

ZASTOSOWANIE HIPOTEZY MOHRA DO BADAŃ MODELOWYCH KRUCHEJ WYTRZYMAŁOŚCI NARZĘDZI SKRAWAJĄCYCH

JERZY WODECKI

*Katedra Budowy Maszyn, Politechnika Śląska
e-mail: jerzy.wodecki@polsl.pl*

Streszczenie. Poddano analizie zasadność stosowania hipotezy Mohra do badania kruchej wytrzymałości narzędzi skrawających. Przedstawiono wpływ kołowych i kulistych pustek występujących w materiale na koncentrację naprężeń, powodujących jego kruche pęknięcie. Wyznaczono wartość naprężenia zredukowanego na podstawie modelu kulistej pustki. Wykazano podobieństwo wyprowadzonej zależności i wzoru na wartość naprężenia zredukowanego, wyznaczonego na podstawie hipotezy Mohra.

1. WSTĘP

Prowadząc badania modelowe narzędzi skrawających metodą elementów skończonych, należy wybrać hipotezę wyężeniową, w celu wyznaczenia maksymalnych wartości naprężeń zredukowanych, w miejscach decydujących o wytrzymałości narzędzia [1]. Większość powszechnie stosowanych hipotez wyężeniowych przyjmuje model ciągłego środowiska o izotropowych własnościach. W badaniach kruchej wytrzymałości narzędzi często wykorzystuje się hipotezę *Mohra* [2, 3], według której wartość naprężenia zredukowanego wyznacza się na podstawie zależności

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \frac{R_m}{R_c} \sigma_3 \quad (1)$$

gdzie: σ_1, σ_3 – maksymalne i minimalne naprężenie główne,
 R_m, R_c – wytrzymałość na rozciąganie i ściskanie.

Warunkiem stosowania tej hipotezy jest odpowiedni zakres wartości naprężeń głównych, tzn. $\sigma_1 > 0$ oraz $\sigma_3 < 0$.

Kruche pęknięcie jest nieodłącznie związane z występowaniem w materiale defektów w postaci mikropęknięć, wtrąceń oraz pustek, których wpływ należy uwzględnić w analizie wytrzymałości materiałów narzędziowych. Powodują one koncentrację naprężeń II rodzaju i w ten sposób przyczyniają się do powstawania pęknięć. Te zintensyfikowane naprężenia występują w bezpośrednim sąsiedztwie wspomnianych nieciągłości materiału, a ich wartość uzależniona jest od kształtu nieciągłości oraz własności materiału, określonych współczynnikiem *Poissona* ν .

W artykule przedstawiono wyniki niektórych badań dotyczących wpływu pustek o różnym kształcie na wartość naprężenia intensyfikowanego.

Wyznaczono też ekwiwalentną wartość naprężenia rozciągającego, działającego na materiał z kulistą pustką, powodującego wystąpienie na jej powierzchni naprężenia intensyfikowanego o takiej samej wartości, jak w przypadku obciążenia trzema naprężeniami głównymi. Uzyskaną zależność porównano ze wzorem na naprężenie redukowane, wyznaczone na podstawie hipotezy Mohra.

Przeprowadzona analiza ma na celu sprawdzenie zasadności stosowania hipotezy Mohra do badania kruchej wytrzymałości narzędzi skrawających.

