MODELOWANIE INŻYNIERSKIE ISSN 1896-771X
34, s. 111-118, Gliwice 2007

METODY PERTURBACYJNE II RZĘDU W MECHANICE

JERZY SKRZYPCZYK

Zakład Mechaniki Teoretycznej, Politechnika Śląska
email: jerzy.skrzypczyk@polsl.pl

Streszczenie. W pracy przedstawiono nowy system algebraiczny ze specjalnie zdefiniowanymi operacjami dodawania i mnożenia. Nowo wprowadzone liczby zostały nazwane liczbami perturbacyjnymi II rzędu. Wykazano, że system liczb rzeczywistych (R,+,•) jest zanurzony w nowym systemie algebraicznym $(R_{\varepsilon 2},+_{\varepsilon 2},\bullet_{\varepsilon 2})$. Przedstawiono również jak wykonuje się pozostałe operacje algebraiczne takie jak: odejmowanie, odwrotność oraz dzielenie. Klasyczne problemy perturbacyjne II rzędu mogą być rozwiązywane w nowym systemie równie łatwo, jak zwykłe problemy matematyki stosowanej, mechaniki teoretycznej i fizyki. Nie są wymagane żadne dodatkowe przekształcenia. Jako przykładem posłużono się prostymi zadaniami perturbacyjnymi ze statyki i dynamiki dla ramy w zakresie sprężystym.

1. WSTĘP

Teoria perturbacji pojawiła się w jednej z najstarszych dziedzin matematyki stosowanej: mechanice nieba. Współczesne zastosowania teorii perturbacji sięgają dzisiaj daleko dalej niż mechanika nieba, ale idea metody pozostała niezmieniona. Teoria perturbacji jest dzisiaj częścią nauki o ogromnym znaczeniu teoretycznym i praktycznym. Dokładnie zaczęła się ona w latach 1926/27 wraz z pracami Rayleigha i Schrödingera. Obecnie metody perturbacyjne mają ogromną bibliografię liczoną w tysiącach pozycji i pozostają niezmiennie w użyciu. [5]

Analizę zaczyna się zwykle od prostego problemu, który łatwo rozwiązać, tzw. problemu bez perturbacji i wykorzystuje się go jako przybliżenie rozwiązania bardziej skomplikowanego problemu, który różni się od podstawowego tylko istnieniem pewnych małych składników. Rozwiązania poszukuje się w postaci kolejnych przybliżeń rozwiązania podstawowego, przedstawionego najczęściej w postaci szeregu potęgowego pewnego małego parametru.

Generalnie metody perturbacyjne mogą być sformułowane w następującym sensie. Zbadajmy jak perturbacje (małe) wielkości nominalnego parametru mogą zmienić rozwiązanie rozważanego problemu. Założmy, że rozwiązanie problemu, powiedzmy $\boldsymbol{x}_0$, odpowiada macierzy współczynników $\boldsymbol{A}$. Podstawowy problem teorii perturbacji jest następujący: jak zmieni się rozwiązanie, jeżeli macierz $\boldsymbol{A}$ zmieni wartość na $\boldsymbol{A}+\varepsilon\boldsymbol{B}$, gdzie ε jest pewnym małym parametrem, a $\boldsymbol{B}$ jest perturbacją. Poszukujemy rozwiązania w postaci szeregu jednorodnych składników zależnych od macierzy perturbacji $\boldsymbol{B}$, tzn. postaci

$$\boldsymbol{x}:=\boldsymbol{x}_0+\varepsilon\boldsymbol{x}_1+\varepsilon^2\boldsymbol{x}_2+\varepsilon^3\boldsymbol{x}_3+\ldots\ldots\ldots \tag{1}$$

Jeżeli ograniczymy rozważania do dwóch pierwszych składników szeregu (1), mówimy o metodzie perturbacji I rzędu, jeżeli do trzech to II rzędu itd. W metodach perturbacyjnych poważne trudności są związane z koniecznością wykonywania dużej ilości obliczeń analitycznych. Jako wynik otrzymujemy zbiór klasycznych zadań, które zwykle rozwiązujemy na drodze numerycznej, por. [1],[2],[6].

