

NIESTABILNOŚĆ ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ STATYKI WYBRANYCH TYPÓW UKŁADÓW PRĘTOWYCH W WYSOKIEJ TEMPERATURZE

JERZY PIŁŚNIAK

*Katedra Teorii Konstrukcji Budowlanych, Politechnika Śląska
e-mail: jerzy.pilsniak@polsl.pl*

Streszczenie. Oddziaływanie wysokiej temperatury na stalowe elementy konstrukcyjne powoduje uaktywnienie procesów reologicznych, które, w uproszczeniu, można opisać za pomocą równań pełzania w wersji potęgowej. Pełne równania fizyczne opisujące jednowymiarowy stan naprężenia zawierają trzy składniki: liniowy (sprężystość, rozszerzalność liniowa), nieliniowy oraz związany z pełzaniem.

1. WSTĘP

Stalowe układy prętowe poddane wpływom pożaru wykazują cechy nieliniowe, plastyczne oraz reologiczne. Na podstawie map *Ashby'ego* można zauważyć, że w temperaturze dochodzącej do 2/3 temperatury topnienia, przy stosunkowo niskich naprężeniach (do około 0.5 granicy wytrzymałości stali) dominujący wpływ na prędkość odkształceń ma pełzanie. Takie warunki mogą występować w słabo oraz średnio obciążonych prętowych układach stalowych poddanych wpływom pożaru [1,3].

W pracy podjęto próbę oceny stabilności równań statyki opisujących płaskie układy prętowe. Szczegółowa analiza dotyczyła dwóch klas układów:

- *ściskany słup prosty poddany stałej (wysokiej) temperaturze.* Dla tego układu określono czas krytyczny zniszczenia. W opracowaniu starano się określić wpływ poszczególnych składników równania konstytutywnego na przebieg rozwiązania.
- *utwierdzony i ściskany słup prosty w czasie schładzania.* Dla szczególnych danych materiałowych rozwiązania statyki okazały się niestabilne – powodem niestabilności jest w tym przypadku samo równanie konstytutywne. Istotnym czynnikiem jest wzrost wartości modułu sprężystości w trakcie spadku temperatury.

Rozpatrywane układy są obciążane mechanicznie (stałe w czasie obciążenie) oraz występuje wpływ niemechaniczny w postaci stałej lub zmiennej temperatury. Wpływ temperatury jest na tyle duży, że ujawniają się reologiczne cechy materiału. W rozważaniach przyjęto założenie o małych deformacjach układów (tak więc analizowane były tylko niewielkie „odchylenia” geometrii układu od stanu wyjściowego). Równania statyki stanowią układ równań różniczkowych typowy dla zagadnień dynamiki. Równania te analizowane były pod kątem stabilności rozwiązań.

Wyniki analizy stabilności równań, uzyskane przez autora:

- dla pierwszego układu w rozwiązaniu równań statyki pojawia się efekt „blow-out”, określono czas krytyczny zniszczenia oraz porównano uzyskane wyniki dla obliczeń wcześniejszych (patrz np. konferencja „Modelowanie w Mechanice”, Wisła 2006).
- dla drugiego układu (schładzany słup ściskany) znaleziono, że rozwiązania równań statyki wykazują cechy niestabilne, ale tylko dla szczególnych wartości stałych materiałowych. Autor starał się oszacować obszary rozwiązań niestabilnych.

1.1. Ważniejsze oznaczenia

$E(T)$ - moduł sprężystości	x_1, x_2 - współrzędne: wzdłuż oraz
$m, a_1(T)$ - wielkości związane składnikiem nieliniowym	prostopadle do osi słupa
$n, a_2(T)$ - wielkości związane z nieliniowym pełzaniem	u_1, u_2 - przemieszczenie wzdłuż oraz
g, A - grubość oraz pole przekroju stopki	prostopadle do osi słupa
h - wysokość przekroju	t_{kr} - czas krytyczny wybożenia
P - wartość siły osiowej w słupie	y_m - maksymalne ugięcie słupa dla $t=0$
	a_T - współczynnik rozszerzalności termicznej

2. CZAS KRYTYCZNY WYBOŻENIA SŁUPA O WŁASNOŚCIACH REOLOGICZNYCH

Rozważania dotyczą wybożenia ściskanego słupa prostego poddanego wpływom stałej temperatury. Na podstawie równań statyki oszacowano czas krytyczny wybożenia.