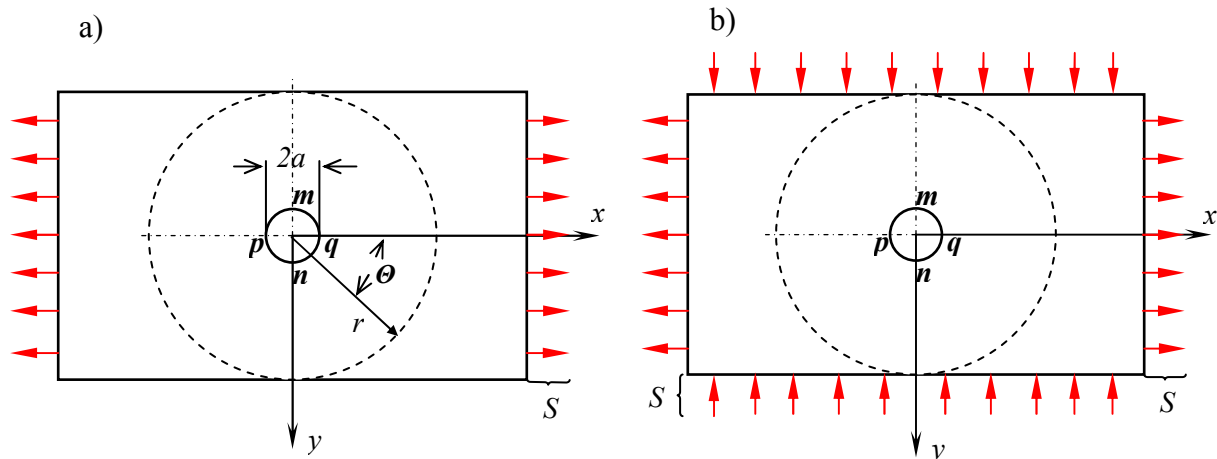
2. WPŁYW KSZTAŁTU MIKROPUSTEK W MATERIALE NA LOKALNĄ KONCENTRACJĘ NAPRĘŻEŃ

Na podstawie teorii sprężystości przeprowadzono szereg analiz dotyczących wpływu mikroskopijnej wielkości szczelin oraz pustek występujących w materiale na koncentrację naprężeń, inicjującą kruche pęknięcie materiału. Analizowano zagadnienia dwu- i trójwymiarowe.

Poniżej przedstawiono wyniki niektórych badań, zwracając uwagę na wpływ kształtu pustek występujących w materiale na zmianę wartości naprężeń, jakie występują na ich powierzchniach [4, 5, 6].

Wpływ otworu na lokalną koncentrację naprężeń w zagadnieniu dwuwymiarowym

Mały, kołowy otwór wykonany w tarczy podlegającej równomiernemu rozciąganiu wywołuje znaczną, lokalną koncentrację naprężeń (rys. 1a) [4]. W analizie naprężeń przyjęto biegunowy układ współrzędnych, w którym wyznaczono składową normalną naprężenia w kierunku promieniowym – σ_r , w kierunku obwodowym – σ_θ oraz składową styczną – $\tau_{r\theta}$.



Rys. 1. Tarcza z otworem poddana równomiernemu: a) rozciąganiu; b) ścinaniu

Zagadnienie to zostało rozwiązane przez *G. Kirscha*. Wartości naprężeń na brzegu otworu, dla $r = a$ można wyznaczyć z zależności:

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad (2)$$

$$\sigma_\theta = S - 2 S \cos 2\theta \quad (3)$$

Jeżeli w tarczy wystąpi naprężenie rozciągające S , to naprężenie σ_θ osiągnie największą wartość dla $\theta = \pi/2$ oraz $\theta = 3\pi/2$, to jest w punktach „ m ” i „ n ”, położonych na średnicy prostopadłej do kierunku rozciągania. W tych punktach $(\sigma_\theta)_{\max} = 3S$. W punktach „ p ” i „ q ”, dla

których $\Theta = 0$ oraz $\Theta = \pi$, naprężenie $\sigma_\Theta = -S$. Zakładając, że o pękaniu materiału decyduje maksymalna wartość naprężenia rozciągającego jaka występuje na obwodzie otworu, można na tej podstawie stwierdzić, że, chcąc uzyskać w przypadku ściskania tarczy naprężeniem $-S$ taką samą wartość naprężenia w punktach „p” i „q” jak w punktach „m” i „n” podczas rozciągania, bezwzględna wartość naprężenia ściskającego musi być równa trzykrotnej wartości naprężenia rozciągającego.

