grafu. Za podstawę obliczeń przyjęto drgającą belkę, opisaną za pomocą macierzy sztywności. Zdefiniowano jej parametry gabarytowe oraz punkty przyłożenia sił, które wywołują przemieszczenia. Przedstawiono sposób dekompozycji grafu na graf sprzężeń głównych i graf sprzężeń dodatkowych. Zdefiniowano macierz odcięć grafu i macierz współczynników biegunowych. Po przekształceniach matematycznych otrzymano macierz sztywności układu złożonego.

1. WSTĘP

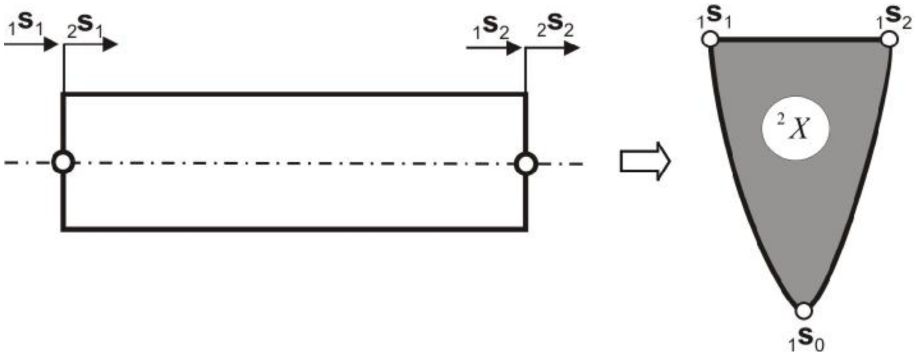
Obecnie projektowane układy mechaniczne powinny charakteryzować się coraz lepszymi parametrami. Wymagania te zmuszają projektantów do wykorzystywania komputerowych jednostek obliczeniowych dużej wydajności. Znane pakiety oprogramowania wspomagające prace inżyniera charakteryzują się dużymi możliwościami, lecz nie stanowią uniwersalnych programów, wykonujących wszystkie konieczne obliczenia. Obecnie bardzo często stosowane są metody nieklasyczne zwane również sieciowymi, do których zaliczamy metodę grafów i liczb strukturalnych. Fundamentalna różnica pomiędzy metodami sieciowymi a klasycznymi polega na łatwości zmiany konfiguracji układu bez konieczności tworzenia nowego układu opisującego dany model. Za podstawę obliczeń przyjęto giętnie drgającą belkę, opisaną za pomocą macierzy sztywności. Zdefiniowano jej parametry gabarytowe oraz punkty przyłożenia sił, które wywołują przemieszczenia. Dokonano przekształceń zgodnie z metodą dekompozycji grafu na graf sprzężeń głównych i graf sprzężeń dodatkowych. Następnie dołączono kolejne elementy tworząc układ złożony. Zbudowano nowy graf układu wieloogniwowego, wyodrębniono drzewo i przeciwdrzewo. Po przekształceniach matematycznych otrzymano macierz sztywności układu złożonego.

2. ODCINKOWO CIĄGŁY MODEL BADANEGO UKŁADU

Jako badany układ przyjęto odcinkowo ciągły model pręta prezentowany na rysunku 1a, charakteryzowany przez takie parametry jak: masę, długość, moduł Younga i pole przekroju.

Przez odwzorowanie wierzchołków grafu w przemieszczenia (wzór 1) ${}_1s_i \in {}_1S$, ${}_1x_i \in {}_1X$ został utworzony graf reprezentujący układ (rys. 1b), który posłużył do dalszej analizy układów złożonych. Na rysunku 1a zapisano siły jako ${}_2S_1, {}_2S_2$ wywołujące przemieszczenia ${}_1S_1, {}_1S_2$.

Przez macierz podatności (wzór 3) rozumiemy relację matematyczną opisującą przedstawione zależności siły-przemieszczenia. Zastosowano oznaczenia analogicznie do modelu prezentowanego w [4].



