ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: AUTOMATYKA z. 43 Nr kol. 579

Jerzy Cyklis
Politechnika Krakowska

GENEROWANIE ODSTĘPÓW ZDARZEŃ NA PODSTAWIE FUNKCJI AUTOKORELACYJNEJ ICH CZĘSTOŚCI W MODELOWANIU SYMULACYJNYM SYSTEMÓW

Streszczenie. Podano zasadę generowania stacjonarnej funkcji przypadkowej o rozkładzie normalnym na podstawie jej funkcji autokorelacyjnej R (τ). Metoda ma zastosowanie przy eksperymentach symulacyjnych dotyczących dynamiki systemów.

1. Wprowadzenie

Generowanie odstępów zdarzeń /np. zgłoszenia się klienta do systemów masowej obsługi / wg stałej w czasie gęstości prawdopodobieństwa ich powstawania nie odzwierciedla rzeczywistej sytuacji w większości systemów produkcyjnych. Obserwowana jest "falowość" pojawiania się zdarzeń [2], [3] utrudniająca pracę systemów, powodująca m.in. spiętrzenia prac i wyczekiwania w kolejkach. Eksperyment symulacyjny powinien uwzględniać również ten problem pojawiania się określonych częstości zwiększonej frekwencji w kanałach obsługi. Proponuje się, aby generowanie zdarzeń oprzeć na rozkładzie wykładniczym

$$f(\tau_j, t) = \lambda(t)\, e^{-\lambda(t)\tau_j} \tag{1}$$

przy czym $\lambda(t)$ jest funkcją przypadkową czasu t.
Dla systemu stacjonarnego wprowadza się jej wartość średnią wg wzoru

$$\lambda_{sr} \cong \frac{1}{T}\int_0^T \lambda(t)\,dt \tag{2}$$

oraz funkcję

$$\lambda_0(t) = \lambda(t) - \lambda_{sr} \tag{3}$$

Funkcja $\lambda_0(t)$ jest w pełni określona przez swoją funkcję autokorelacyjną $R_\lambda(\tau)$. Referat podaje sposób generowania funkcji przypadkowej $\lambda_0(t)$ na podstawie znajomości funkcji autokorelacyjnej $R_\lambda(\tau)$. Po wyznaczeniu funkcji $\lambda_0(\tau)$ można przystąpić do generowania ciągu zdarzeń wg rozkładu wykładniczego przy zmiennej wartości $\lambda(t)$.

2. Zasada generowania stacjonarnej funkcji przypadkowej

Generowanie stacjonarnej funkcji przypadkowej dokonywać się będzie przez kolejne generowanie jej wartości w odstępach czasu Δt. Wartość odstępu Δt powinna być ułamkiem okresu odpowiadającego składowej o największej częstotliwości istotnej dla działania systemu. W ten sposób z funkcji przypadkowej ciągłej $\lambda_0(t)$ powstaje funkcja przypadkowa dyskretna $\lambda_0(i\Delta t)$, $i = 1, \ldots, l$, $T = l\Delta t$. Jest ona całkowicie scharakteryzowana funkcją autokorekcyjną $R(k\Delta t)$. Zakłada się, że funkcja ta jest ergodyczna i stąd z wystarczającą dokładnością można napisać, że istnieje takie n, dla którego:

$$\begin{aligned} &k > n \\ &R(k\Delta t) \cong 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Powstaje pytanie, w jaki sposób mając dane wartości $\lambda(t-k\Delta t) = \lambda(i\Delta t - k\Delta t)$, $k = 1 \div n$ wygenerować następną jej wartość $\lambda(t) = \lambda(i\Delta t)$
Podstawiając:

$$\begin{aligned} \lambda(i\Delta t) &= \lambda_i \\ \lambda(0) &= \lambda \end{aligned} \tag{5}$$

Zagadnienie sprowadza się do poszukiwania hiperpłaszczyzny regresji zmiennej λ względem zmiennych λ_i oraz resztkowej wariancji odchylenia zmiennej λ od tej hiperpłaszczyzny. Wg np. [1],chcąc znaleźć współczynniki regresji α_k występujące w równaniu regresji

$$\lambda = \alpha_1 \lambda_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k + \ldots + \alpha_n \lambda_n \tag{6}$$

należy posłużyć się macierzą kowariancji zmiennych określoną wzorem:

$$[M] = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \ldots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \ldots & \\ \vdots & & \ddots & \\ \mu_{n1} & \ldots & \ldots & \mu_{nn} \end{bmatrix} \tag{7}$$

gdzie: μ_{ik} jest wartością oczekiwaną iloczynu $\lambda_i\ \lambda_k$ co zapisano:

$$\mu_{ik} = E(\lambda_i \lambda_k) \tag{8}$$

Wówczas:

$$\alpha_k = -\frac{M_{1(k+1)}}{M_{11}} \tag{9}$$

gdzie: $M_{1(k+1)}$, M_{11} dopełnienia algebraiczne wyrażenia w pierwszym wierszu i odpowiednio w $(k+1)$-ej i pierwszej kolumnie. Wariancja resztkowa /odchylenia od hiperpłaszczyzny danej równaniem (6) /dana jest wzorem:

$$D_z = \frac{M}{M_{11}} \tag{10}$$

gdzie: M - wyznacznik macierzy $[M]$.
W rozpatrywanym przypadku, ze względu na założoną stacjonarność funkcji $\lambda(t)$,otrzymuje się:

$$\mu_{11} = \mu_{22} = \ldots = \mu_{nn} = E(\lambda(t)\lambda(t)) = E(\lambda(i\Delta t)\lambda(i\Delta t)) = R(0) \tag{11}$$

oraz:

$$\mu_{i(i+k)} = \mu_{(i+k)i} = E(\lambda(t)\lambda(t+k\Delta t)) = E(\lambda(i\Delta t)\lambda(i\Delta t + k\Delta t)) = R(k\Delta t) \tag{12}$$

Macierz (7) po podstawieniu (11) i (12) przyjmuje postać macierzy symetrycznej.

$$[M] = \begin{bmatrix} R(0) & R(\Delta t) & \ldots & R(n\Delta t) \\ R(\Delta t) & R(0) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ R(n\Delta t) & \ldots & \ldots & R(0) \end{bmatrix} \tag{13}$$

Ze względu na istniejące podprogramy komputerowe, dla obliczenia parametrów (9) i (10) wygodnie jest posłużyć się macierzą do niej odwrotną:

$$[RM] = [M^{-1}] = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & \ldots & M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ M_{1n} & \ldots & \ldots & M_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RM_{11} & RM_{12} & \ldots & RM_{1n} \\ RM_{21} & RM_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ RM_{n1} & \ldots & \ldots & RM_{nn} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Biorąc pod uwagę symetryczność tej macierzy uzyskanej z macierzy (13), otrzymano:

$$\alpha_k = -\frac{RM_{1(k+1)}}{RM_{11}} = -\frac{RM_{(k+1)1}}{RM_{11}} \tag{15}$$

$$\sigma_z^2 = D_z = \frac{1}{RM_{11}} \tag{16}$$

Dla zmiennej λ o rozkładzie normalnym należy teraz dla wygenerowania jej wartości do wartości wyliczonej z równania (6) dodać wartość zmiennej przypadkowej Z o rozkładzie normalnym i wariancji wyliczonej ze wzoru (16). Uwzględniając wzór (5) otrzymuje się więc następującą regułę rekurencyjną

$$\lambda(i\Delta t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda(i\Delta t - k\Delta t) + Z(i) \tag{17}$$

Po wygenerowaniu zmiennej $\lambda(i\Delta t)$ można przystąpić wg tej reguły do generowania zmiennej $\lambda((i+1)\Delta t)$ itd. Wartości początkowe $\lambda((n+1)\Delta t - k\Delta t)$ dla $k = 1 \div n$, tj. wartości $\lambda(i\Delta t)$ dla $i = 1 \div n$, potrzebne do wygenerowania wartości zmiennej $\lambda((n+1)\Delta t)$ można przyjąć z jakiegoś rzeczywistego procesu, albo inne np. równe zero, ponieważ ich wpływ maleje w trakcie wzrastania wartości i. Należy tylko zwrócić uwagę, aby do symulacji procesu przyjąć wartość i jej rozpoczęcia równą kilkakrotnej wartości n.

3. Program obliczeniowy

Poniżej podano główny program obliczeniowy / rys.1 / w FORTRANIE, korzystający z podprogramów odwracania macierzy oraz generowania zmiennej o rozkładzie normalnym.
Zasadnicze jego składniki są opisane w komentarzach.
Zmiennej $R_\lambda(k\Delta t)$ odpowiada $R(k)$ dla $k = 0 \ldots n$, $K = 1 \ldots N = n+1$; $\lambda(i\Delta t)$ odpowiada $W(I)$, α_k odpowiada $A(K)$.
Na końcu programu zamieszczono sprawdzenie wygenerowanej funkcji przez jej funkcję autokorelacyjną $RS(K)$, która winna być równa $R(K)$. Należy zaznaczyć, że jest to niezbędny element programu. W wielu przypadkach założone wartości $R_\lambda(k\Delta t) = R(K)$ są niewłaściwe. Niekiedy objawia się to przerwaniem programu przy wykryciu, że wariancja $D_z = (STDZ)^2$ dana wzorem (16) jest ujemna, ale w innych przypadkach można otrzymać wartości $RS(K)$ różne od założonych $R(K)$. Jest to spowodowane założeniem takiej funkcji $R_\lambda(i\Delta t)$, która nie spełnia warunku (4), i wpływ dalszych wartości niezerowych $R_\lambda(k\Delta t)$ dla $k > n$ zniekształca przebieg funkcji $R_\lambda(k\Delta t)$ dla $k \leq n$. Dlatego przed przystąpieniem do eksperymentu symulacyjnego należy sprawdzić wartość $RS(K)$ i ewentualnie skorygować założone $R(K)$. Problem ten jest ciekawy teoretycznie i wymaga osobnego opracowania.

