

DOBÓR FUNKCJI WŁASNEJ PRZEMIESZCZENIA UKŁADÓW DRGAJĄCYCH GIĘTNIE W RUCHU UNOSZENIA

ANDRZEJ BUCHACZ, SŁAWOMIR ŻÓŁKIEWSKI

*Institut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania,
Politechnika Śląska
e-mail:slawomir.zolkiewski@polsl.pl*

Streszczenie. Praca dotyczy problemu drgań giętnych elementarnych układów belkowych poruszających się obrotowym ruchem unoszenia. Poszukuje się rozwiązania za pomocą metody Galerkina, poprzez przybliżenie rozwiązania szeregiem iloczynów funkcji własnych zmiennej przemieszczenia oraz zmiennej czasu. Przedstawiono algorytm doboru funkcji własnej przemieszczenia belkowych układów swobodnych obracających się względem jednego ze swoich końców oraz algorytm doboru funkcji własnej przemieszczenia układów utwierdzonych, umieszczonych na obrotowym stole.

1. WSTĘP

W artykule rozważa się problem drgających giętnie układów znajdujących się w ruchu unoszenia. Poddano analizie proste układy belkowe i wyprowadzono funkcję własną przemieszczenia, która w dalszym etapie analizy dynamicznej posłuży do wyznaczenia podatności dynamicznej tych układów. Analiza układów belkowych w ruchu unoszenia nie należy do prostych zagadnień, w związku z czym podjęto się podstawowych założeń upraszczających. Główne założenia dotyczą przyjęcia rozważanego układu jako układu liniowego oraz analizy układu w stanie ustalonym przy stałej prędkości kątowej, czyli prędkości ruchu głównego traktowanej w niniejszym opracowaniu jako prędkość unoszenia. Analizowane układy obracają się w jednej płaszczyźnie globalnego układu współrzędnych. Założono, że belki są wykonane z jednorodnego sprężystego tworzywa o przekroju symetrycznym, stałym na całej długości belki.

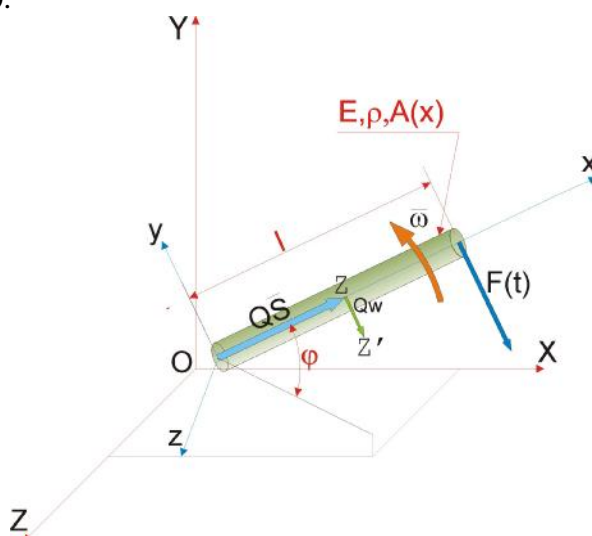
2. DOBÓR FUNKCJI WŁASNEJ PRZEMIESZCZENIA BELKI

2.1. Warunki brzegowe belki swobodnej

Założono, że na jeden z końców belki (rys. 1) działa harmoniczna siła poprzeczna o jednostkowej amplitudzie, co jest zgodne z definicją podatności dynamicznej. Drugiemu końcowi belki przypisano zerowy moment zginający oraz zerową siłę poprzeczną. Układ warunków brzegowych zapisano jako:

$$\begin{cases} E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} \right] = 0, \\ E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} \right] = -2 \cdot \int_0^l F_0 \cdot d(x-l) \cdot \sin(\Omega t) dx = -1 \cdot \sin(\Omega t), \end{cases} \quad (1)$$

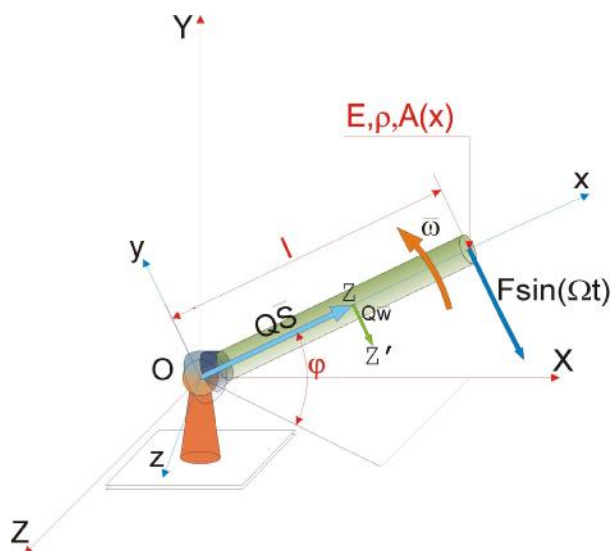
w każdej chwili $t \geq 0$.