Rys.1 a) Model pręta, b) Graf reprezentujący model pręta

$$f: \quad {}_1S \rightarrow {}_1X, \tag{1}$$

Relacje pomiędzy wartościami wejściowymi – przemieszczeniami a wartościami wyjściowymi – siłami, które te przemieszczenia wywołują, określa wzór 2. Macierzową postać tego wzoru prezentuje wzór 3.

$${}_1S = Y\,{}_2S \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} {}_1s_1 \\ {}_1s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_2s_1 \\ {}_2s_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

W dalszej części pracy dokonano operacji matematycznych, wykorzystując pojęcie sztywności układu. Dla układu, jak na rysunku 1, określono sztywności, wykorzystując zależność 4 zgodnie z pracami [1,4].

$$Z_a = \frac{Y_b}{W}, Z_b = \frac{Y_a}{W}, Z_c = \frac{Y_c}{W}, Z_d = \frac{Y_d}{W}$$
$$gdzie \qquad W = Y_a Y_b - Y_c Y_d \tag{4}$$

3. SPOSÓB BUDOWY MACIERZY OPISUJĄCYCH UKŁAD

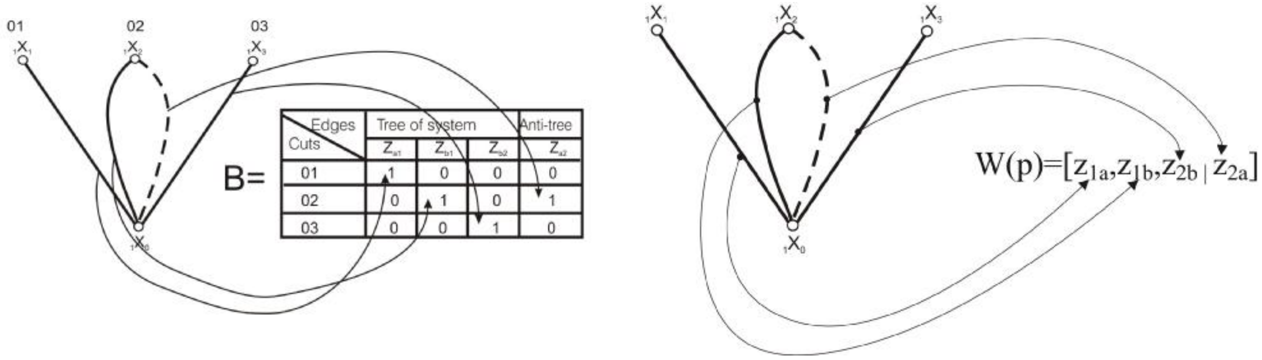
W celu wyznaczenia macierzy sztywności dowolnego układu konieczne jest prawidłowe wyznaczenie drzewa Lagrange'a. Na rysunku 3. drzewo układu złożonego zaznaczone linią ciągłą, natomiast przeciwdrzewo linią przerywaną. Po określeniu macierzy niezależnych odcięć grafu i macierzy współczynników równań biegunowych, korzystając z równania 5 wyznaczono macierz sztywności [2,4].

$$Z = \left[BW(p)B^T \right] \tag{5}$$

gdzie: B – jest to macierz odcięć grafu

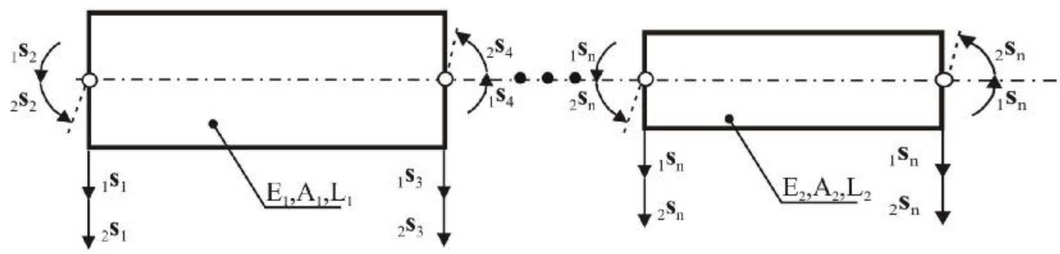
W(p) – jest to macierz współczynników równań biegunowych

Przez macierz współczynników równań biegunowych rozumiemy macierz współczynników równań wyrażających zależności pomiędzy przemieszczeniami a siłami, które są przypisane krawędzią grafu. Sposób budowy przedstawiono na rysunku 2.



