MODELOWANIE INŻYNIERSKIE ISNN 1896-771X
32, s. 317-322, Gliwice 2006

WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK TERMOFIZYCZNYCH MATERIAŁÓW STAŁYCH ZA POMOCĄ ROZWIĄZANIA ODWROTNEGO ZAGADNIENIA PRZEWODZENIA CIEPŁA WYKORZYSTUJĄCEGO DANE POMIAROWE

STANISŁAW KUCYPERA

Instytut Techniki Cieplnej, Politechnika Śląska

Streszczenie. W pracy przedstawiono algorytm wyznaczania kierunkowych współczynników przewodzenia ciepła oraz ciepła właściwego jako funkcji temperatury dla ortotropowych materiałów stałych. Dwuwymiarowy model matematyczny nieustalonego przepływu ciepła sformułowano na podstawie metody objętości kontrolowanych. Do optymalnego doboru warunków pomiarowych w celu polepszenia dokładności wyznaczanych wielkości zastosowano analizę wrażliwości. Odwrotne wewnętrzne zagadnienia przewodzenia ciepła rozwiązano metodą dynamicznej estymacji sekwencyjnej. Przedstawiono przykładowe wyniki badań.

1. WSTĘP

Identyfikacja właściwości termofizycznych materiałów za pomocą rozwiązania odwrotnego zagadnienia przewodzenia ciepła z uwzględnieniem mierzonych temperatur w wybranych punktach badanej próbki polega na poszukiwaniu w czasie jego rozwiązywania wartości jednego lub kilku współczynników opisujących właściwości cieplne badanego materiału. Bazują one często na nieustalonym przepływie ciepła w badanej próbce i należą do odwrotnych metod przewodzenia ciepła. Metody te, na podstawie odpowiedzi termicznej dokładnie określonego układu na zadane wymuszenie cieplne, umożliwiają wyznaczanie równocześnie wiele parametrów cieplnych lub ich głównych składowych (dla materiałów ortotropowych), a nawet zależności temperaturowych w trakcie wykonywania jednego eksperymentu. Należy jednak podkreślić, że metody odwrotne przewodzenia ciepła nie są pozbawione wad, które istotnie wpływają na ostateczny wynik identyfikacji. Do wad tych należy złe uwarunkowanie zagadnień odwrotnych w sensie istnienia jednoznaczności i stabilności rozwiązania. Dlatego przed rozwiązaniem zagadnienia odwrotnego dla danych rzeczywistych należy wykonać analizę szeregu rozwiązań symulowanych, aby zaprojektować optymalny eksperyment.

W pracy szczególną uwagę zwrócono na rozwiązanie i analizę zagadnienia symulowanego dla równoczesnej identyfikacji kierunkowych współczynnika przewodzenia ciepła i ciepła właściwego ortotropowych materiałów stałych. Analizę taką wykonano dla nieustalonego nagrzewania próbki na stanowisku pomiarowym. Do optymalnego projektowania eksperymentu wykorzystano współczynniki wrażliwości definiowane jako pochodne wielkości mierzonych względem

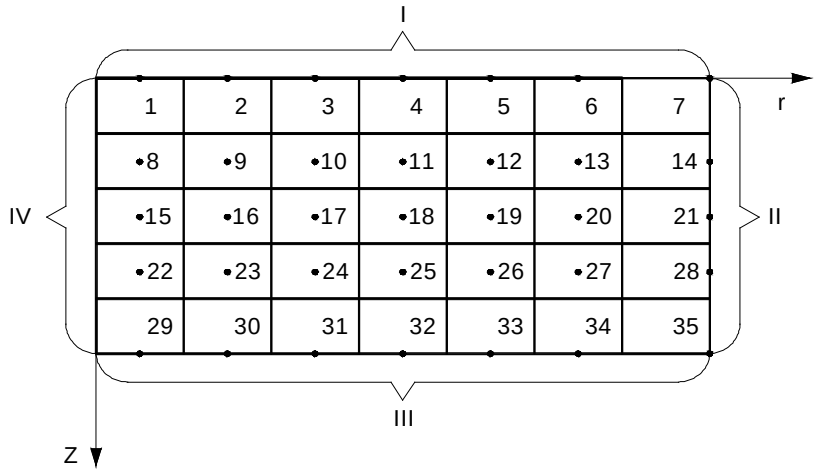
wyznaczanych parametrów. Analiza taka była wymagana do otrzymania stabilnych i dokładnych wyników. Model matematyczny sformułowano na podstawie metody bilansów elementarnych, nazywanej metodą objętości kontrolowanych. Jako wynik otrzymano dyskretny model matematyczny przepływu ciepła w próbce w postaci równania macierzowego.

