ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: AUTOMATYKA z. 43 Nr kol. 579

Józef Grabowski
Politechnika Wrocławska

MODELE MATEMATYCZNE I OPTYMALIZACJA ZAGADNIEŃ SEKWENCYJNYCH W DYSKRETNYCH PROCESACH PRODUKCYJNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono opisy matematyczne dyskretnych systemów produkcyjnych i ich klasyfikację. Ponadto sformułowano optymalizacyjne zagadnienia sekwencyjne w dyskretnych procesach.

1. Wstęp

Dyskretny system produkcyjny odznacza się istnieniem określonego skończonego zbioru zdarzeń związanych ściśle z istnieniem zadania produkcyjnego. Przebieg procesu produkcyjnego polega na kolejnym (w sensie czasu) dopuszczalnym następowaniu zdarzeń ze zbioru. Zagadnienie optymalizacji procesu polega na ustaleniu takiej dopuszczalnej kolejności następowania zdarzeń, aby była ona optymalna w sensie przyjętego kryterium efektywności. Przykładem dyskretnego systemu produkcyjnego jest przemysł maszynowy, hutniczy, budowlany. Tutaj proces charakteryzuje się przepływem materiałów i półproduktów w postaci pojedynczych elementów lub ich partii. Elementy te są poddawane operacjom obróbki na kolejnych stanowiskach wyposażonych w odpowiednie środki. Pod pojęciem środka należy rozumieć dowolne urządzenie (lub brygadę pracowników), które zdolne jest wykonywać pewne operacje, czynności. Proces realizacji produkcji wymaga zachowania porządku technologicznego wykonywania operacji. Zagadnienie optymalizacji polega na ustaleniu takiego przydziału środków do wykonania poszczególnych operacji oraz na wyznaczeniu takiej kolejności wykonywania operacji, aby zapewnić optimum przyjętego kryterium.

2. System produkcyjny

Niech

$$N = \{1, \ldots, n\}$$

będzie niepustym zbiorem operacji, które mają być wykonane przy użyciu niepustego zbioru środków maszyn.

$$B = \{1, \ldots, b\}.$$

Niech

$$RT \subset N \times N .$$

będzie zbiorem relacji wyrażających wymagania porządku technologicznego wykonywania operacji.

Definicja 1.

Zadaniem produkcyjnym nazywamy graf bezkonturowy

$$Z = \langle N, RT \rangle .$$

Niech będą dane dwie niepuste rodziny

$$R^N = \{N_1, \ldots, N_{n_1}\}, \qquad N_p \subset N, \qquad p=1, \ldots, n_1 ,$$

$$R^B = \{B_1, \ldots, B_{b_1}\}, \qquad B_r \subset B, \qquad r=1, \ldots, b_1$$

podzbiorów N oraz B posiadających następujące własności

$$1^\circ \quad \forall j \in N \, [\exists! \, N_p \in R^N \, (j \in N_p)],$$

$$2^\circ \quad |R^B| \geqslant |R^N| . \tag{1}$$

Z własności 1° (1) wynika, że rodzina R^N zawiera wyłącznie podzbiory parami rozłączne i wyczerpujące elementy zbioru N.

Dalej niech będzie dana funkcja

$$\pi : R^B \xrightarrow{na} R^N , \tag{2}$$

która przyporządkowuje podzbiorom maszyn pewne podzbiory operacji. W praktyce funkcja (2) będzie oznaczać, że operacje ze zbioru $N_p \in R^N$ mogą być wykonywane przy pomocy podzbioru maszyn $B_r \in R^B$, jeżeli tylko $\pi(B_r) = N_p$.

Definicja 2.

Układ

$$\mathcal{S} = \langle Z, B, R^N, R^B, \pi \rangle , \tag{3}$$

którego elementy spełniają wyżej wymienione założenie,będziemy nazywać ogólnym systemem produkcyjnym technologicznie uporządkowanym lub krótko systemem ogólnym.

Jeżeli założyć, że

$$R^B = B' , \tag{4}$$

to system (3) będziemy nazywać systemem złożonym. System złożony został w podobny sposób zdefiniowany i nazwany systemem wielokrotnym w pracy [4]. Zatem definicja systemu (3) jest ogólniejsza od definicji systemu wielokrotnego. W związku z tym zagadnienia kolejnościowe rozważane w niniejszej pracy będą ogólniejsze niż w [4] oraz ogólniejsze niż aktualnie spotykane w literaturze światowej.