Rys.2 Sposób budowy a) macierzy odcięć grafu, b)współczynników równań biegunowych

Wyznaczenie macierzy sztywności z wzoru 4. może okazać się niemożliwe ze względu na różne wielkości przyporządkowane wierzchołkom grafu. Pomocne w tym przypadku może być zastosowanie dekompozycji grafu, czyli wyznaczenie grafu sprzężeń głównych i grafu sprzężeń dodatkowych.



Rys.3 Model wieloogniwowy

$$
{}_2Z = \begin{bmatrix} Z_a^1 & Z_e^1 & Z_s^1 & Z_t^1 & 0 & 0 \\ Z_f^1 & Z_b^1 & Z_k^1 & Z_l^1 & 0 & 0 \\ Z_m^1 & Z_n^1 & Z_c^1 + Z_a^2 & Z_g^1 + Z_e^2 & Z_s^2 & Z_t^2 \\ Z_o^1 & Z_p^1 & Z_h^1 + Z_f^2 & Z_d^1 + Z_b^2 & Z_k^2 & Z_l^2 \\ 0 & 0 & Z_m^2 & Z_n^2 & Z_c^2 & Z_g^2 \\ 0 & 0 & Z_o^2 & Z_p^2 & Z_h^2 & Z_d^2 \end{bmatrix} \qquad (6)
$$

Dołączenia kolejnych ogniw dokonano w sposób prezentowany na rysunku 3. Po zastosowaniu metod macierzowych otrzymano ogólną macierz zależności wejściowo-wyjściowych - wzór 5. W celu wyznaczenia macierzy podatności należy obliczyć macierz odwrotną do prezentowanej macierzy sztywności (5).

5. WNIOSKI

W niniejszym artykule zaprezentowano sposób budowy macierz opisującej układ wieloogniwowy. Wyodrębniono sposób budowy macierzy odcięć grafu i macierzy współczynników równań biegunowych. Poprawność otrzymanych wyników zweryfikowano tworząc układ składający się z dwóch prętów o identycznych wymiarach gabarytowych i o długości „L" każdego pręta. Na końcach złożonego układu spodziewano się otrzymać podatność jak dla układu jednoogniwowego o długości „2L". Dodatkową zaletą prezentowanej metody jest możliwość wprowadzenia wzoru rekurencyjnego wspomagającego obliczenia komputerowe.

LITERATURA

1. Buchacz A., Świder J.: Szkielety hipergrafów w modelowaniu, badaniu i pozycjonowaniu manipulatorów robotów oraz podzespołów maszyn. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2000.
2. Buchacz A.: Komputerowe wspomaganie syntezy i analizy podzespołów maszyn modelowanych grafami i liczbami strukturalnymi. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1997.
3. Bishop R.E.D., Gladwell G.M.L., Michaelson S.: Macierzowa analiza drgań. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1972.
4. Buchacz A., Wróbel A., The recurrent formula of flexibility calculations of n-elements systems with Longitudinal vibrations, Computer Integrated Manufacturing 2005, s. 22-25

THE NET METOD OF MODELING OF COMPLEX MECHANICAL SYSTEMS

Better parameters should characterize present projecting systems. This technical requirements couse using high efficiency computers for all calculations. Standard packets of programs allow for determination of free vibrations frequency or vibrations analysis coused by exciting forces. They have a lot of possibilites; however there are not universal programs for all parameters calculations. The most popular are nonclassical methods called also net methods that contain graph and structural numbers methods. The application of the classical methods leads to uncomfortable and long-lasting differential equations. In case of changing overall dimensions or system parameters new analysis of the changed system is necessary.

This arclicle presents complex mechanical systems modeling with flexural vibrations by graph metods. Face area, Young's modulus, and mass density of the material from which the bar is made and dislocations caused by exciting forces were defined. Main stiffness matrix and the external stiffness matrix was derived using graph decomposition. In the following step next element was connected and we composed complex system. New graph describing new system was constructed.

Verification of corectness of results was done by constructing system with two bars with the same parameters and long 'L' of each bar. At the end of complex system we are expected the same flexibility as for one bar with long '2L'. Recived result confirms corectness of presented method and show them superiority then classical methods.