W pracy zastosowano specjalny rodzaj liczb, zwanych dalej liczbami perturbacyjnymi II rzędu (PN II rzędu) i podobnych do liczb perturbacyjnych zdefiniowanych we wcześniejszych pracach autora, por. [8-18]. Przypomnijmy, że są one zdefiniowane jako uporządkowane trójki liczb rzeczywistych $(x,y,z)\in R^3$. [19]

Zbiór elementów PN II rzędu z dodawaniem ($+_{\varepsilon 2}$) i mnożeniem ($\bullet_{\varepsilon 2}$) oraz ustalonym elementem neutralnym dodawania $0_{\varepsilon 2}:=(0,0,0)$ i mnożenia $1_{\varepsilon 2}:=(1,0,0)$ jest ciałem, por. [4-5]. Zdefiniowane w taki sposób ciało jest nazwane ciałem liczb perturbacyjnych II rzędu.

Ciało PN II rzędu nie zawiera ciała liczb rzeczywistych R. Można udowodnić, że liczby rzeczywiste można rozpatrywać jako pewne szczególne elementy podzbioru ciała PN II rzędu, przy zachowaniu wszystkich obowiązujących dla nich reguł dodawania i mnożenia oraz przy zachowaniu elementów neutralnych dodawania i mnożenia.

Zdefiniowano również funkcje o wartościach perturbacyjnych II rzędu dla argumentów perturbacyjnych II rzędu, jako rozszerzenie klasycznych funkcji elementarnych i trygonometrycznych. Własności ε^2-funkcji są podobne do własności zwykłych funkcji.

Obliczenia z wykorzystaniem liczb perturbacyjnych II rzędu są z matematycznego punktu widzenia równoważne klasycznym metodom perturbacyjnym II rzędu.

Nowy formalizm matematyczny został zastosowany do klasycznych zagadnień teorii perturbacji z zakresu mechaniki teoretycznej. Rozważono problemy statyczne i dynamiczne prostych ram w zakresie sprężystym z perturbacjami w zakresie obciążeń i parametrów (systemy liniowych równań algebraicznych z perturbacjami), podobnie jak dynamiczne problemy drgań (perturbowane zagadnienie wartości własnych). Zalety nowej metodologii są przedstawione zarówno w zakresie obliczeń analitycznych, jak i w specjalistycznych procedurach numerycznych dedykowanych do zagadnień liniowych równań perturbowanych, zagadnień wartości własnych i badań w zakresie równań różniczkowych. Nowa technika może być np. zastosowana do analizy równań ze zmiennymi różnych typów i w sytuacji, gdy wszystkie parametry równania są perturbowane.

Wraz z nowym systemem obliczeń otrzymujemy niezwykle proste i użyteczne narzędzie do rozważań analitycznych i numerycznych zagadnień złożonych problemów perturbacyjnych mechaniki. [14-27]

Bardziej zaawansowane zastosowania techniczne por. Skrzypczyk, Winkler-Skalna, Fale akustyczne w warstwowym ośrodku niejednorodnym: nowa metoda perturbacji II rzędu, niniejszy zeszyt.

2. SYSTEM ALGEBRAICZNY LICZB PERTURBACYJNYCH II RZĘDU

DEFINICJA 1. Zdefiniujemy liczbę zwaną dalej liczbą perturbacyjną II rzędu jako trójkę uporządkowaną liczb rzeczywistych $(x,y,z)\in R^3$. Zbiór liczb perturbacyjnych II rzędu będziemy oznaczać jako $R_{\varepsilon 2}$. Pierwszy element x trójki (x,y,z) jest nazywany wartością główną, drugi y - perturbacją I rzędu, natomiast trzeci z - perturbacją II rzędu.

Niech $a,a_1,a_2,a_3\in R_{\varepsilon 2}$ oznaczają dowolne liczby perturbacyjne II rzędu oraz $a:=(x,y,z)$, $a_1:=(x_1,y_1,z_1)$, $a_2:=(x_2,y_2,z_2)$, $a_3:=(x_3,y_3,z_3)$, $x,y,z,x_i,y_i,z_i\in R$, i=1,2,3. Powiemy, że dwie liczby perturbacyjne II rzędu są równe: $a_1\equiv a_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ oraz $z_1 = z_2$. Wprowadzimy w zbiorze $R_{\varepsilon 2}$ działania dodawania ($+_{\varepsilon 2}$) i mnożenia ($\bullet_{\varepsilon 2}$) następująco:

$$a_1 +_{\varepsilon 2} a_2:=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2) \tag{2}$$

$$a_1 \bullet_{\varepsilon 2} a_2:=(x_1x_2,x_1y_2+x_2y_1,x_1z_2+z_1x_2+y_1y_2) \tag{3}$$