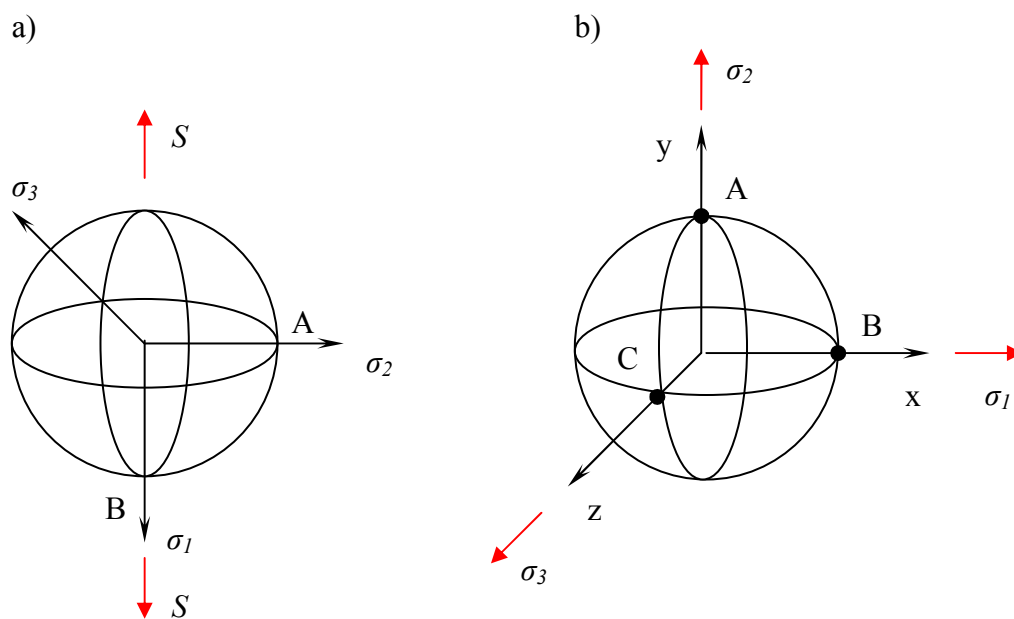
Mając rozwiązanie odpowiadające jednokierunkowemu rozciąganiu lub ściskaniu, można przez superpozycję otrzymać rozwiązanie odpowiadające rozciąganiu i ściskaniu w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach – rys. 1b. Naprężenie ściskające zwiększy niebezpieczeństwo pęknięcia materiału. Największe wartości naprężenia rozciągającego wystąpią dla $\Theta = \pi/2$ oraz $\Theta = 3\pi/2$, to znaczy w punktach „m” i „n”, w których $\sigma_\Theta = 4S$.

W przypadku, gdy otwór ma kształt eliptyczny, a naprężenie S działa pod kątem prostym do dużej osi elipsy, największa wartość naprężenia występuje na końcach dużej osi elipsy a i wynosi $S(1 + 2a/b)$. Wartość ta wzrasta nieograniczenie, gdy otwór staje się coraz bardziej smukły. Najmniejsza wartość naprężenia występuje na końcu małej osi elipsy b i ma wartość $-S$, taką samą jak dla otworu kołowego [4].

2.2. Analiza naprężeń na powierzchni pustki w przestrzeni trójwymiarowej

Analizy naprężeń dookoła małej, kulistej pustki w pręcie poddanym równomiernemu rozciąganiu naprężeniem o wielkości S dokonali R. V. Southwell i J. N. Goodier, badając osiowo symetryczny rozkład naprężeń w ciele o kształcie bryły obrotowej [4].

Wyznaczone zostały naprężenia główne w charakterystycznych punktach – na równiku i na biegunie kulistej pustki – rys. 2a [5].



Rys. 2. Kulista pustka obciążona: a) naprężeniem rozciągającym; b) naprężeniami głównymi

W przypadku, gdy naprężenie rozciągające o wartości S działa w kierunku naprężenia głównego σ_1 , naprężenia główne w punkcie „A” mają wartości:

$$\sigma_1 = \frac{27 - 15\nu}{2(7 - 5\nu)} S = k_1 S \quad (4)$$

$$\sigma_2 = 0 \quad (5)$$

$$\sigma_3 = \frac{15\nu - 3}{2(7 - 5\nu)} S = k_2 S \quad (6)$$

a w punkcie „B”