2.1. Równania konstytutywne

Równania konstytutywne opisujące własności stali w podwyższonej temperaturze uwzględniają cechy sprężyste, nieliniowe oraz reologiczne (nieliniowe pełzanie opisane prawem potęgowym) [2]:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\epsilon}}{E(T)} + a_1(T) m s^{m-1} \dot{\epsilon} + a_2(T) s^n \quad (1)$$

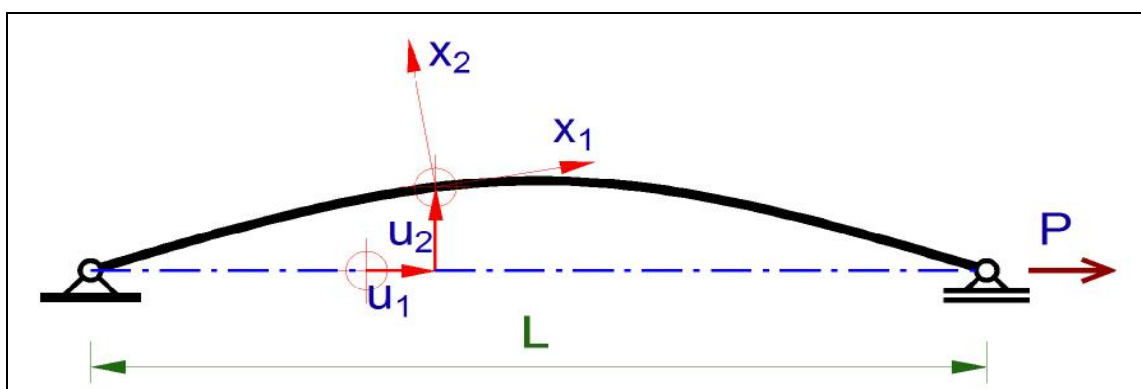
W równaniu tym założono, że temperatura T jest stała w czasie i przestrzeni, liczby n, m są traktowane jako nieparzyste: $x^n = |x|^{n-1} x$.

2.2. Równania określające prędkość zmian krzywizny $\dot{\kappa}(M, \dot{M})$

W rozważaniach upraszczamy przekrój poprzeczny, zakładając, że: $g \ll b$ oraz grubość środnika jest znacznie mniejsza niż g (por. rys.1 oraz rys.2). Słup traktujemy jako smukły, dlatego możemy przyjąć że $N/(2A) \approx 0$ oraz:

$$A = gb, \quad -s_1 = s_2 = s \quad (2)$$

$$M \approx Ash \Rightarrow s = \frac{M}{Ah} \Rightarrow \dot{\epsilon} = \frac{\dot{M}}{Ah} \quad (3)$$