TWIERDZENIE 1. Zbiór $R_{\varepsilon 2}$ z działaniami dodawania ($+_{\varepsilon 2}$) i mnożenia ($\bullet_{\varepsilon 2}$) określonymi wzorami (2) i (3) oraz z wyróżnionymi elementami: zerowym $0_{\varepsilon 2}:=(0,0,0)$ oraz jedynkowym $1_{\varepsilon 2}:=(1,0,0)$ jest ciałem. Ciało to nazwiemy ciałem liczb perturbacyjnych II rzędu. □

Określone powyżej w def. 1 ciało $R_{\varepsilon 2}$ nie zawiera ciała liczb rzeczywistych R. Można jednak wykazać, że liczby rzeczywiste mogą być traktowane jako pewne elementy ciała $R_{\varepsilon 2}$, z zachowaniem działań algebraicznych oraz elementów neutralnych dodawania i mnożenia, por. [8-9], [11-13].

TWIERDZENIE 2. Przekształcenie j:R→$R_{\varepsilon 2}$, $j(x)$:=$(x,0,0)$ dla każdego $x\in$R, jest zanurzeniem systemu algebraicznego liczb rzeczywistych R w systemie algebraicznym $R_{\varepsilon 2}$. Jest ono przekształceniem różnowartościowym oraz zachowuje odpowiadające sobie działania algebraiczne oraz elementy neutralne dodawania i mnożenia. □

Więcej szczegółów patrz [8]-[11].

3. NOTACJA UPROSZCZONA W RACHUNKU PERTURBACYJNYM

Ponieważ przekształcenie $j(.)$ jest zanurzeniem, więc każdą liczbę perturbacyjną postaci $(a,0,0)\in R_{\varepsilon 2}$, $a\in$R możemy utożsamić z liczbą rzeczywistą a. Możemy skorzystać z tego utożsamienia w celu wprowadzenia dogodniejszej symboliki dla liczb perturbacyjnych.

Oznaczmy przez ε liczbę perturbacyjną $(0,1,0)$ oraz przez η liczbę perturbacyjną $(0,0,1)$.

Załóżmy, że liczba perturbacyjna $(x,0,0)$ będzie identyfikowana z liczbą $x\in$R, $(y,0,0)$ z liczbą $y\in$R oraz $(z,0,0)$ z liczbą z. Wówczas dla dowolnej $(x,y,z)\in R_{\varepsilon 2}$, mamy

$$(x,y,z) = (x,0,0) +_{\varepsilon 2} (0,y,0) +_{\varepsilon 2} (0,0,z) = (x,0,0) +_{\varepsilon 2} (y,0,0) \bullet_{\varepsilon 2} (0,1,0) +_{\varepsilon 2} (z,0,0) \bullet_{\varepsilon 2} (0,0,1) =$$
$$=j(x) +_{\varepsilon 2} \varepsilon\bullet_{\varepsilon 2} j(y) +_{\varepsilon 2} \eta\bullet_{\varepsilon 2} j(z) = x +_{\varepsilon 2} \varepsilon\bullet_{\varepsilon 2} y +_{\varepsilon 2} \eta\bullet_{\varepsilon 2} z \quad (4)$$

Liczby rzeczywiste x,y,z nazywać będziemy odpowiednio: częścią główną: a_mv, częścią małą I rzędu (perturbacją I rzędu): a_pv_1 i częścią małą II rzędu (perturbacją II rzędu): a_pv_2. Liczbę perturbacyjną II rzędu $a=x+_{\varepsilon 2}\varepsilon\bullet_{\varepsilon 2}y+_{\varepsilon 2}\eta\bullet_{\varepsilon 2}z$ będziemy zapisywać w uproszczeniu $a=x+\varepsilon y+\eta z= a\_mv+\varepsilon a\_pv_1+\eta a\_pv_2$. Jeżeli obie części perturbacyjne są równe zeru, to a jest liczbą rzeczywistą.

Z praw mnożenia wynika, że

$$\varepsilon^2 := \varepsilon \bullet_{\varepsilon 2} \varepsilon = (0,1,0) \bullet_{\varepsilon 2} (0,1,0) = (0,0,1) = \eta,$$

a więc zgodnie z uproszczoną notacją $\varepsilon^2=\eta$. Podobnie

$$\varepsilon\eta := \varepsilon \bullet_{\varepsilon 2} \eta = (0,1,0) \bullet_{\varepsilon 2} (0,0,1) = (0,0,0),$$
$$\eta^2 := \eta \bullet_{\varepsilon 2} \eta = (0,0,1) \bullet_{\varepsilon 2} (0,0,1) = (0,0,0),$$
$$\varepsilon^3 := \varepsilon \bullet_{\varepsilon 2} \varepsilon \bullet_{\varepsilon 2} \varepsilon = \varepsilon^2 \bullet_{\varepsilon 2} \varepsilon =(0,0,1) \bullet_{\varepsilon 2} (0,1,0) = (0,0,0),$$

i zgodnie z uproszczoną notacją $\varepsilon^3=0$. Jak zwykle będziemy używać skrótu dla $a\bullet_{\varepsilon 2}a_1$ jako aa_1 oraz $a +_{\varepsilon 2} a_1$ jako $a+a_1$.