4. Zakończenie

Na podstawie wygenerowanej funkcji $\lambda(t) = \lambda(i\Delta t)$ można przystąpić do generowania odstępów τ_j, o gęstości prawdopodobieństwa danej wzorem [1]. Wartość $\lambda(t)$ w tym wzorze ocenia się przez $t = \sum_{l=1}^{j-1} \tau_l$, a ściślej przez wartość i równą całkowitej części ilorazu $\frac{t}{\Delta t}$.
Podany sposób generowania funkcji przypadkowej na podstawie jej funkcji autokorelacyjnej ma również znacznie szersze znaczenie w innych eksperymentach symulacyjnych dotyczących dynamiki systemów.

```
      PROGRAM PROCES (INPUT,OUTPUT,TAPE1=INPUT,TAPE2=OUTPUT)
      DIMENSION RS(200),RSA(200),RM(6,6)
      DIMENSION R(100),A(100),X(100),ZX(100),INDEX(100),W(10000)
      CALL RANSET(36)
      READ(1,6)N,L,NS
    6 FORMAT(3I10)
      WRITE(2,6)N,L,NS
      READ(1,*)(R(K),K=1,N)
      WRITE(2,*)(R(K),K=1,N)
C     PODSTAWIENIE WYRAZEN MACIERZY RM
      DO 14 I=1,N
      DO 14 J=1,N
      K=IABS(J-I)+1
   14 RM(I,J)=R(K)
C     ODWRACANIE MACIERZY RM (PROGRAM CERN LIBRARY F100)
      CALL MATIN1(RM,N,N,MDIM,0,INDEX,NERROR,DETERM)
      WRITE(2,*)(RM(1,J),J=1,N)
      WRITE(2,*)DETERM
      M=N-1
C     OBLICZANIE WSPOLCZYNNIKOW REGRESJI
      DO 22 K=1,M
   22 A(K)=-RM(1,K+1)/RM(1,1)
      WRITE(2,*)(A(K),K=1,M)
C     OBLICZANIE ODCHYLENIA KWADRATOWEGO RESZTKOWEGO
      STDZ=SQRT(1./RM(1,1))
      WRITE(2,*)STDZ
C     PRZYJMOWANIE WARUNKOW POCZATKOWYCH
      DO 29 K=1,M
   29 X(K)=0.
C     GENEROWANIE FUNKCJI PRZYPADKOWEJ
      DO 42 I=1,L
      RX=0.
      DO 34 K=1,M
   34 RX=RX+A(K)*X(K)
      DO 36 K=2,M
   36 ZX(K-1)=X(K-1)
      DO 38 K=2,M
   38 X(K)=ZX(K-1)
C     GENEROWANIE ZMIENNEJ LOSOWEJ Z O ROZKLADZIE NORMALNYM
      CALL NORMAL(0,STDZ,Z)
      X(1)=RX+Z
   42 W(I)=X(1)
C     SPRAWDZENIE GENEROWANEJ FUNKCJI
      LP=L-NS
      DO 49 K=1,NS
      RS(K)=0.
      DO 48 I=1,LP
   48 RS(K)=RS(K)+W(I)*W(I-1+K)
   49 RSA(K)=RS(K)/LP
      WRITE(2,*)(RSA(K),K=1,NS)
      STOP
      END
```

Rys. 1. Program generowania funkcji przypadkowej

LITERATURA

[1] M.Fisz - "Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna", PWN, Warszawa 1958

[2] Z.Łukaszewicz - " Dynamika systemów zarządzania", PWN,Warszawa 1975

[3] Th.Naylor - "Modelowanie cyfrowe systemów ekonomicznych " PWN, Warszawa 1975

ГЕНЕРИРОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИСХОДОВ НА БАЗЕ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ЧАСТОТЫ В ОБЛАСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ.

Р е з ю м е

В роботе предлогается способ генерирования стационарной случайной функции с нормальным распределением на основе её автокорреляционной функции. Изложенный способ применяется при машинном эксперименте относительно динамики систем.

GENERATION OF EVENTS INTERVALS USING THE AUTOCORRELATION FUNCTION OF ITS FREQUENCY IN THE SIMULATION MODELLING OF SYSTEMS

S u m m a r y

The paper explains how to generate a stationary stochastic function with normal distribution knowing the respective autocorrelation function. The method may be applied during simulation experiments.