Rys. 1. Schemat rozważanej belki swobodnej

2.2. Warunki brzegowe belki utwierdzonej na obrotowym stole

Na swobodny koniec belki (rys. 2) działa siła o jednostkowej amplitudzie, natomiast przemieszczenie w miejscu zamocowania jest równe zero, z kolei momenty zginające, zarówno w punkcie podparcia jak i na swobodnym końcu belki, są też równe zero.



Rys. 2. Schemat rozważanej belki utwierdzonej

Warunki brzegowe cechuje więc następujący układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(0,t) = 0, \\ E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0, \\ E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} \right] = -2 \cdot \int_0^l F_0 \cdot d(x-l) \cdot \sin(\Omega t) dx = -1 \cdot \sin(\Omega t), \end{array} \right. \quad (2)$$

w każdej chwili $t \geq 0$.

2.3. Zagadnienie własne

Przy warunkach brzegowych na podstawie (1), zagadnienie brzegowe z definicji jednorodne przedstawiono jako:

$$\begin{aligned} X^{IV}(x) - k^4 \cdot X(x) &= 0, \\ X''(0) &= 0, \quad X'''(0) = 0, \\ X''(l) &= 0, \quad X'''(l) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Rozwiązanie ogólne jest następujące:

$$X(x) = C_1 \cdot \sin(kx) + C_2 \cdot \cos(kx) + C_3 \cdot \sinh(kx) + C_4 \cdot \cosh(kx), \quad (4)$$

czyli po spełnieniu warunków brzegowych otrzymano układ równań:

$$\begin{aligned} -C_2 + C_4 &= 0, \\ -C_1 + C_3 &= 0, \\ -C_1 \cdot \sin(kl) - C_2 \cdot \cos(kl) + C_3 \cdot \sinh(kl) + C_4 \cdot \cosh(kl) &= 0, \\ -C_1 \cdot \cos(kl) + C_2 \cdot \sin(kl) + C_3 \cdot \cosh(kl) + C_4 \cdot \sinh(kl) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

skąd otrzymano wartości własne poprzez przyrównanie wyznacznika charakterystycznego układu do zera:

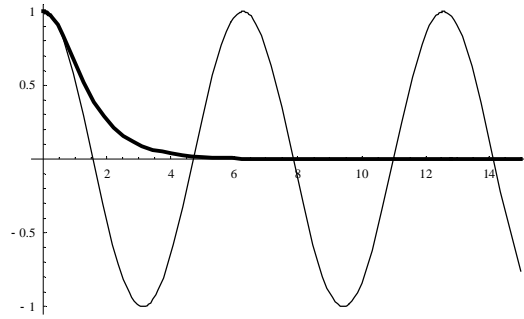
$$\cos(kl) = \frac{1}{\cosh(kl)}. \quad (6)$$

Rozwiązanie równania (6) można wyznaczyć za pomocą metody graficznej, bądź też ze zdecydowanie większą dokładnością przy użyciu metody numerycznej, np. za pomocą dowolnego pakietu oprogramowania matematycznego.

Po wyliczeniu drogą numeryczną oraz uwzględnieniu zerowej częstości drgań własnych, pierwsze cztery wartości własne z równania (6) są równe:

$$\begin{aligned} k_0 l &= 0, \\ k_1 l &= 4,73004074486270, \\ k_2 l &= 7,85320462409584, \\ k_3 l &= 10,9956078380017, \end{aligned} \quad (7)$$

Graficznie przedstawiono równanie na wykresie (rys. 3):



Rys. 3. Graficzne rozwiązanie równania (6)