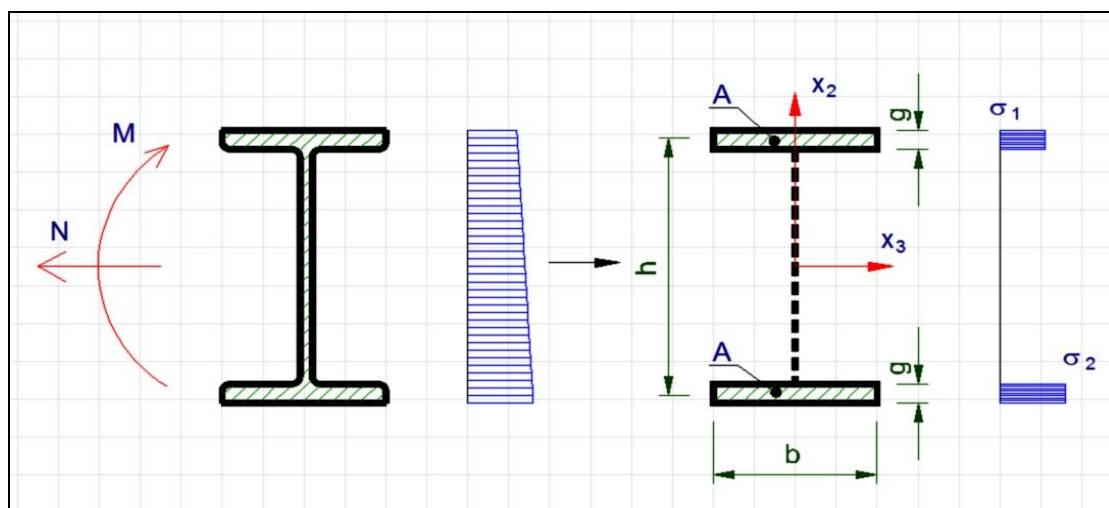
Rys. 1. Schemat statyczny

Dla włókien rozciąganych:

$$e = \frac{h}{2}k \Rightarrow \delta = \frac{h}{2}\delta \quad (4)$$

Podstawiając równania (2)-(4) do (1):

$$\frac{\delta h}{2} = \frac{M\delta}{AhE} + a_1 m \frac{M^{m-1}}{(Ah)^{m-1}} \frac{M\delta}{Ah} + a_2 \frac{M^n}{(hA)^n} \quad (5)$$



Rys. 2. Wyidealizowany przekrój dwuteowy

po zamianie oznaczeń ($c_e = \frac{1}{AhE}$):

$$\delta = c_e M\delta + c_p M^{m-1} M\delta + c_v M^n \quad (6)$$

2.3. Równania statyki ściskanego słupa

Korzystając z tradycyjnego zapisu równania różniczkowego osi odkształconej możemy wyrażenie (6) zapisać w formie (rys. 1):

$$-i_{2,11} \delta = c_e P i \delta + c_p (P u_2)^{m-1} P i \delta + c_v (P u_2)^n \quad (7)$$

czyli:

$$-u_{2,11} = c_e P u_2 + c_p P^m u_2^{m-1} + c_v P^n u_2^n \quad (8)$$

Warunki brzegowo-początkowe:

$$u_2(t, x_1 = 0) = 0, \quad u_2(t, x_1 = L) = 0, \quad u_2(0, x_1) = f_0(x_1) \quad (9)$$

Nieliniowe cząstkowe równanie różniczkowe (8) wraz z warunkami (9) stanowią matematyczny opis utraty stateczności poprzez wyboczenie giętkie słupa ściskanego.

Wprowadzono oznaczenie: $y_m = f_0(L/2)$.

2.4. Analiza równania (8)

Rozwiązanie równania (8) można uzyskać poprzez rozdzielanie zmiennych:

$$u_2(t, x_1) = t(t)x(x_1) \quad \text{z warunkami} \quad t(0) = 1, \quad x(0) = 0, \quad x(L) = 0 \quad (10)$$

tylko wtedy gdy $m=n$. Jeśli założymy, że $m=n$, to będzie możliwa analiza stabilności wyrażenia (8) dokonana jednak kosztem mocnego ograniczenia na część nieliniową równania konstytutywnego (1). Autor uznał jednak, że ze względu na możliwość analizy jakościowej warto przyjrzeć się takiemu rozwiązaniu.

Po podstawieniu (10) do (8) i rozdzieleniu zmiennych będziemy mieli dwa zależne przez stałą C , nieliniowe, zwyczajne równania różniczkowe:

$$\frac{-x'' - c_e P x}{x^n} = C = \frac{c_p P^n t^{n-1} + c_v P^n t^n}{t}, \quad C \in \mathfrak{R} \quad (11)$$

Analiza części przestrzennej

Przestrzenna (zależna od współrzędnej x_1) część równania (11):

$$x'' + c_e P x + C x^n = 0 \quad (12)$$

Do analizy wykorzystamy przybliżone rozwiązanie na okres drgań nieliniowego oscylatora [2]:

$$L = \frac{1}{2} T_0 = p y_m^2 \sqrt{\frac{y_m}{5 \int_0^{y_m} (c_e P x + C x^n) dx}} \quad (13)$$