Możemy zatem stwierdzić na podstawie powyższych rozważań, że zdefiniowane zostały nowe obiekty. Będą dalej nazywane liczbami perturbacyjnymi II rzędu i są uporządkowanymi trójkami liczb rzeczywistych $(x,y,z)\in R^3$, które będą zapisywane w następującej formie: $a:=x+\varepsilon y+\eta z =x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z$. Zbiór liczb perturbacyjnych II rzędu będzie oznaczony jako $R_{\varepsilon 2}$, naturalnie $j(R)\subset R_{\varepsilon 2}$.

Zwolennicy „zwykłych” metod perturbacyjnych mogą „działać” na nich tak jak na liczbach rzeczywistych, dodając je, odejmując, mnożąc i dzieląc. Symbol ε będzie pełnił rolę małego parametru II rzędu, przy założeniu, że $\varepsilon^3=0$.

Wzory na sumę, różnicę, iloczyn i iloraz dają się przy wykorzystaniu uproszczonej notacji wyrazić następująco:

$$a_1+a_2 := x_1+x_2+\varepsilon(y_1+y_2)+\varepsilon^2(z_1+z_2) \quad (5)$$

Odejmowanie zdefiniujemy jako a_1-a_2 = a_1+(-a_2), zatem

$$a_1-a_2 := x_1-x_2+\varepsilon(y_1-y_2) +\varepsilon^2(z_1-z_2) \quad (6)$$
$$\alpha a := \alpha x+\varepsilon(\alpha y)+\varepsilon^2(\alpha z), \text{ for } \alpha\in R^1 \quad (7)$$
$$a_1a_2 := x_1x_2+\varepsilon(x_1y_2+x_2y_1)+\varepsilon^2(x_1z_2+z_1x_2+y_1y_2) \quad (8)$$

Element odwrotny do liczby perturbacyjnej $a=x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z$ jest zdefiniowany jako liczba perturbacyjna $a^{-1}=x_1+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 z_1$ taka, że $aa^{-1}= (x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z)(x_1+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 z_1)=(1,0,0)$, $x,y,z,x_1,y_1,z_1\in$R. Zauważmy dalej

$$(x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z)\,(x_1+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 z_1) = xx_1+\varepsilon(xy_1 +yx_1)+\varepsilon^2(xz_1+yy_1+zx_1) =1+\varepsilon 0+\varepsilon^2 0 \tag{9}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_1+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 z_1=(x,y,z)^{-1}=\left(\frac{1}{x},-\frac{y}{x^2},-\frac{z}{x^2}+\frac{y^2}{x^3}\right),\quad x\neq 0 \tag{10}$$

Formuła dzielenia może być zatem wprowadzona w następujący sposób

$$\begin{aligned}a_1/a_2&=(x_1+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 z_1)\big/(x_2+\varepsilon y_2+\varepsilon^2 z_2)=\\&=(x_1+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 z_1)\left(\frac{1}{x_2}-\varepsilon\frac{y_2}{x_2^2}+\varepsilon^2\left(-\frac{z_2}{x_2^2}+\frac{y_2^2}{x_2^3}\right)\right)=\\&=\frac{x_1}{x_2}+\varepsilon\left(\frac{y_1}{x_2}-\frac{x_1y_2}{x_2^2}\right)+\varepsilon^2\left(-\frac{x_1z_2}{x_2^2}+\frac{x_1y_2^2}{x_2^3}-\frac{y_1y_2}{x_2^2}+\frac{z_1}{x_2}\right),\quad x_2\neq 0\end{aligned}$$

4. UOÓLNIONE ε-FUNKCJE

Funkcje o wartościach perturbacyjnych są definiowane dla argumentów perturbacyjnych jako rozszerzenia klasycznych funkcji elementarnych i trygonometrycznych. Szczegółowe własności ε-funkcji były analizowane bardziej szczegółowo w pracach [10], [12-14], [20], [24-27].