Jeżeli założyć, że oprócz (4) zachodzi

$$|R^B| = |R^N|, \tag{5}$$

to system (3) będziemy nazywać <u>systemem podstawowym</u>.

W systemie podstawowym funkcja π jest różnowartościowa, możemy zatem utożsamiać maszyny z odpowiadającymi im podzbiorami operacji rodziny R^N. W związku z tym różnym $k \in B$ odpowiadają różne podzbiory $N_p \in R^N$, czyli na podstawie 1° (1) możemy napisać

$$\pi(k) = N_k \in R^N, \qquad k \in B$$

$$N_k \cap N_l = \emptyset, \qquad k, l \in B, k \neq l.$$

Jeżeli system jest systemem złożonym, więc funkcja π odwzorowuje B na R^N, zatem różnym maszynom mogą być przyporządkowane te same zbiory operacji. W związku z tym możemy dokonać podziału zbioru maszyn na klasy równoważności

$$B^P = \{k \in B \mid \pi(k) = N_p\}, \qquad N_p \in R^N. \tag{6}$$

Zbiór maszyn zostanie rozbity na skończoną ilość rozłącznych klas B^P, które będziemy nazywać <u>typami maszyn</u>. Moc $|B^P|$ będzie oznaczać ilość maszyn danego typu. W systemie podstawowym typy maszyn są jednoelementowe.

W systemie ogólnym, różnym podzbiorom maszyn rodziny R^B może być przyporządkowany ten sam podzbiór operacji rodziny R^N. Zatem możemy dokonać podziału rodziny podzbiorów maszyn na podrodziny

$$R^{B(N_p)} = \{B_r \in R^B \mid \pi(B_r) = N_p\}, \; N_p \in R^N \tag{7}$$

przy czym będziemy zakładali, że

$$3^\circ \quad \forall k \in B[\exists! R^{B(N_p)} (\exists B_r \in R^{B(N_p)} \wedge k \in B_r)], \; N_p \in R^N. \tag{1}$$

Zgodnie z (7) w danej podrodzinie $R^{B(N_p)}$ będą występowały te podzbiory maszyn, które są przyporządkowane jednemu i temu samemu podzbiorowi operacji N_p rodziny R^N. Założenie 3° (1) orzeka, że każda maszyna ze zbioru B należy do podzbioru maszyn tylko jednej podrodziny $R^{B(N_p)}$. W praktyce, podrodzinę będziemy utożsamiać ze stanowiskiem roboczym wielomaszynowym. Oznaczmy jeszcze moc podrodziny

$$|R^{B(N_p)}| = r_p.$$

Dla systemu złożonego, na podstawie (4), (6) oraz (7) mamy

$$R^{B(N_p)} = B^p .$$

W tym przypadku podrodzina $R^{B(N_p)}$ będzie zbiorem maszyn /podzbiorem zbioru B/ tego samego typu. Natomiast dla systemu podstawowego mamy

$$R^{B(N_p)} = \{k\} , \qquad \pi(k) = N_p \in R^N, \quad k \in B .$$

oraz

$$\left| R^{B(N_p)} \right| = 1$$

Dalej, niech będzie dana funkcja

$$c: R^{B(N_p)} \times N_p \longrightarrow R^+, \qquad N_p \in R^N .$$

Wartości tej funkcji $c\left(B_{r,j}\right) = c_{rj}$ będziemy nazywać <u>czasami wykonania</u> operacji j.

Warto zauważyć, że dla systemu złożonego dana operacja może być wykonywana na różnych maszynach tego samego typu, przy czym czasy trwania operacji będą różne dla różnych maszyn tego typu. Definicja ta jest ogólniejsza niż w pracy [4]. Co więcej zakładać będziemy, że dana operacja może być wykonana nie przy pomocy jednej maszyny, ale przy pomocy podzbiorów maszyn o różnych czasach wykonania operacji o różnej wydajności.