Otrzymujemy wartość stałej C :

$$C = \frac{(n+4)(p^2 - c_e P L^2)}{5 L^2 y_m^{n-1}} \quad (14)$$

Analiza części czasowej

Czasowa (zależna od czasu t) część równania (11):

$$t'' = \frac{c_v P^n t^n}{C - c_p P^n t^{n-1}} \quad (15)$$

Warto zauważyć, że równanie to jest niestabilne dla $t_0 = t(t_{kr})$ dla którego zachodzi:

$$t'' = \pm \infty \quad \Rightarrow \quad C - c_p P^n t_0^{n-1} = 0 \quad (16)$$

Pełne rozwiązanie równania różniczkowego (15):

$$c_v P^n t + c_p P^n \ln(t) + \frac{C}{(n-1)t^{n-1}} = K_1 \quad (17)$$

Z warunku (10) $t(0) = 1$ wynika:

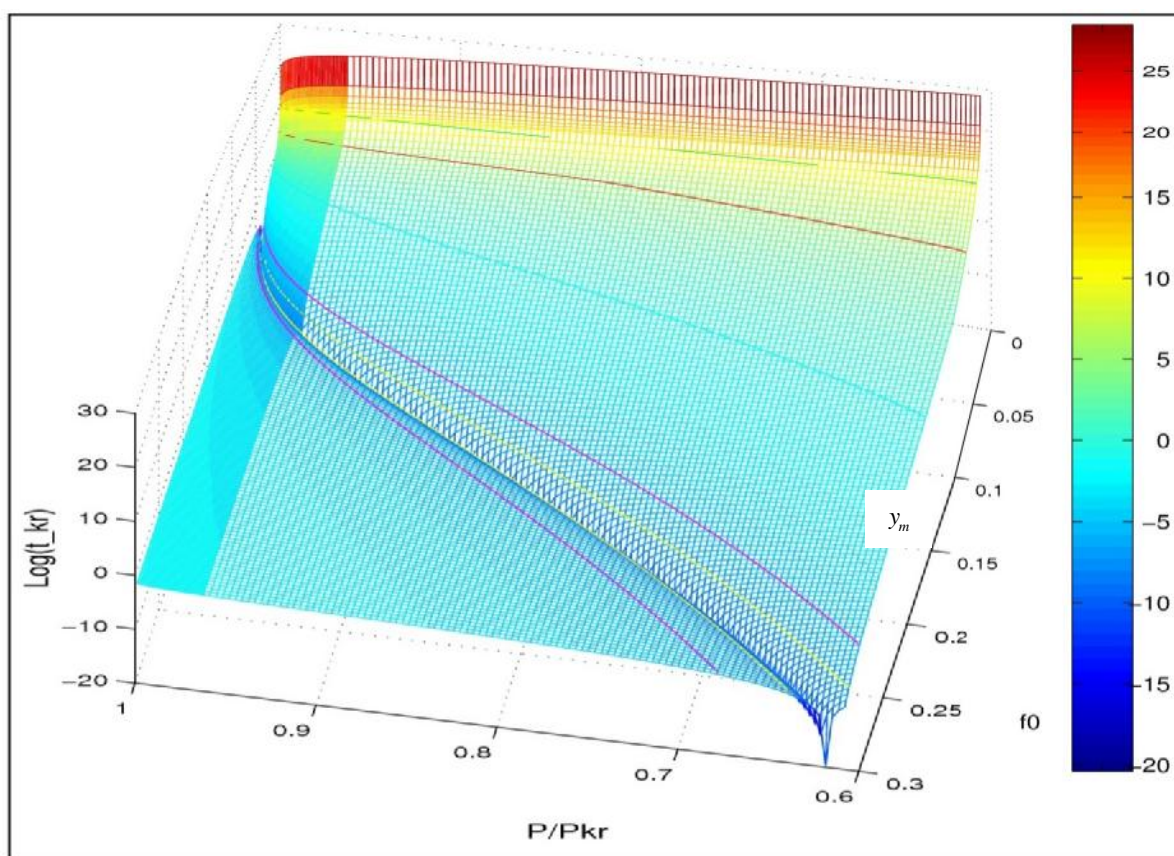
$$K_1 = \frac{C}{(n-1)} \quad (18)$$

Po zastosowaniu równań (14), (16),(18) do równania (17) mamy końcowe wyrażenie na czas krytyczny (w formie uwikłanej):