Symulowany wektor pomiarów temperatury otrzymano z rozwiązania zagadnienia bezpośredniego dla założonych wartości parametrów i zakłócony białym szumem losowym o rozkładzie normalnym. Wyniki eksperymentu wykorzystano jako dane wejściowe do rozwiązania odwrotnego zagadnienia współczynnikowego nieustalonego przewodzenia ciepła. Przedstawiono wybrane wyniki badań.

2. SFORMUŁOWANIE MODELU MATEMATYCZNEGO I ALGORYTMU ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA ODWROTNEGO

2.1. Sformułowanie modelu matematycznego

W pracy rozpatrzono cylindryczna próbkę wykonaną z materiału ortotropowego-rys.1.



Rys. 1 Geometria analizowanego obszar próbki
i opis warunków brzegowych:
I-q W/m^2, II- α i t_{ot}, III- izolacja, IV- (warunek symetrii)

Dwuwymiarowe zagadnienie przepływu ciepła dla geometrii cylindrycznej opisano znanym równaniem różniczkowym [3]:

$$cr\frac{\partial t}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(l_z\frac{\partial t}{\partial z}\right)+\frac{1}{lr}\frac{\partial}{\partial r}\left(l_r\frac{\partial t}{\partial r}\right),\quad (r,z,t)\in(0,R)\times(0,d)\times(0,t_k) \tag{1}$$

Z warunkami granicznymi:

- dla powierzchni grzanej:

$$l_z\frac{\partial t}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\dot{q},\quad 0\le r\le R \tag{2}$$

- dla przeciwległej powierzchni czołowej:

$$l_z\frac{\partial t}{\partial z}\bigg|_{z=d}=a(t-t_{ot}),\quad 0\le r\le R \tag{3}$$

- dla powierzchni cylindrycznej:

$$l_r \frac{\partial t}{\partial r}\bigg|_{r=\pm R} = a(t - t_{ot}), \quad 0 \le z \le d \tag{4}$$

- warunek symetrii:

$$\lim_{r \to 0} l_r \frac{\partial t}{\partial r} = 0, \quad 0 \le z \le d \tag{5}$$

- warunek początkowy:

$$t(z, r, t = 0) = t_{ot}, \quad (r, z) \in (0, R) \times (0, d) \tag{6}$$

gdzie:
t - temperatura w próbce,
t_{ot} - temperatura otoczenia,
r, z - współrzędne przestrzenne (promieniowa i osiowa),
t - czas,
l_r, l_z - kierunkowe współczynniki przewodzenia ciepła materiału,
r - gęstość materiału,
c - ciepło właściwe materiału,
α - współczynnik wnikania ciepła,
R, d - promieniowy i osiowy rozmiar próbki.

2.2. Algorytm rozwiązania zagadnienia odwrotnego

Istota metody dynamicznej estymacji sekwencyjnej polega na sformułowaniu funkcji celu F w następującej postaci:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y} \setminus (\hat{\boldsymbol{y}}_{k+1/k} - y), \boldsymbol{a}_{k+1}) = (\hat{\boldsymbol{y}}_{k+1/k} - y)^T \boldsymbol{G}_{k+1/k} (\hat{\boldsymbol{y}}_{k+1/k} - y) + \boldsymbol{a}_{k+1}^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{a}_{k+1} \tag{7}$$

gdzie: **y** – rozszerzony wektor stanu,
$\hat{\mathbf{y}}_{k+1/k}$ – estymaty rozszerzonego wektora stanu w predykcji z kroku k do k+1,
G – macierz kowariancji błędów oceny wielkości estymowanych,
V – macierz kowariancji błędów wielkości mierzonych.

Dla większości materiałów stałych współczynnik przewodzenia ciepła l i ciepło właściwe **c** przedstawiane są w postaci wielomianu:

$$l_r(t) = \sum_{m=0}^{M_k} l_{m,r} t^m \;; \quad l_z(t) = \sum_{m=0}^{M_k} l_{m,z} t^m \;; \quad c(t) = \sum_{m=0}^{M_c} c_m t^m \tag{8}$$

l_{rm}, l_{zm}, c_m – stałe współ. identyfikowane metodą DES. Stąd M=M_r+M_Z+M_C. A rozszerzony wektor stanu można zapisać w postaci:

$$\boldsymbol{y} = \left[t_1, ..., t_N, l_{1_r}, ..., l_{M_r}\, l_{1_z}, ..., l_{M_z}, c_{1_c}, ..., c_{M_c}\right]^T = \left[y_1, ...y_N, y_{N+1}, ..., y_{N+M}\right] \tag{9}$$

Wektor reprezentujący błędy pomiarowe w kroku k+1 ma postać:

$$\boldsymbol{a}_{k+1} = \boldsymbol{W}_{k+1} - \hat{\boldsymbol{y}}_{k+1/k} \tag{10}$$

gdzie **W** wektor wielkości mierzonych w kroku czasowym k+1.