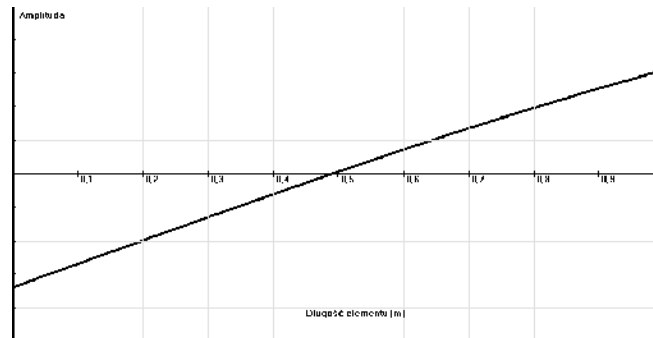
Ciąg wartości własnych (7) można przybliżyć wyrażeniem:

$$k \approx \frac{2 \cdot n + 1}{2 \cdot l} \cdot p, \quad n = 0 \Rightarrow k = 0. \quad (8)$$

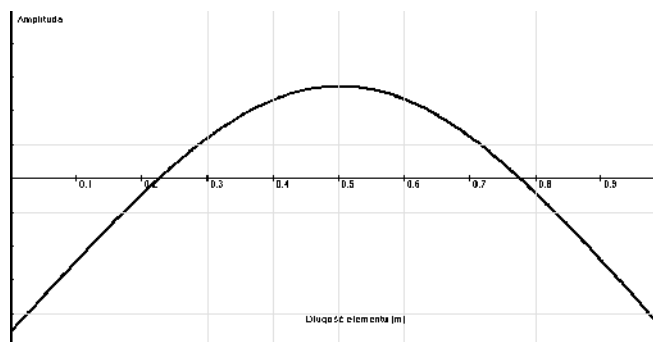
Funkcja własna przemieszczenia po wyliczeniu odpowiednich stałych jest równa:

$$X(x) = C_1 \cdot \left[\begin{array}{l} \sin(kx) + \frac{\cos(kl) - \cosh(kl)}{\sin(kl) + \sinh(kl)} \cdot \cos(kx) + \sinh(kx) + \\ + \frac{\cos(kl) - \cosh(kl)}{\sin(kl) + \sinh(kl)} \cdot \cosh(kx) \end{array} \right]. \quad (9)$$

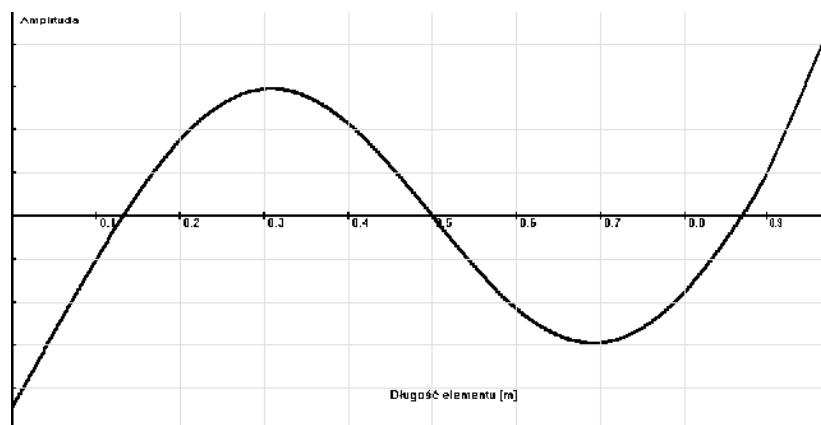
Na (rys. 4-8) przedstawiono kolejne postacie drgań belki swobodnej.



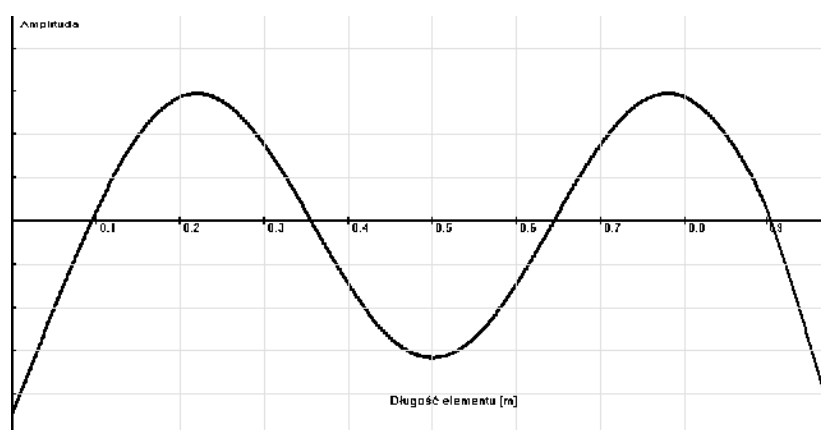
Rys. 4. Zerowa postać drgań belki swobodnej drgającej giętnie