$$c_v P^n t_{kr} + c_p P^n \ln(t_0) + \frac{c_p P^n}{n-1} = \frac{(n+4)(p^2 - c_e PL^2)}{5(n-1)L^2 y_m^{n-1}} \quad (19)$$

gdzie: $t_0 = \sqrt[n-1]{\frac{(n+4)(p^2 - c_e PL^2)}{5c_p L^2 P^n y_m^{n-1}}}$. Na rys. 3 przedstawiono jakościowy obraz zależności (19).

Na osi pionowej odłożono $\log(t_{kr})$, na osiach poziomych odpowiednio P/P_{kr} (stosunek siły osiowej P do wartości sprężystej siły krytycznej $P_{kr} = \frac{p^2}{c_e L^2} = \frac{p^2(AhE)}{L^2}$) oraz y_m (wartość strzałki ugięcia słupa).

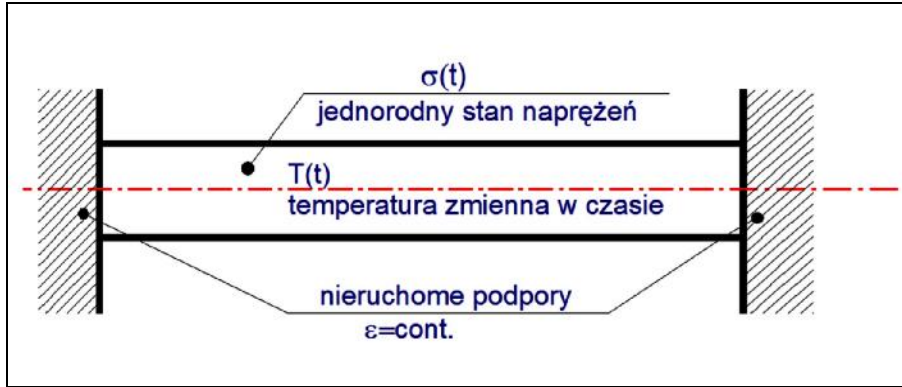


Rys. 3. Wykres zależności $t_{kr}(P/P_{kr}, y_m)$

Ponieważ jeśli $t_{kr} \rightarrow 0$, to $\log(t_{kr}) \rightarrow -\infty$, to miejsca zerowych wartości t_{kr} na wykresie obrazuje krzywoliniowa „brazda”. Warto zwrócić uwagę, że $t_{kr} = 0$ przy $y_m = 0$ występuje dla sprężystej wartości siły krytycznej tzn. $P/P_{kr} = 1$ (taki sam wyniki uzyskuje się bez nieliniowego składnika w równaniu (1) – patrz: referat na konferencji „Modelowanie w Mechanice 2006”).

3. ANALIZA STABILNOŚCI UTWIERDZONEGO SŁUPA PRZY ZMIENNEJ TEMPERATURZE

Rozważania dotyczą analizy stabilności równań statyki słupa prostego obustronnie utwierdzonego przy zmiennym w czasie obciążeniu termicznym. Równania konstytutywne uwzględniają wpływy sprężyste oraz reologiczne. Uwzględniona będzie również zmienność modułu sprężystości od temperatury.