Minimalizując funkcję celu z uwzględnieniem wektora stanu (9) oraz wektora błędów pomiarowych (10), algorytm estymacji zmiennych stanu dla czasu k+1 przyjmuje postać:

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{y}}_{k+1/k} + \boldsymbol{M}_{k+1} \left[\boldsymbol{W}_{k+1} - \hat{\boldsymbol{y}}_{k+1/k}\right] \tag{11}$$

gdzie wektor predykcji określony jest równaniem: $\hat{\boldsymbol{y}}_{k+1/k} = \boldsymbol{w}_{k+1,k}(\hat{\boldsymbol{y}}_k)$ (12)

Natomiast macierz wagowa $\mathbf{M}_{k+1}$ zapisać można w postaci:

$$\boldsymbol{M}_{k+1} = \boldsymbol{G}_{k+1}\boldsymbol{J}_{k+1}^{T}(\boldsymbol{y}_k)\boldsymbol{V} \tag{13}$$

gdzie $\boldsymbol{J}$ nazywana jest macierzą czułości. Uwzględniając macierz kowariancji błędów predykcji $\boldsymbol{G}_{k+1/k}$ macierz kowariancji błędów estymacji wektora stanu można zapisać zależnością:

$$\boldsymbol{G}_{k+1} = \left[\boldsymbol{N}_{k+1} + \boldsymbol{G}_{k+1/k}^{-1}\right]^{-1} \tag{14}$$

gdzie macierz $\boldsymbol{N}_{k+1}$ uwzględnia wpływ błędów pomiarowych z kroku czasowego k na macierz kowariancji błędów estymacji w kroku $k+1$.

3. PRZYKŁADOWE WYNIKI BADAŃ

Jak wspomniano wcześniej, zagadnienia odwrotne należą do zagadnień źle uwarunkowanych w sensie istnienia jednoznaczności i stabilności rozwiązania. Ogólnie mówiąc, nie mają one uniwersalnego rozwiązania, gdyż otrzymane rozwiązania są bardzo czułe na błędy wielkości wejściowych, które najczęściej pochodzą z pomiarów. Dlatego przed rozwiązaniem zagadnienia rzeczywistego powinno być analizowane zagadnienie symulowane. Analiza taka, powinna obejmować badanie wpływu różnych czynników określających warunki przeprowadzenia eksperymentu (np. położenie i liczbę termopar itp.) i umożliwić ich optymalizację.

W pracy analizę taką wykonano za pomocą współczynników wrażliwości $Z_{i,j}$ definiując je jako pochodne temperatury w punktach pomiarowych względem wyznaczanych parametrów termofizycznych badanego materiału, tzn:

$$Z_{i,j} = p_j \frac{\partial T_i}{\partial p_j} \tag{15}$$

gdzie **p** jest wektorem wyznaczanych parametrów. Do rozwiązania zagadnienia bezpośredniego oraz analizy wrażliwości przyjęto materiał próbek o gęstości ρ =1180 kg/m^3. Próbki wykonane były w kształcie cylindrów o średnicy d = 71,9 mm i wysokości δ = 12,45 mm. Gęstość strumienia ciepła dopływająca do pojedynczej próbki na powierzchni I przyjęto $\dot{q}$ = 591 W/m^2. Współczynnik wnikania ciepła na cylindrycznej powierzchni próbki II przyjęto 5 W/m^{2}K i temperaturę otoczenia 21.5 ^{O}C. Dla testów numerycznych założono następujące zależności parametrów termofizycznych w funkcji temperatury:

$$\begin{aligned} l_r(t) &= l_{0,r} + l_{1,r}t = 0{,}182 + 0{,}005t \\ l_z(t) &= l_{0,z} + l_{1,z}t = 0{,}162 + 0{,}002t \\ c &= c_0 + c_1 t = 1500 + 5t \end{aligned} \tag{16}$$