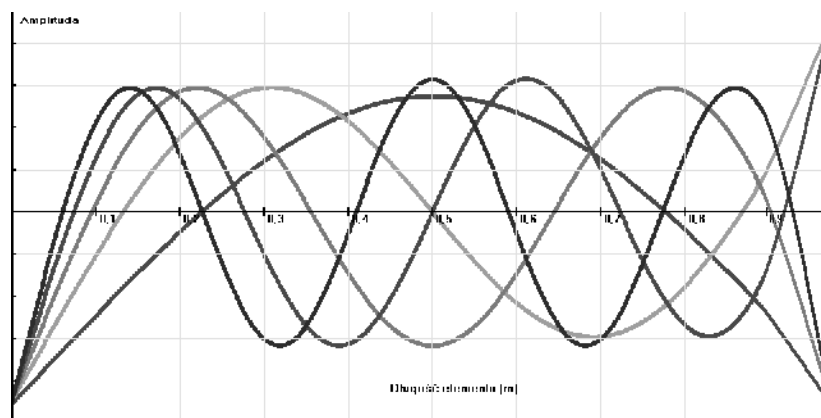
Rys. 5. Pierwsza postać drgań belki swobodnej drgającej giętnie



Rys. 6. Druga postać drgań belki swobodnej drgającej giętnie



Rys. 7. Trzecia postać drgań belki swobodnej drgającej giętnie



Rys. 8. Postacie drgań belki swobodnej drgającej giętnie

Z kolei przy warunkach brzegowych na podstawie (2), zagadnienie brzegowe z definicji jednorodne przedstawiono jako:

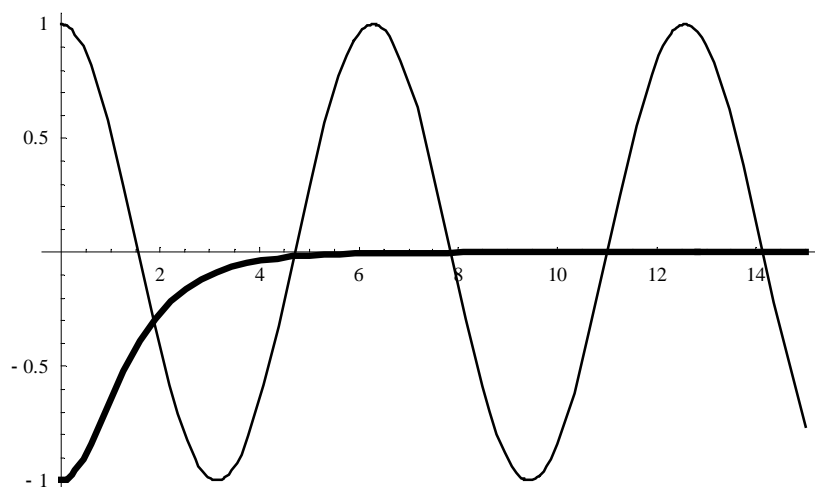
$$\begin{aligned}
 X^{IV}(x) - k^4 \cdot X(x) &= 0, \\
 X(0) &= 0, \quad X''(0) = 0, \\
 X''(l) &= 0, \quad X'''(l) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Rozwiązanie ogólne (4), prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0, \\ C_1 + C_3 &= 0, \\ -C_1 \cdot \sin(kl) - C_2 \cdot \cos(kl) + C_3 \cdot \sinh(kl) + C_4 \cdot \cosh(kl) &= 0, \\ -C_1 \cdot \cos(kl) + C_2 \cdot \sin(kl) + C_3 \cdot \cosh(kl) + C_4 \cdot \sinh(kl) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

skąd otrzymano wartości własne poprzez przyrównanie wyznacznika charakterystycznego układu do zera, co graficznie przedstawiono na wykresie (rys. 9):

$$\cos(kl) = -\frac{1}{\cosh(kl)}, \quad (12)$$



Rys. 9. Graficzne rozwiązanie równania (12)