Rys. 4. Słup utwierdzony poddany wpływom zmiennej temperatury

Równania konstytutywne dla stali przyjęto w postaci (składnik nieliniowy pominięto):

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E(T)} + a_2(T)\sigma^n + \frac{d(a_T(T)T)}{dt} \quad (20)$$

Zakładamy: $T = const.$, $\dot{\epsilon}_T = 0$:

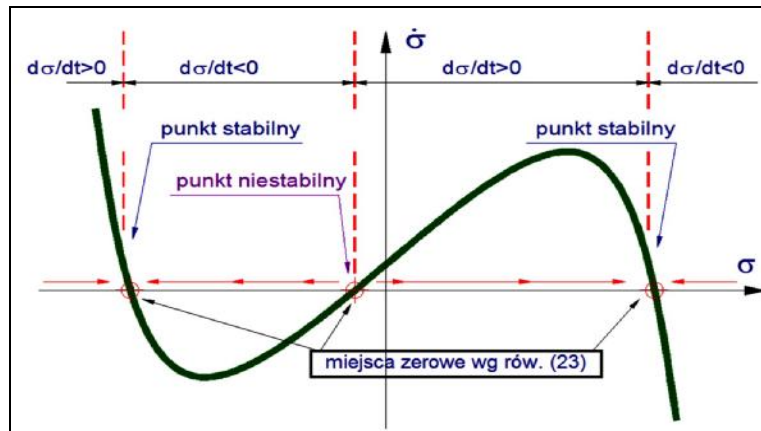
$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{\sigma}}{E} - \frac{\dot{\epsilon}}{E^2}\sigma + a_2\sigma^n + a_T T \dot{\epsilon} \quad (21)$$

Rozważamy zagadnienie jednorodne, jednowymiarowe z warunkiem $\dot{\epsilon} = 0$:

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{\epsilon}}{E^2}\sigma - a_2 E \sigma^n - a_T E T \dot{\epsilon} \quad (22)$$

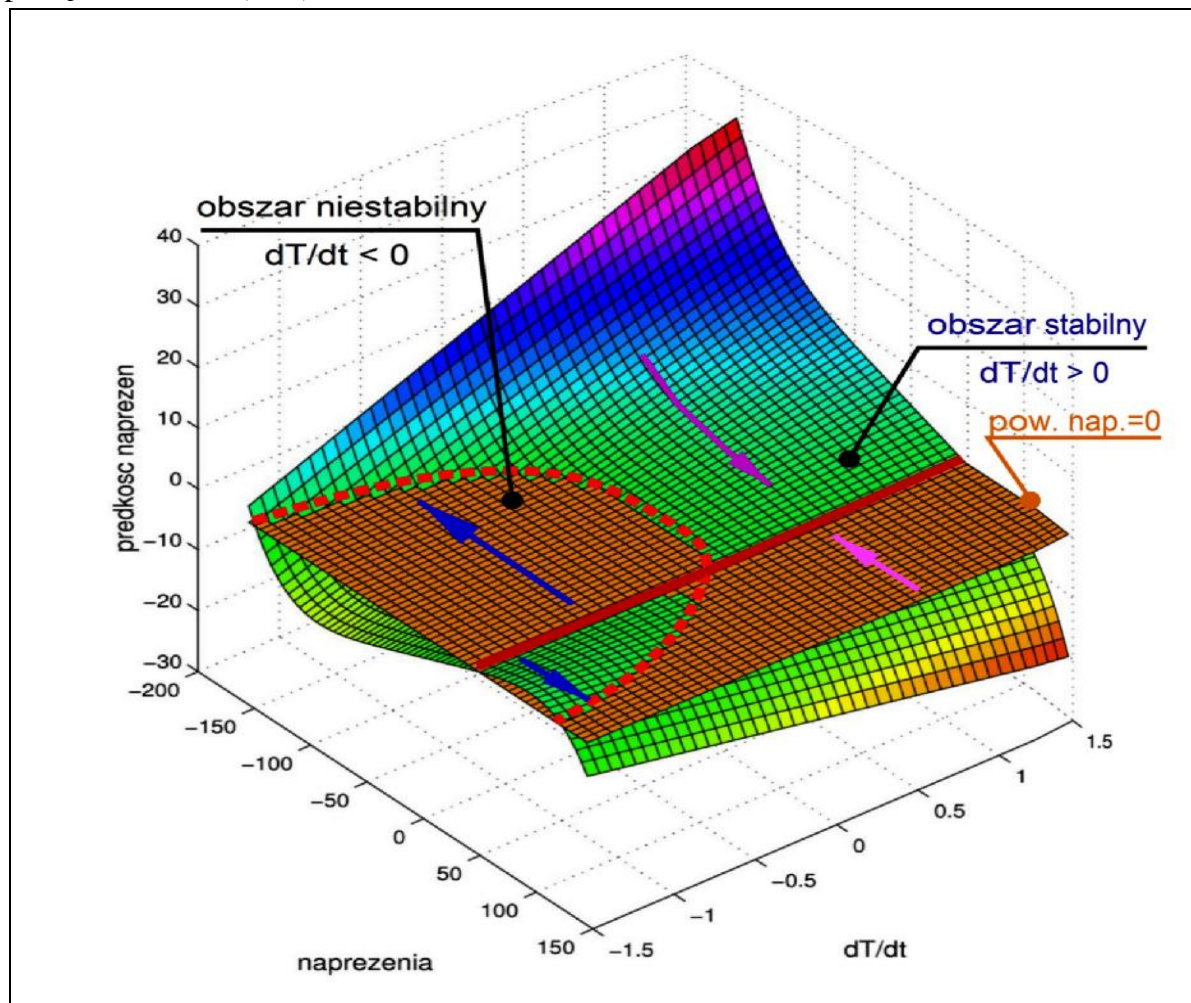
gdzie liczba n jest traktowana jako liczba nieparzysta tzn. $(-x)^n = -x^n$. Dla procesu ochładzania zachodzi $T < 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} > 0$. Równanie (22) może mieć trzy punkty stacjonarne:

$$0 = \frac{\dot{\epsilon}}{E^2}\sigma - a_2 E \sigma^n - a_T E T \dot{\epsilon} \quad (23)$$



Rys. 5. Ewolucja naprężeń oraz punkty stabilne i niestabilne wg równań (22) oraz (23) dla przypadku ochładzania $T < 0$

Na rys. 5 przedstawiono możliwy wykres zależności $\mathfrak{S}(s)$ dla najbardziej interesującego przypadku ochładzania słupa. Z wykresu można odczytać, że punkt środkowy jest niestabilny – ewolucja rozwiązania zmierza do punktów skrajnych. Warto podkreślić, że niestabilność ta jest związana z równaniami fizycznymi opisującymi zagadnienie. Na rys. 6 przedstawiono pełną zależność $\mathfrak{S}(s, T)$.



Rys. 6. Obszary stabilne oraz niestabilne rozwiązania równania (22)

Punkt stacjonarny środkowy (środkowa linia ciągła na rys. 6) może być punktem niestabilnym (rys. 6). Z wstępnych analiz wynika, że np. materiały o własnościach zbliżonych do szkła mogą wykazywać przedstawiany typ niestabilności (stal budowlana, ze względu na wysoką wartość współczynnika a_T , raczej nie należy do tej grupy materiałów).

LITERATURA

1. Odqvist F. K. G.: Mathematical theory of creep and creep rupture., Oxford: Clarendon Press, 1974.
2. Jaworski B. M., Dietłaf A. A.: Fizyka.: poradnik encyklopedyczny. Warszawa: PWN, 1966.

3. Kubik J., Skowroński W.: Oszacowanie czasu krytycznego dla pręta stalowego w czasie pożaru. W: XXXVIII konferencja naukowa KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1992, s. 53 – 58.

INSTABILITY OF STATICAL SOLUTIONS OF SELECTED KIND OF STEEL FLAT STRUCTURES IN HIGH TEMPERATURE

Summary. Steel structures subjected to fire reveal nonlinear, plasticity and creep. This work is intended as an attempt to stability of static equations of flat, steel structures in fires. High temperature during fire adversely affects constructional steel elements by activating irreversible rheological processes that can be described in simplified form by power term. Physical equations contain three terms: linear (elasticity), nonlinear and rheological (related to creep).