W tym przypadku ilość identyfikowanych parametrów M = 6, a parametrami tymi są współczynniki: $l_{0,r}$, $l_{1,r}$, $l_{0,z}$, $l_{1,z}$, c_0, c_1. W eksperymencie numerycznym otrzymany rozkład temperatury z rozwiązania zagadnienia bezpośredniego zaburzano wg zależności:

$$t_i^{zab} = t_i^{nzab} + n(1-2x) \tag{17}$$

gdzie:

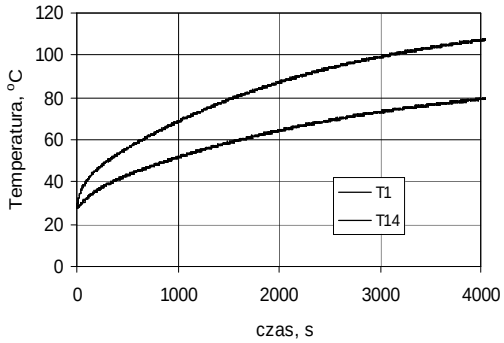
t_i^{zab} - temperatura otrzymana w wyniku zaburzenia,

t_i^{nzab} - temperatura otrzymana z rozwiązania zagadnienia bezpośredniego,

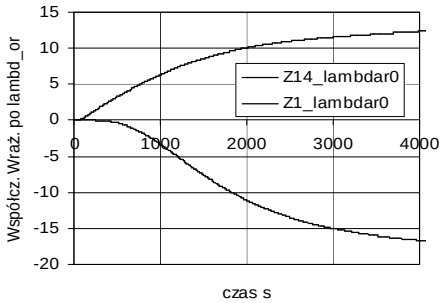
ν - założony maksymalny błąd pomiaru,

x - liczba losowa z zakresu [0;1].

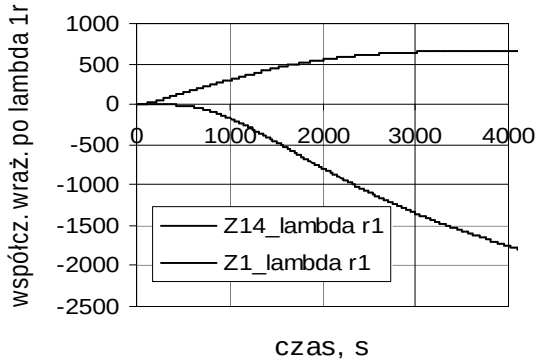
Na rys. 2 przedstawiono z rozwiązania zagadnienia bezpośredniego i zaburzone błędem ν =2 K zmiany temperatury powierzchni próbek w funkcji czasu, wyniki przykładowej analizy wrażliwości przedstawiono na rysunkach (3-8) oraz wyniki estymacji pokazano w tabeli 1.



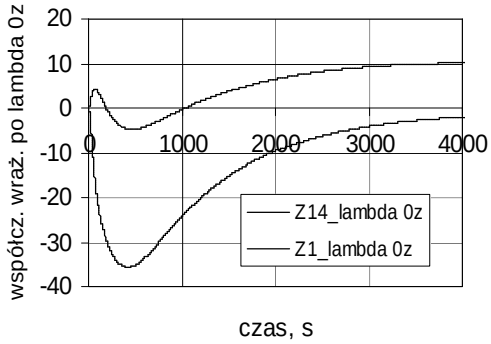
Rys. 2. Rozkład temperatury w funkcji czasu



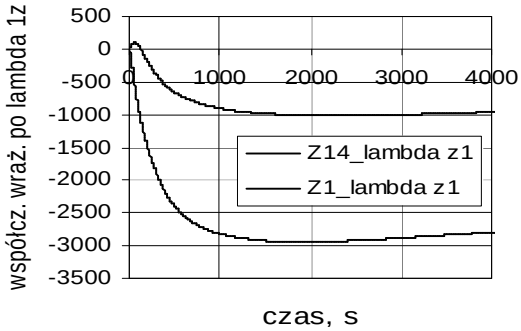
Rys. 3. Rozkład współczynnika wrażliwości $Z_{l_{r0}}$ temperatur t_1 i t_{14} w funkcji czasu



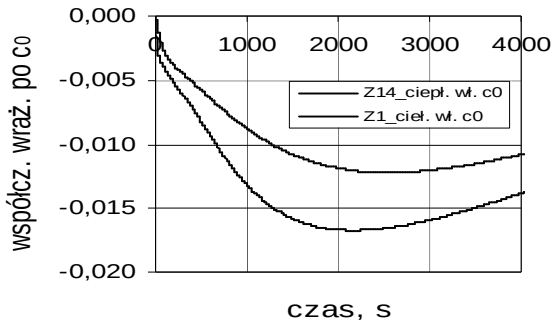
Rys. 4. Rozkład współczynnika wrażliwości $Z_{l_{r1}}$ temperatur t_1 i t_{14} w funkcji czasu