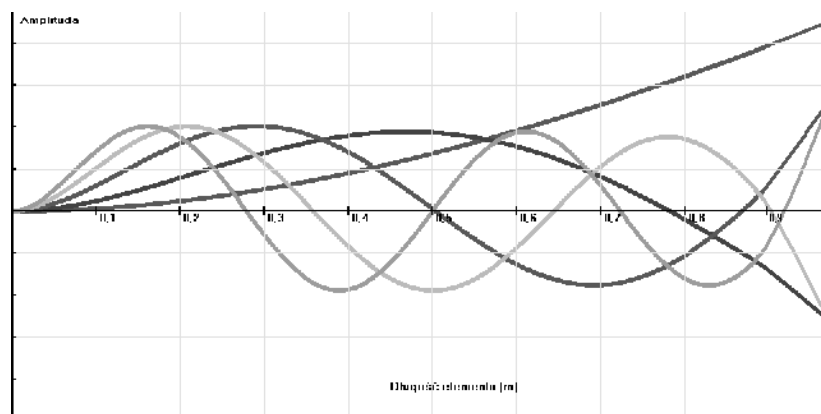
Po wyliczeniu drogą numeryczną pierwsze cztery wartości własne z równania (12) są równe:

$$\begin{aligned} k_1 l &= 1,87510406871196, \\ k_2 l &= 4,69409113297417, \\ k_3 l &= 7,85475743823761, \\ k_4 l &= 10,9955407348755. \end{aligned} \quad (13)$$

A dalej, po przybliżeniu otrzymanych wyników, poprzez formułę:

$$X(x) = C_1 \cdot \begin{bmatrix} \sin(kx) + \frac{\cos(kl) + \cosh(kl)}{\sin(kl) - \sinh(kl)} \cdot \cos(kx) - \sinh(kx) + \\ -\frac{\cos(kl) + \cosh(kl)}{\sin(kl) - \sinh(kl)} \cdot \cosh(kx) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Na rys. 8 przedstawiono zestawienie postaci drgań belki utwierdzonej na podstawie wyprowadzonej formuły (14).



Rys. 10. Postacie drgań belki utwierdzonej

Postacie drgań układów belkowych w ruchu są tożsame z postaciami drgań układów stacjonarnych, zasadnicze różnice w tego typu układach występują w równaniach ruchu oraz warunkach brzegowych, gdzie istnieje potrzeba rzutowania poszczególnych zależności na osie inercjalnego układu współrzędnych.

3. PODSUMOWANIE

Przeanalizowano belkowe układy w ruchu unoszenia ze względu na wyprowadzoną funkcję własną zmiennej przemieszczenia. Otrzymane wyniki mogą być wykorzystane przy wyznaczaniu podatności dynamicznej układów rozważanych w niniejszym opracowaniu. Znajomość funkcji własnej przemieszczenia oraz funkcji własnej czasu jest czynnikiem, dzięki któremu możliwe będzie rozwiązanie układu ze względu na przemieszczenie całkowite układu. Wyprowadzone formuły matematyczne wykorzystają się w rozwiązaniu układów za pomocą metody Galerkin.

Praca wykonana w ramach grantu 4 T07A 009 28
finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Informatyzacji

This work was supported by Polish Ministry of Scientific Research and Information
Technology (Polish State Committee for Scientific Research) Grant No. 4 T07A 009 28

LITERATURA

1. Buchacz A., Żółkiewski S.: Transverse vibrations of the elastic multielement manipulator in terms of plane motion and taking into consideration the transportation effect. 8th Conference on Dynamical Systems – Theory and Applications, Łódź 2005, Proceedings vol. 2, s.641-648.
2. Buchacz A., Żółkiewski S.: Equations of motion of the two-link system vibrating transversally and longitudinally in transportation. International Conference of Machine-Building and Technosphere of the XXI Century. Sevastopol 2006 vol. 4, s. 188-192.
3. Buchacz A., Żółkiewski S.: Dynamic analysis of the mechanical systems vibrating transversally in transportation. Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering vol. 20, issues 1-2, 2007, s. 331-334.

4. Szefer G.: Dynamics of elastic bodies undergoing large motions and unilateral contact. "Journal of Technical Physics". Quarterly Vol. XLI No. 4, Warszawa 2000.
5. Szefer G.: Dynamics of elastic bodies in terms of plane frictional motion. "Journal of Theoretical and Applied Mechanics", 2001, 2, 39,.

SELECTION OF THE EIGENFUNCTION OF DISPLACEMENT FOR TRANSVERSALLY VIBRATING SYSTEMS IN TRANSPORTATION

Summary. This work considers the problem of vibrating beam's systems in transportation. There is searched the solution by using the Galerkin's method, assumed the solution as a sum of products of eigenfunctions of displacement variables and eigenfunctions of time variables. The algorithm of selection of the eigenfunction of displacement of the free-free rod rotating round the tip of beam and the algorithm of selection of the eigenfunction of displacement of fixed beam on the rotational table were presented. Considered rods were described in the local reference frame connected to the rotating rod and in the global reference frame.