Niech $D\subset R_{\varepsilon 2}$ będzie dowolnym podzbiorem. Jeśli każdej liczbie $a\in D$ przyporządkujemy ξ-pewną liczbę perturbacyjną II rzędu, to powiemy, że w zbiorze D została określona funkcja perturbacyjna II rzędu $f_{\varepsilon 2}:D\to R_{\varepsilon 2}$, zmiennej perturbacyjnej a. Będziemy pisać $f_\varepsilon:D\to R_\varepsilon$ lub $w=f_\varepsilon(z)$ lub w uproszczeniu $w=\varepsilon\text{-}f(z)$.

Dla zilustrowania, w jaki sposób można tworzyć rozszerzenia znanych funkcji na argumenty perturbacyjne, wykorzystamy dowolną prostą funkcję. Obok wielomianów i funkcji wymiernych do najprostszych funkcji zmiennej rzeczywistej należy funkcja wykładnicza $exp(a)$. Jak zatem rozumieć natomiast zapis $exp(a)$, gdy $a=x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z\in R_{\varepsilon 2}$?
Jak wiadomo, dla $x\in$R, funkcja wykładnicza jest określona szeregiem potęgowym

$$exp(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.......=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},\qquad x\in R \tag{11}$$

zbieżnym na całej osi R. Na podstawie relacji (11) zdefiniujemy funkcję $exp_{\varepsilon 2}(a)$, dla $a=x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z\in R_{\varepsilon 2}$ jako

$$exp_{\varepsilon 2}(a):=1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+.......=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!},\qquad a\in R_{\varepsilon 2} \tag{12}$$

Korzystając z relacji (11) oraz (12), możemy napisać

$$\begin{aligned}exp_{\varepsilon 2}(a)&:=1+\frac{x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z}{1!}+\frac{x^2+\varepsilon 2xy+\varepsilon^2(2xz+y^2)}{2!}+.......=\\&=\left(1+\varepsilon y+\varepsilon^2\left(z+\frac{y^2}{2}\right)\right)exp(x)\qquad a\in R_\varepsilon\end{aligned} \tag{13}$$

Zauważmy, że szereg (13) jest bezwzględnie zbieżny dla każdej wartości $a \in R_{\varepsilon 2}$. Zachodzi ponadto

$$j(exp(x)) = (exp(x),0,0) = exp_{\varepsilon 2}(x),$$

czyli nowa funkcja $exp_{\varepsilon 2}(.)$ jest rzeczywiście rozszerzeniem funkcji rzeczywistej $exp(x)$.

5. PRZYKŁAD

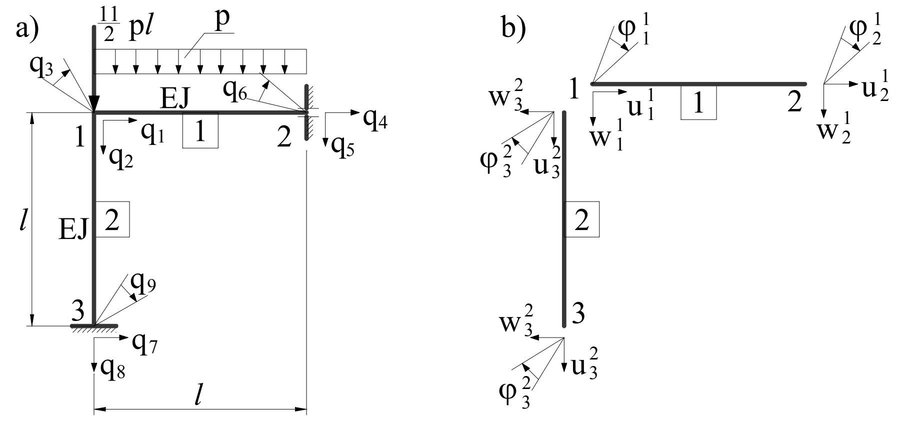
Nowy formalizm matematyczny został zastosowany do prostych problemów perturbacyjnych, które występują w klasycznej mechanice teoretycznej. Przedyskutujmy problem perturbacyjny dla zagadnienia statyki prostej ramy (rys. 1) oraz zagadnienie jej drgań dynamicznych, por. [3]. Zalety nowej metody można zauważyć zarówno w rozważaniach analitycznych jak i w procedurach numerycznych, które służą analizie układów liniowych oraz problemów zagadnień własnych, por. [8-13], [20-27].
Równania równowagi przyjmują postać ***Kq***=***F***, w szczególności

$$\frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix} 12+\lambda^2 & 0 & -6l & -\lambda^2 \\ 0 & 12+\lambda^2 & 6l & 0 \\ -6l & 6l & 8l^2 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6\,pl \\ \dfrac{pl^2}{12} \\ 0 \end{bmatrix},\ \lambda^2 = \frac{Al^2}{J} \tag{14}$$