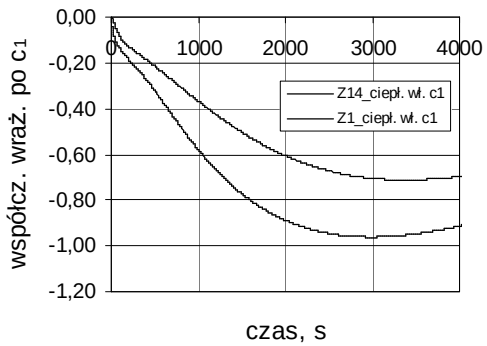
Rys. 5. Rozkład współczynnika wrażliwości $Z_{l_{z0}}$ temperatur t_1 i t_{14} w funkcji czasu



Rys. 6. Rozkład współczynnika wrażliwości $Z_{l_{z1}}$ temperatur t_1 i t_{14} w funkcji czasu



Rys. 7. Rozkład współczynnika wrażliwości $Z_{c_{p0}}$ temperatur t_1 i t_{14} w funkcji czasu



Rys. 8. Rozkład współczynnika wrażliwości $Z_{c_{p0}}$ temperatur t_1 i t_{14} w funkcji czasu

Jako początkowe wartości do estymacji przyjęto odpowiednio: λ_{0r}=0.1W/(mK), λ_{1r}=0.003W/(mK), λ_{0z}=0.08 W/(mK), λ_{1z}=0.001 W/(mK), c_0=2500 J/(kgK) oraz c_1=10 J/(kgK). Prawdziwe wartości estymowanych współczynników podano w równaniu (16). Wartości estymowanych współczynników wraz czasami ich estymacji oraz wartościami odchyleń standardowych dla poszczególnych współczynników podano w tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki estymacji parametrów termofizycznych badanej próbki

	λ_{0r}	λ_{1r}	λ_{0z}	λ_{1z}	c_0	c_1
Wart. parametru po estym.	0.17998	0.004988	0.16197	0.00201	1498.56	5.01712
Czas estymacji, s	1780	1568	850	560	1000	1510
Odchylenie standardowe	0.00381	0.00006	0.00451	0.00008	8.91	0.18951

5. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

Na podstawie przedstawionych wyników badań (rys. 2-8 i tab.1) można stwierdzić, że zastosowanie metody DES do rozwiązywania odwrotnych współczynnikowych zagadnień przewodzenia ciepła umożliwia:

- jednoznacznie określanie najbardziej prawdopodobnych wartości wyznaczanych parametrów,
- kontrolowanie na bieżąco dokładność, obliczeń za pomocą elementów macierzy kowariancji,
- stosunkowo szybką estymację danego parametru przy odpowiednim doborze warunków pomiarowych.

Przeprowadzone badania pozwoliły zauważyć, że zwiększenie ilości wyznaczanych parametrów wymaga wydłużenia czasu pomiaru oraz wykonania ich bardziej starannie (z większą dokładnością).Ważną zaleta metody jest to, że w przypadku osiągnięcia prawdziwej wartości estymowanego parametru wartość ta nie zmienia się mimo dalej prowadzonego procesu estymacji.

LITERATURA

1. Modelowanie numeryczne pól temperatury. Praca zbiorowa pod red. J. Szarguta. Warszawa: WNT, 1992.
2. Kucypera S.: Zastosowanie metody estymacji sekwencyjnej i danych pomiarowych do równoczesnego wyznaczania współczynnika przewodzenia ciepła i ciepła właściwego ciał stałych. ZNKMS, z. nr 18, Gliwice 2002.
3. Kacprzyński B.: Planowanie eksperymentów. Podst. Mat. Warszawa: WNT, 1974.

DETERMINATION OF THE THERMOPHYSICAL CHARACTERISTICS OF THE SOLIDS BY MEANS OF SOLUTION OF THE INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEM AND MEASUREMENTS DATE

Summary. In the paper an algorithm of determining the directional coefficients thermal conductivity and specific heat as a function of temperature for a ortotropic solid materials has been presented. Two-dimensional mathematical model of the transient heat conduction was formulated using control volume method. The sensitivity analysis was carried out to the optimal selection of the measurement conditions in consideration of accuracy of the determined quantities. The inverse heat conduction problem has been solved by means of the dynamic sequential estimation method. The exemplary results of study are presented.