$$\sigma_1 = 0,$$

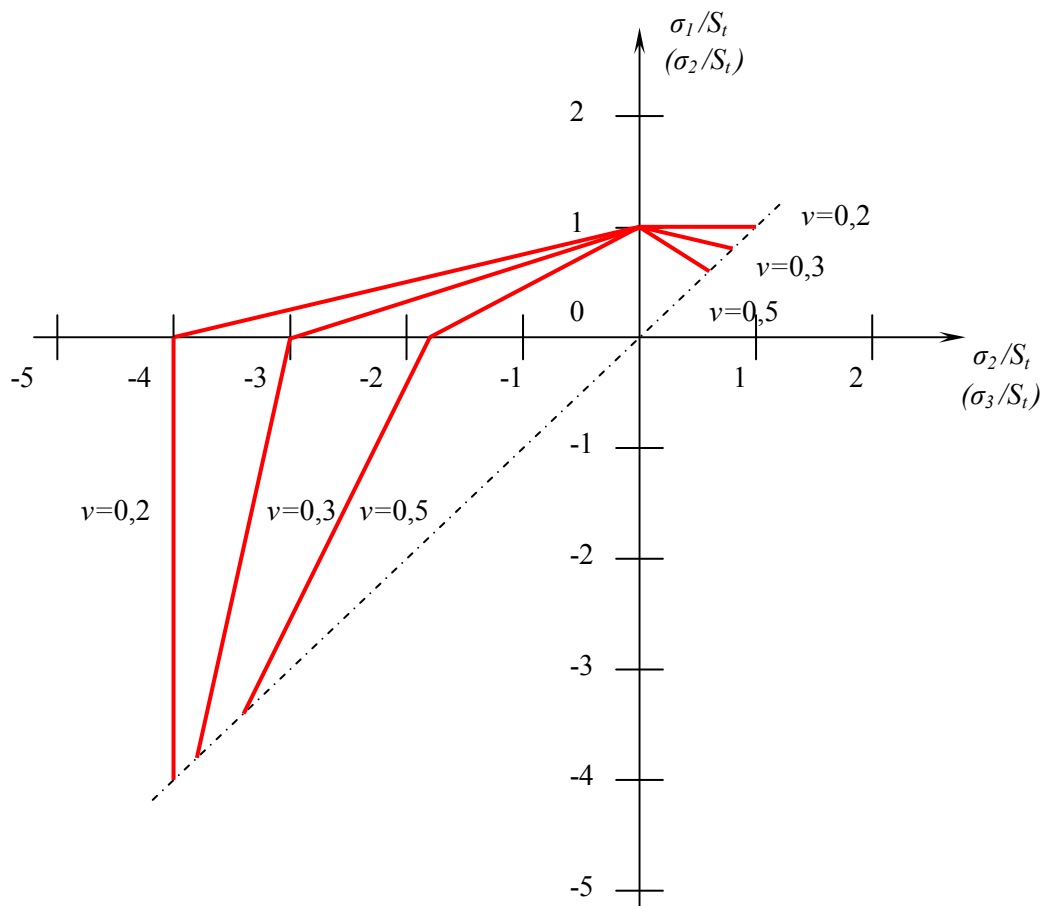
$$\sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{3 + 15\nu}{2(7 - 5\nu)} S = k_3 S \quad (8)$$

gdzie ν - współczynnik Poissona.

Zakładając, że kulista pustka znajdzie się w materiale w miejscu, w którym zamiast jednorodnego naprężenia rozciągającego S występują trzy naprężenia główne $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, skierowane wzdłuż osi x, y, z – rys 2b, można przez superpozycję wyznaczyć wartości naprężeń w punktach „A”, „B” i „C” pustki. Naprężenie o największej wartości wystąpi w punkcie „C”. Oznaczając maksymalną wartość naprężenia rozciągającego jaka wystąpi w punkcie „C” na powierzchni kulistej pustki (naprężenia intensyfikowanego) przez σ_{int} , można jego wartość wyznaczyć na podstawie zależności

$$\sigma_{int} = k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 + k_3 \sigma_3 \quad (9)$$

gdzie: k_1, k_2, k_3 – współczynniki wyznaczone na podstawie wzorów (4), (6) i (8).

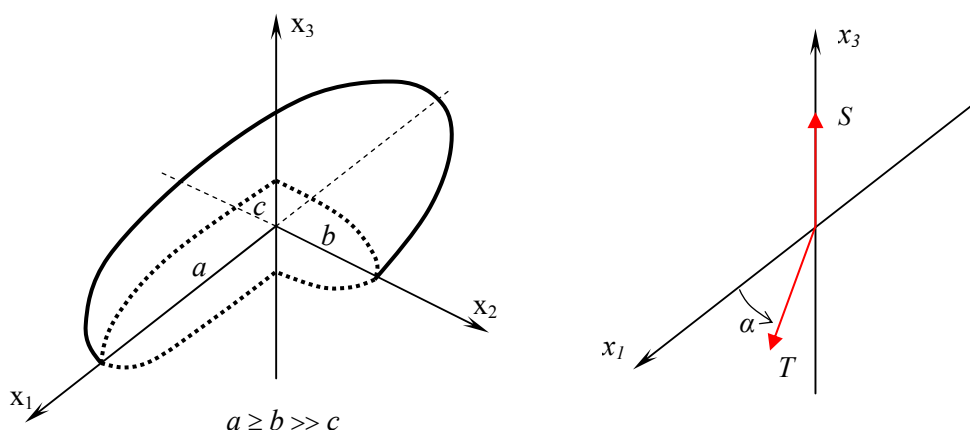


Rys. 3. Wykres naprężeń granicznych dla modelu kulistej pustki, dla różnych wartości współczynnika Poissona