Załóżmy, że $\lambda=80,\ l=5,\ p=4.157$, szczegóły patrz [3]. Dla tych wartości nominalnych przyjęto, że: perturbacje I rzędu dla wszystkich niezerowych elementów są losowe oraz rzędu $\pm 10\%$ nominalnej wartości, perturbacje II rzędu wszystkich elementów niezerowych są losowe oraz rzędu $\pm 1\%$ nominalnej wartości. Znaki perturbacji założono losowe. Numeryczne wartości po obliczeniach następujące:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6412.000-\varepsilon 641.171-\varepsilon^2 53.215 & 0.000 & -30.000-\varepsilon 2.808+\varepsilon^2 0.186 & -6400.00+\varepsilon 303.480-\varepsilon^2 31.170 \\ 0.000 & 6412.000+\varepsilon 129.975+\varepsilon^2 50.220 & 30.000+\varepsilon 0.090-\varepsilon^2 0.061 & 0.000 \\ -30.00-\varepsilon 2.808+\varepsilon^2 0.186 & 30.000+\varepsilon 0.090-\varepsilon^2 0.061 & 200.000-\varepsilon 16.418 & 0.000 \\ -6400.000+\varepsilon 303.480-\varepsilon^2 31.170 & 0.000 & 0.000 & -6400.000+\varepsilon 303.480 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.000 & 124.703+\varepsilon 2.293+\varepsilon^2 0.029 & 8.660+\varepsilon 0.652+\varepsilon^2 0.086 & 0.000 \end{bmatrix}^T.$$



Rys. 1 Schemat ramy [3]

Numeryczne obliczenia w nowej arytmetyce są bardzo łatwe do programowania, prawie z taką samą złożonością jak dla liczb rzeczywistych lub zespolonych. Obliczenia wykonano z pojedynczą precyzją z wykorzystaniem standardowej procedury eliminacji Gaussa z równoważeniem (pivoting) zastosowanym do części głównej macierzy perturbacyjnej ***K***, mianowicie do ***K_mv***, [6]. Otrzymano następujące wyniki:

$$\mathbf{q} = \frac{l^3}{EJ}\left[0.162 - \varepsilon 1.465 - \varepsilon^2 15.853,\quad 0.019 + \varepsilon 0.009 - \varepsilon^2 0.011,\quad 0.0647 - \varepsilon 0.209 + \varepsilon^2 0.000,\quad 0.162 - \varepsilon 1.475 + \varepsilon^2 15.946\right]^T$$

Dokładność obliczeń była kontrolowana przez śledzenie wartości odpowiednich residuów:

residuum_mv=[-.12207030E-03, -.15258790E-04, .95367430E-06, .00000000E+00]
residuum_pv1=[.00000000E+00, -.47683720E-06, -.22649770E-05, .00000000E+00]
residuum_pv2=[.00000000E+00, -.49173830E-06, -.28885900E-04, .00000000E+00]

Warunek wystarczający stabilności rozpatrywanej ramy jest następujący: macierz $\boldsymbol{K} - \sigma^2 \boldsymbol{K}_G^0$ musi być macierzą dodatnio określoną, por. [3,4], gdzie

$$\boldsymbol{K}_G^{\,0} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & 0 & -\frac{l}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l}{10} & 0 & \frac{2l^2}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \frac{Sl^2}{EJ}$$

Dla $\sigma^2=0$ powyższa macierz jest macierzą sztywności i ma własność dodatniej określoności. Ale własność ta może ulec "zagubieniu", jeżeli spełniona będzie relacja $det(\boldsymbol{K}-\sigma^2\boldsymbol{K}_G^0) = 0$, a mianowicie

$$\frac{3}{20}\left(12+\lambda^2\right)\sigma^4 - \frac{2}{5}\left(192+25\lambda^2\right)\sigma^2 + 12\left(24+5\lambda^2\right) = 0 \tag{15}$$