Dla systemu podstawowego mamy

$$c: N_p \longrightarrow R^+ , \qquad N_p \in R^N .$$

Dalej, niech $N^x \subset N$ będzie zbiorem operacji nie posiadających poprzedników w sensie porządku technologicznego, czyli

$$N^x = \left\{ j \in N \;\middle|\; \forall i \in N \wedge \langle i,j\rangle \notin RT \right\}$$

oraz niech $N^y \subset N$ będzie zbiorem operacji nie posiadających następników, czyli

$$N^y = \left\{ j \in N \;\middle|\; \forall i \in N \wedge \langle j,i\rangle \notin RT \right\} .$$

3. <u>Proces produkcyjny</u>

Załóżmy, że dana jest funkcja

$$\emptyset : N \longrightarrow R \times R .$$

Wartościami funkcji

$$\emptyset(j) = \langle t_j^x, t_j^y \rangle \in R \times R, \quad j \in N$$

jest uporządkowana para liczb rzeczywistych.
Liczby t_j^x oraz t_j^y będziemy nazywać odpowiednio czasami rozpoczęcia oraz zakończenia operacji.

Definicja 3.

Funkcję $\Phi : N \longrightarrow R \times R$ odwzorowującą zbiór operacji N w produkt $R \times R$ będziemy nazywać procesem produkcyjnym, jeżeli spełnione są następujące warunki:

$$\underset{B_r \in R^{B(N_p)}}{\exists} (t_j^y - t_j^x \geqslant c_{jr}) , \qquad j \in N_p, \ N_p \in R^N \tag{8}$$

$$t_j^x - t_i^y \geqslant 0 \qquad \langle i,j \rangle \in RT , \tag{9}$$

$$t_j^x - t_o \geqslant 0 \qquad j \in N^x , \tag{10}$$

$$t_z - t_j^y \geqslant 0 \qquad j \in N^y, \tag{11}$$

$$t_o, t_j^x, t_j^y, t_z \geqslant 0 \qquad j \in N , \tag{12}$$

$$(t_j^y - t_j^x \geqslant c_{jr}) \wedge (t_i^y - t_i^x \geqslant c_{is}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (t_j^x - t_i^y \geqslant 0) \vee (t_i^x - t_j^y \geqslant 0), \quad B_r, B_s \in R^{B(N_p)}, \tag{13}$$

$$B_r \cap B_s \neq \emptyset, \qquad N_p \in R^N .$$

Załóżmy, że F jest zbiorem wszystkich procesów obróbki. Niech będzie określoną funkcja kryterium

$$f : F \longrightarrow R .$$

Wartościami funkcji

$$f(\phi) \longrightarrow R,$$

są liczby rzeczywiste.

Definicja 4.

Proces produkcyjny $\phi^{*} \in F$ będziemy nazywać procesem optymalnym, jeżeli

$$f(\phi^{*}) = \min_{\phi \in F} f(\phi) .$$

W praktyce głównie rozważa się dwie klasy kryteriów optymalności

a) $f(\phi) = \max_{j \in N} \left\{ c_j(t_j^y) \right\},$

b) $f(\phi) = \sum_{j \in N} c_j(t_j^x),$

gdzie $c_j(t)$, $j \in N$ są niemalejącymi funkcjami czasu.

Jeżeli założymy $c_j(t) = t$, wtedy dla klasy (a) otrzymujemy kryterium minimalizacji czasu trwania całego procesu produkcyjnego, tzn.

$$t_{max} = \max_{j \in N} t_j^y .$$

Dla klasy (b) otrzymujemy kryterium minimalizacji sumy czasów zakończenia wszystkich operacji, tzn.

$$\sum t_j = \sum_{j \in N} t_j^y .$$

Jeżeli założymy $c_j(t) = w_j \cdot t$, wtedy dla klasy (b) otrzymujemy kryterium minimalizacji wagowej sumy czasów zakończenia operacji, tzn.

$$\sum w_j \cdot t_j = \sum_{j \quad N} w_j \cdot t_j^y .$$

Zakładając ponadto, że $w_j = \frac{1}{n}$, $j \in N$, wtedy otrzymujemy minimalizację średniego czasu zakończenia operacji, tzn.