Na podstawie równania (9) sporządzono wykres przedstawiający zmianę wartości naprężeń granicznych, powodujących pękanie materiału, dla różnych stanów obciążenia oraz różnych wartości współczynnika Poissona – rys. 3. Na wykresie wartości naprężeń głównych podzielono przez wartość naprężenia rozciągającego S_t , które w płaskim stanie naprężeń wywołuje pękanie materiału. W ten sposób uzyskano wykres dla płaskich stanów naprężeń we współrzędnych bezwymiarowych, a graniczna wartość naprężenia rozciągającego, odpowiadająca σ_t , powodująca pękanie materiału, jest równa 1.

Wykres wskazuje, że dla stanu naprężeń $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$ i $\sigma_3 < 0$, stosunek granicznych wartości naprężenia rozciągającego do ściskającego wzrasta wraz ze wzrostem wartości współczynnika Poissona. Wartości te zmieniają się od 0,25 do 0,54, dla zmiany ν w zakresie od 0,2 do 0,5.

B. Paul i L. Mirandy [6] rozszerzyli analizę przeprowadzoną przez A. Griffitha, dotyczącą wpływu dwuwymiarowej szczeliny na inicjację pęknięć w sprężystym materiale. Przeprowadzili oni analizę w trójwymiarowym układzie naprężeń, dla elipsoidalnego modelu pustki o półosiach a , b , c – rys. 4. Została ona obciążona naprężeniem normalnym S w kierunku osi x_3 oraz stycznym T w płaszczyźnie $x_1 - x_2$.