Załóżmy, że $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2$. Wówczas równanie (15) przyjmuje postać

$$\begin{gathered}\frac{3}{20}\left(12+\lambda_0^2\right)\sigma^4 - \frac{2}{5}\left(192+25\lambda_0^2\right)\sigma^2 + 12\left(24+5\lambda_0^2\right) + \varepsilon\lambda_0\lambda_1\left(\frac{3}{10}\sigma^4 - 20\sigma^2 + 120\right) + \\ + \varepsilon^2\left(\frac{3}{20}\left(2\lambda_0\lambda_2+\lambda_1^2\right)\sigma^4 + 10\left(2\lambda_0\lambda_2+\lambda_1^2\right)\sigma^2 + 60\left(2\lambda_0\lambda_2+\lambda_1^2\right)\right) = 0\end{gathered} \tag{16}$$

Równanie (16) ma dwa rozwiązania

$$\sigma_{1,2}^{\;2} = \frac{4}{3}\,\frac{192+25\lambda^2 \mp 2\sqrt{5976+1455\lambda^2+100\lambda^4}}{12+\lambda^2} \tag{17}$$

gdzie wszystkie operacje są w sensie perturbacyjnym.

Załóżmy, że $\lambda=80+\varepsilon 0.8+\varepsilon^2 0.08$, wówczas otrzymujemy wyniki numeryczne postaci

$$\sigma_1^2=6.663858+\varepsilon 5.612860E\text{-}05+\varepsilon^2 4.770570E\text{-}06$$
$$\sigma_2^2=59.957890+\varepsilon 8.406466E\text{-}04+\varepsilon^2 7.148685E\text{-}05$$

6. WNIOSKI

Obliczenia z wykorzystaniem nowych liczb perturbacyjnych prowadzą do aplikacji, które z matematycznego punktu widzenia są równoważne metodom perturbacyjnym II rzędu w klasycznej teorii perturbacji. Zalety nowego systemu algebraicznego są następujące:

- możemy całkowicie pominąć etap złożonych obliczeń analitycznych, które są typowe dla rozwijania aproksymowanych wielkości rozwiązań w szeregi nieskończone. Ta metoda jest skuteczna również dla wielkości nieznanych - poszukiwanych rozwiązań, jak również dla współczynników perturbacyjnych rozpatrywanego problemu;

- otrzymujemy ogromne uproszczenie wszystkich obliczeń arytmetycznych, które występują zwykle w analitycznym sformułowaniu i analizie problemu;
- większość znanych algorytmów numerycznych może być w prosty sposób adaptowana dla nowego systemu algebraicznego bez większych trudności.

Wraz z nowym systemem algebraicznym otrzymujemy zbiór bardzo prostych narzędzi matematycznych, które można w łatwy sposób wykorzystać w rozważaniach analitycznych oraz w komputerowej części analizy złożonych problemów perturbacyjnych.

Pokazano przykłady aplikacji sformułowania perturbacyjnego w dwóch klasycznych zadaniach mechaniki komputerowej. Przedstawiono szczegóły analizy numerycznej dla: ramy sprężystej o parametrach perturbowanych pod działaniem perturbowanych obciążeń (systemy liniowych równań algebraicznych) oraz analizy perturbacyjnej stabilności (perturbacyjne zagadnienie wartości własnych).

BIBLIOGRAFIA

1. Bellman R: Introduction to m matrix analysis. New York : Mc-Graw-Hill Book Company, 1976.
2. Gelfand I.M.: Wykłady z algebry liniowej. Warszawa: PWN, 1971.
3. Gomuliński A., Witkowski M.: Mechanika budowli: kurs dla zaawansowanych. Warszawa: Oficyna Wyd. Pol. Warszawskiej, 1993.
4. Kaczorek T.:Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice. Warszawa: WNT, 1998.
5. Kato T.: Perturbation theory for linear operators. Berlin : Springer-Verlag, 1966.
6. Kiełbasiński A., Schwetlick H.: Numerische lineare Algebra. Berlin: VEB Deutcher Verlag der Wissenschaften , 1988.
7. Korn G.A., Korn T.M.: Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów. Cz. I. Warszawa: PWN, 1983.
8. Skrzypczyk, J.: Perturbation methods - new arithmetic. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., ser. Budownictwo. Gliwice 2003, s. 391-398.
9. Skrzypczyk, J.: Metody perturbacyjne - nowa arytmetyka. Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej, Gliwice 2004, nr 23, s. 363-368.
10. Skrzypczyk, J.: Perturbation methods I - algebra, functions, linear equations, eigenvalue problems: new algebraic methodology. Proc. of International Conference New Trends in Statics and Dynamics of Buildings, October 2004, Faculty of Civil Engineering SUT Bratislava, Slovakia, s. 55-58.
11. Skrzypczyk, J.: Perturbation methods - New Algebraic Methodology with Applications in Mechanics. W: XLIV Sympozjon "Modelowanie w mechanice". Gliwice 2005. Zesz. Nauk. Kat. Mech. Stos. nr 29, s. 413 – 418.
12. Skrzypczyk J.: Perturbation methods for systems with interval parameters: Proc. of AI-METH 2005 – *Artificial Intelligence Methods, N*ovember 16-18, Poland, Gliwice, 2005.
13. Skrzypczyk J.: Perturbation methods - new algebraic methodology. Proc. of CMM-2005 – Computer Methods in Mechanics, June 21-24, 2005. Częstochowa 2005.
14. Skrzypczyk J.: Perturbation methods for systems with interval parameters. Proc. of International Conference New Trends in Statics and Dynamics of Buildings. October 2005, Faculty of Civil Engineering SUT Bratislava, Slovakia , s. 85-88.
15. Skrzypczyk, J., Multi-scale perturbation methods in mechanics. "Modelowanie Inżynierskie" 2006, nr 32, t. 1, s. 427-432.
16. Skrzypczyk, J.: Multi-scale perturbation methods in mechanics. Proc. of International Conference New Trends in Statics And Dynamics Of Buildings, October 2006, Faculty of Civil Engineering SUT Bratislava, Slovakia, s. 85-88.