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{j \in N} t_j^y .$$

W przypadku, gdy dane są najpóźniejsze czasy wykonania operacji d_j, wtedy zakładając $c_j(t) = t - d_j$ oraz przyjmując $L_j = t_j^y - d_j$, otrzymujemy dla klasy (a) kryterium minimalizacji maksymalnego opóźnienia, tzn.

$$L_{max} = \max_{j \in N} L_j .$$

Dla klasy b możemy otrzymać kryteria $\sum_{j \in N} L_j$, $\sum_{\in N} w_j \cdot L_j$ lub $L = \frac{1}{n} \sum_{j \in N} L_j$.

4. Metody wyznaczania optymalnych procesów produkcyjnych

Dla sformułowania zagadnienia optymalizacyjnego zwykle przyjmuje się binarną zmienną decyzyjną w postaci

$$x_{jw} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli operacja } j\text{-ta jest wykonywana przy użyciu } B_w\text{-tego podzbioru maszyn,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku .} \end{cases}$$

Należy znaleźć wielkości t_z, t_j^x, t_j^y, x_{jw} minimalizujące

$$f(\not{o}) \tag{14}$$

przy ograniczeniach

$$t_j^y - t_j^y \geqslant \sum_{B_w \in R^{B(N_p)}} x_{jw} \cdot c_{jw}, \quad j \in N^p,\ N_p \in R^N, \tag{15}$$

$$t_j^y - t_i^x \geqslant 0 \quad , \quad \langle i,j \rangle \in RT , \tag{16}$$

$$t_j^x - t_o \geqslant 0 \quad , \quad j \in N^x, \tag{17}$$

$$t_z - t_i^y \geqslant 0 \quad , \quad i \in N^y, \tag{18}$$

$$t_o,\ t_j^x,\ t_j^y,\ t_z \geqslant 0 \quad , \quad j \in N , \tag{19}$$

$$(x_{jr} = 1) \wedge (x_{is} = 1) \Longrightarrow (t_j^x - t_i^y \geqslant 0) \vee (t_i^x - t_j^y \geqslant 0),$$

$$B_r,\ B_s \in R^{B(N_p)},\ B_r \cap B_s \neq \emptyset,\ N_p \in R^N , \tag{20}$$

$$\sum_{B_r \in R^{B(N_p)}} x_{jw} = 1 , \tag{21}$$

$$z_{jw} \in \{0,1\}\ , \qquad B_w \in R^{B(N_p)},\ j \in N_p,\ N_p \in R^N. \quad (22)$$

Zagadnienie optymalizacyjne (14) - (22) jest zadaniem programowania całowartościowego mieszanego z warunkiem logicznym (20). Oczywiście warunek ten może być zastąpiony równoważnym warunkiem analitycznym poprzez wprowadzenie dodatkowych zmiennych całowartościowych.

Rozwiązanie powyższego zagadnienia może być uzyskane poprzez zastosowanie metod grafów dysjunktywnych [1] - [3] .

LITERATURA

[1] J. Grabowski, "Algorytmy optymalizacji i sterowania w dyskretnych procesach produkcyjnych", Prace Naukowe Inst. Cybern. Techn. PWr., Nr 42, Monografie nr 7, Wrocław 1977 r.

[2] J. Grabowski, "Formulation and Solution of the Sequencing Problem with Parallel Machines", Proc. 8-th IFIP Conference on Optimization Techniques, Würzburg, Federal Republic of Germany.

[3] J. Grabowski, "Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia kolejnościowego z równoległym wykorzystaniem maszyn", Archiwum Automatyki i Telemechaniki, Nr 1/2, 1978 r.

[4] Z. Jankowska-Zorychta, "Modele sekwencyjne i ich zastosowanie do planowania optymalnej organizacji w dyskretnych procesach produkcyjnych", Prace CO PAN,PWN Warszawa 1973 r.

[5] A.H.G. Rinnooy Kan, "Machine scheduling problems", H.E. Stenfert Kroesc B.V. - LEIDEN, 1976 r.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОПТИМАЛИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ДИСКРЕТНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССАХ

Р е з ю м е

В работе представлены модели дискретных производственных систем и дана их классификация.

Даётся тоже формулировка задач оптимализации последовательностей в дискретных процесах.

MATHEMATICAL MODELS AND OPTIMIZATION OF SEQUENTIAL PROBLEMS IN DISCRETE INDUSTRIAL PROCESS

S u m m a r y

The paper presents a classification of mathematical models for discrete industrial processes and the sequential optimization problems for these processes.