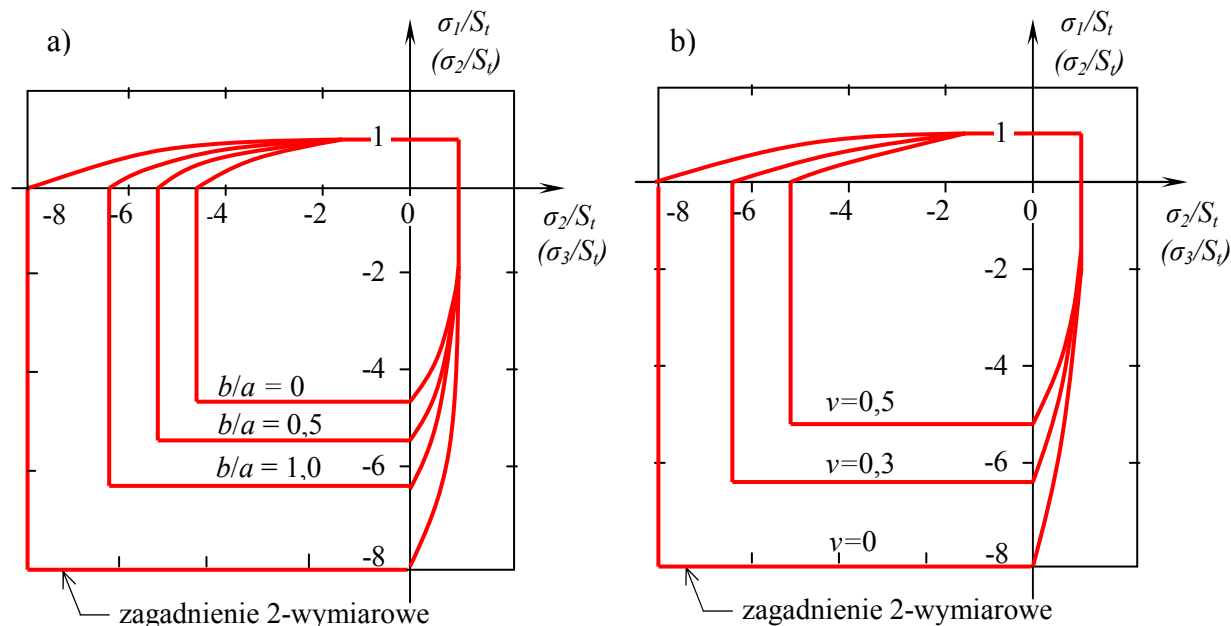


Rys. 4. Elipsoidalna pustka i sposób obciążenia

Na rys. 5 przedstawiono w dwuosiowym układzie naprężeń wykresy określające wpływ kształtu elipsoidalnej pustki (rys. 5a) oraz współczynnika Poissona (rys. 5b), na wartości naprężeń granicznych, decydujących o pękaniu materiału. Wykres dotyczy punktu na elipsoidalnej pustce dla którego $\alpha = 0^\circ$, przy $c/b \ll 0$. Dla porównania, przedstawiono też wyniki uzyskane dla płaskiej szczeliny w analizie Griffitha.

Porównanie wykresów naprężeń granicznych dla modelu kulistej pustki (rys. 3) i elipsoidalnej pustki (rys. 5) wskazuje na większy udział naprężeń ściskających w inicjacji pęknięć w materiale w przypadku kulistej pustki. Stosunek granicznych wartości naprężeń rozciągających do ściskających jest tu większy niż dla modelu elipsoidalnej pustki.

Wpływ własności materiału określonych współczynnikiem Poissona jest dla obu modeli podobny. Zwiększenie wartości ν powoduje zwiększenie udziału naprężeń ściskających w pękaniu, co wynika ze wzrostu stosunku granicznej wartości naprężenia rozciągającego do ściskającego.



Rys. 5. Wykres naprężeń granicznych w dwuosiowym polu naprężeń dla modelu elipsoidalnej pustki: a) $\nu = 0,3$; b) $b/a = 1$

3. WYZNACZENIE EKWIWALENTNEJ WARTOŚCI NAPRĘŻENIA DLA MODELU KULISTEJ PUSTKI

Na podstawie zależności (4), (6), (8), (9) można wyznaczyć wartość ekwiwalentnego naprężenia rozciągającego σ_{red} , które wywoła taki sam stan wyężenia materiału w punkcie „C” (rys. 2b) ze względu na niebezpieczeństwo kruchego pęknięcia, jak złożony stan naprężeń. W obu przypadkach pęknięcie materiału wokół kulistej pustki wystąpi, gdy wartości naprężenia intensyfikowanego będą takie same i przekroczą określoną, charakterystyczną dla danego materiału wartość odpowiadającą naprężeniu kruchego pęknięcia.

Dla jednoosiowego rozciągania wartość naprężenia intensyfikowanego w punkcie „C” można wyznaczyć z zależności

$$\sigma_{int} = \frac{27 - 15\nu}{2(7 - 5\nu)} \cdot \sigma_1 \quad (10)$$

dla złożonego stanu naprężeń z zależności

$$\sigma_{int} = \frac{27 - 15\nu}{2(7 - 5\nu)} \cdot \sigma_1 + \frac{15\nu - 3}{2(7 - 5\nu)} \cdot \sigma_2 - \frac{3 + 15\nu}{2(7 - 5\nu)} \cdot \sigma_3 \quad (11)$$

stąd

$$\sigma_{red} = \sigma_1 + w_1 \cdot \sigma_2 - w_2 \cdot \sigma_3 \quad (12)$$

gdzie: $w_1 = \frac{5\nu - 1}{9 - 5\nu}$, $w_2 = \frac{5\nu + 1}{9 - 5\nu}$.

Zarówno w zależności (12) jak w hipotezie Mohra (1) uwzględniony jest wpływ naprężenia głównego σ_3 na wzrost wyężenia materiału. Naprężenie to powinno mieć wartość ujem-

na, a praktyczne zastosowanie mają rozkłady granicznych wartości naprężeń wyznaczone dla $\sigma_1 > 0$ i $\sigma_3 < 0$.

Można jednocześnie zauważyć, że zależność wyprowadzona na podstawie modelu kulistej pustki uwzględnia wpływ trzech naprężeń głównych na wartość naprężenia redukowanego, natomiast hipoteza *Mohra* tylko dwóch.

Współczynniki w_1 i w_2 w zależności (12) zależą od wartości współczynnika Poissona ν . Ze wzrostem wartości ν ich wartości rosną, przy czym większą wartość ma współczynnik w_2 .

Wstawiając do wzoru (12) odpowiednie wartości współczynnika Poissona, można otrzymać zależności dla wyznaczenia wartości naprężeń redukowanych dla różnych materiałów.