17. Skrzypczyk, J.: Multi-scale perturbation methods in mechanic. “Slovak Journal of Civil Engineering” 2006, 3, s. 10-14.
18. Skrzypczyk, J.: II-order perturbation methods in mechanics. Materiały I Kongresu Mechaniki, 29-31 sierpnia 2007, Warszawa, CD s. 166.
19. Skrzypczyk, J.: II-order perturbation methods in mechanics – new algebraic methodology. Proc. of International Conference New Trends in Statics and Dynamics of Buildings, October 2007, Faculty of Civil Engineering SUT Bratislava, Slovakia, s. 233-236.
20. Skrzypczyk, J., Winkler A.: Perturbation methods II-differentiation, integration and elements of functional analysis with applications to perturbed wave equation. Proc. of International Conference New Trends in Statics and Dynamics of Buildings, October 2004, Faculty of Civil Engineering SUT Bratislava, Slovakia, s. 147-150.
21. Skrzypczyk, J., Winkler-Skalna A.: Sound wave propagation problems new perturbation methodology. “Archives of Acoustic” 2006, 31, No.3, 2006, s. 400-401.
22. Skrzypczyk, J., Winkler-Skalna A.: Sound wave propagation problems new perturbation methodology. “Archives of Acoustic” 2006, 31, No. 4, Suplement, s. 115-122.
23. Skrzypczyk, J., Winkler-Skalna A.: Sound wave propagation problems new perturbation methodology. Proc. of International Conference “New Trends in Statics and Dynamics of Buildings”, October 2006, Faculty of Civil Engineering SUT Bratislava, s. 97-100.
24. Skrzypczyk, J., Winkler-Skalna A.: Acoustic waves propagation problems in layered medium: the new II order perturbation approach. “Archives of Acoustic” 2006, 32, s. 762-763.
25. Skrzypczyk, J., Witek, H.: Fuzzy boundary element methods: a new perturbation approach for systems with fuzzy parameters. Proc. of International Conference New Trends in Statics and Dynamics of Buildings, October 2005, Faculty of Civil Engineering SUT Bratislava, 2005, s. 21-24.
26. Skrzypczyk, J., Witek H.: Fuzzy boundary element methods: a new algebraic approach for systems with fuzzy parameters. W: AI-METH Series on Artifcial Intelligence Methods : Recent Developments in Artificial Intelligence Methods 2005, s. 187 – 190.
27. Skrzypczyk, J., Witek, H.: Fuzzy boundary element methods: a new multi-scale perturbation approach for systems with fuzzy parameters. “Modelowanie Inżynierskie” 2006, nr 32, t. 1, s. 433 – 438.

II-ORDER PERTURBATION METHODS IN MECHANICS

Summary. The aim of the paper is to present a new algebraic system with specifically defined addition and multiplication operations. The new numbers called II-order perturbation numbers are introduced. It’s proved that the system of real numbers $(R,+,\bullet)$ is imbedded into the new algebraic system $(R_{\varepsilon 2},+_{\varepsilon 2},\bullet_{\varepsilon 2})$. Some additional properties as subtraction, inversion and division are presented too. Classical higher-order perturbation problems can be solved in the new algebraic system as easy as usual problems of applied mathematics, theoretical physics and techniques. Additional analytical transformations are not required. Static perturbation problems of a simple frame are discussed as well as dynamical vibration problems.