Przykładowo, przyjmując dla węglików spiekanych $\nu = 0,2$ otrzymuje się

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - 0,25 \sigma_3 \quad (13)$$

Uwzględniając własności węglików spiekanych [2, 7, 8], wartość naprężenia redukowanego, wyznaczonego na podstawie hipotezy *Mohra* wyniesie

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - (0,15 \div 0,30) \sigma_3 \quad (14)$$

Podobieństwo zależności (13) i (14) może wskazywać na istotny wpływ na kruchą wytrzymałość węglików spiekanych nieciągłości struktury, w postaci zbliżonej do kulistych pustek.

4. WNIOSKI

Hipoteza Mohra powstała jako rozszerzenie na materiały o różnej wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie hipotezy Tresci, odnoszącej się do złomu plastycznego. Model kulistej pustki stosowany jest w badaniach kruchego pęknięcia materiału. Porównując wzory (1) i (12), można zauważyć ich podobieństwo.

Obie zależności uwzględniają dodatni wpływ naprężenia ściskającego σ_3 na wartość naprężenia redukowanego. W przypadku hipotezy Mohra (1) jest on określony stosunkiem wartości R_m/R_c . W zależności (12) wpływ ten rośnie wraz ze wzrostem współczynnika Poissona ν . Jednocześnie, analiza naprężeń na powierzchni kulistej pustki wykazuje, że wraz ze wzrostem współczynnika Poissona ν rośnie wartość R_m/R_c (rys. 3).

Poza współczynnikiem Poissona na intensywność oddziaływania naprężenia ściskającego na wartość naprężenia inicjującego kruche pęknięcie wpływa też kształt mikropustek występujących w materiale. Przedstawione przykłady wskazują, że dla okrągłych i kulistych pustek wpływ ten jest większy niż dla eliptycznych, czy elipsoidalnych.

Zakładając, że o pęknięciu materiału decyduje zintensyfikowane naprężenie, jakie powstaje na powierzchniach mikropustek, można stwierdzić, że przeprowadzona analiza potwierdza zasadność stosowania hipotezy Mohra do badania wytrzymałości materiału w zakresie kruchego pęknięcia.

Należy jednocześnie zaznaczyć, że wystąpienie wokół nieciągłości o różnym kształcie warunków do inicjacji mikropęknięć nie oznacza równocześnie ich dalszego rozwoju, gdyż zależy to od ogólnego stanu naprężeń w materiale.

LITERATURA

1. Wodecki J.: Badanie wytrzymałości ostrza noża tokarskiego przy użyciu metody elementów skończonych. „Modelowanie Inżynierskie” 2007 t. 2 nr 33, s. 159 – 166.
2. Лоладзе Т., Н.: Прочность износостойкость режущего инструмента. Москва: Издательство "Машиностроение", 1982, s. 84.
3. Зорев Н. Н.: Вопросы механики процесса резания металлов. Машгиз, Москва 1956, s. 166.
4. Timoszenko S., Goodier J.N.: Teoria sprężystości. Wyd.2. Warszawa : Arkady, 1962, s. 83 ÷85 i 313 ÷ 315.
5. Shaw M. C.: Metal cutting principles. Wyd. 2. New York, Oxford : Oxford University Press, 2005, s. 81 ÷84 i 189 ÷ 193.
6. Paul B., Mirandy L.: An improved fracture criterion for three-dimensional stress states. Transactions of the ASME Journal of Engineering Materials and Technology 1976, Vol. 98, s. 159 ÷ 163.
7. Бетанели А., И.: Прочность и надежность режущего инструмента. Тбилиси : Издательство "Сабчота сакартвело", 1973, s. 143 ÷ 158.
8. Kunstetter S.: Narzędzia skrawające do metali – konstrukcja. Wyd. 3. Warszawa : WNT, 1973, s. 40.

APPLYING OF MOHR HYPOTHESIS FOR MODEL RESEARCH ON BRITTLE STRENGTH OF CUTTING TOOLS

Summary. The legitimacy of applying Mohr hypothesis for research on brittle strength of cutting tools was considered. The influence of circular and spherical voids in material on the concentration of the stress, causing brittle fracture was shown. The formula for determination of the value of reduced stress based on the spherical voids was assigned. The similarity between this formula and formula of Mohr hypothesis was pointed out.