MODELOWANIE INŻYNIERSKIE ISSN 1896-771X
34, s. 79-84, Gliwice 2007

IDENTYFIKACJA ZALEŻNYCH OD TEMPERATURY PARAMETRÓW CIEPLNYCH CIAŁ ORTOTROPOWYCH Z WYKORZYSTANIEM ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA ODWROTNEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA

STANISŁAW KUCYPERA

Instytut Techniki Cieplnej, Politechnika Śląska
e-mail: kucypera@itc.polsl.pl

Streszczenie. W zagadnieniach identyfikacji procesów termofizycznych istnieje często konieczność wyznaczenia charakterystyk temperaturowych dla współczynnika przewodzenia ciepła i ciepła właściwego materiałów ortotropowych. Dlatego celem niniejszej pracy jest identyfikacja charakterystyk temperaturowych parametrów termofizycznych materiałów ortotropowych za pomocą rozwiązania odwrotnego zagadnienia przewodzenia ciepła oraz danych pomiarowych. Do rozwiązania zagadnienia odwrotnego wykorzystano iteracyjną metodę dynamicznej estymacji sekwencyjnej. Przedstawiono przykładowe wyniki analizy.

1. WSTĘP

Jak wiadomo, identyfikacja procesów termofizycznych za pomocą rozwiązania odpowiedniego odwrotnego zagadnienia przewodzenia ciepła (OZPC) obejmuje wyznaczenie zarówno parametrów termofizycznych jak i technologicznych tych procesów. Do parametrów tych najczęściej należą: warunki brzegowe, tzn. strumień ciepła, współczynnik wnikania ciepła lub temperatura otoczenia, charakterystyki termofizyczne, np. współczynnik przewodzenia ciepła lub ciepło właściwe, parametry geometryczne takie jak wymiary, kształty badanego urządzenia, prędkość ciała stałego albo prędkość płynu omywającego brzeg ciała, stan termiczny procesu lub układu w poprzedniej lub bieżącej chwili, czy też kombinacje różnych typów parametrów. Celem niniejszej pracy jest identyfikacja charakterystyk termofizycznych ciała stałego za pomocą rozwiązania odwrotnego zagadnienia przepływu ciepła z wykorzystaniem pomiarów temperatury w wybranych punktach badanego ciała (próbki).

W zagadnieniach identyfikacji parametrów termofizycznych metodą odwrotną, poszukiwane parametry najczęściej zależą od czasu i przestrzennych współrzędnych wielkości mierzonych oraz wektora stanu. Dlatego model matematyczny układu formułowany jest w postaci macierzowo-wektorowego równania, które wiąże wektor stanu układu w kroku $k+1$, z wektorami: stanu, kontroli i zakłócenia w kroku czasowym k. W rzeczywistości opisuje ono proces Markowa i przedstawia nieliniowe równanie stochastyczne.

W dotychczasowych pracach do rozwiązania odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła stosowane były m.in. metody: filtracji dynamicznej, estymacji sekwencyjnej, optymalizacyjne

wykorzystujące do rozwiązania: metodę najmniejszych kwadratów, metody algorytmów genetycznych czy też metodę Levenberga-Marquarda [1-5].

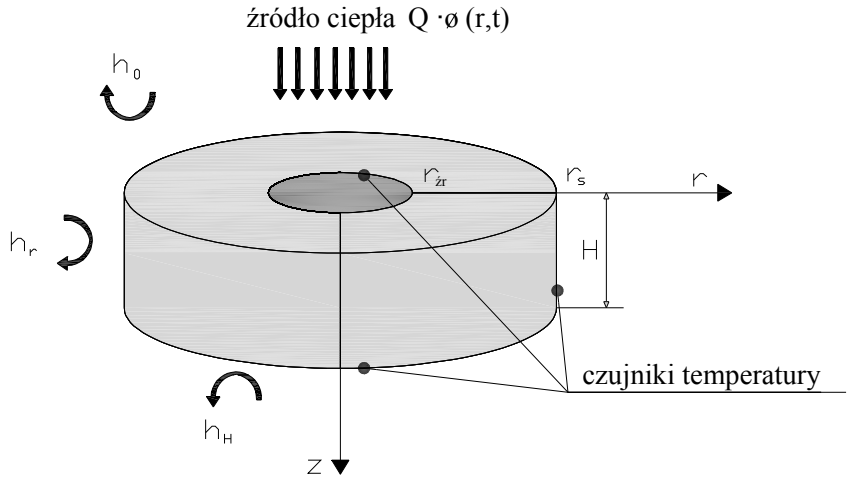
Jednak ww. metody wymagały wstępnej modyfikacji początkowego modelu przepływu ciepła, tak aby utworzona była macierz przejścia potrzebna do rozwiązania zagadnienia odwrotnego. W przypadku identyfikacji parametrów termofizycznych za pomocą zagadnień nieliniowych, rozwiązania problemu dokonywano przez linearyzację i modyfikację równań modelu matematycznego. Postać zmodyfikowanych równań zależała od poszukiwanych parametrów cieplnych.

Wady stosowania takich metody to po pierwsze - trudności modyfikowania modelu matematycznego w celu włączenia poszukiwanych parametrów w rozszerzony wektor stanu, który składał się z właściwego wektora stanu (zmiennych stanu) i wektora nieznanych parametrów. Po drugie - macierze przejścia takiego układu równań powinny być znane podczas trwania obliczeń. Natomiast wyznaczane mogą być tylko estymaty wielkości poszukiwanych w procesie obliczeniowym. Po trzecie – algorytm rozwiązania takiego zagadnienia może posiadać wektory i macierze o dużych rozmiarach, co spowoduje zajmowanie dużej ilości pamięci komputera. Natomiast z uwagi na fakt, że w procesie identyfikacji zagadnienie rozwiązywane bywa na ogół bardzo wiele razy, to wymagane są szybkie komputery. Dlatego w celu minimalizacji tych trudności, w obecnej pracy do rozwiązania zagadnienia odwrotnego i identyfikacji parametrów termofizycznych zastosowano iteracyjną metodę dynamicznej estymacji sekwencyjnej. W zaproponowanej metodzie wektor stanu w krokach czasowych zawiera tylko wyznaczane parametry.

Wykorzystując symulowane dane pomiarowe, zaproponowaną metodę przetestowano na przykładzie równoczesnego wyznaczaniu kilku składowych parametrów termofizycznych ortotropowych materiałów stałych. Przedstawiono wybrane wyniki analizy.

2. GEOMETRIA I WARUNKI BRZEGOWE DLA BADANEJ PRÓBKI ORAZ SFORMUŁOWANIE MODELU MATEMATYCZNEGO

Na rys.1 przedstawiono kształt analizowanej próbki pomiarowej oraz sposób jej grzania i chłodzenia na stanowisku pomiarowym.



Rys. 1 Schemat analizowanej próbki pomiarowej wraz z warunkami brzegowymi

Dwuwymiarowe zagadnienie przepływu ciepła dla podanej geometrii cylindrycznej opisano znanym równaniem różniczkowym [6]:

$$c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial z}(\lambda_z\frac{\partial t}{\partial z})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_r\frac{\partial t}{\partial r}\right),\ (r,z,\tau)\in(0,r_s)\times(0,H)\times(0,\tau_k) \tag{1}$$

z warunkami granicznymi:

- dla powierzchni grzanej:

$$\lambda_z\frac{\partial t}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\dot{q},\ 0\le r\le r_{źr} \tag{2}$$

- dla przeciwległej powierzchni czołowej:

$$\lambda_z\frac{\partial t}{\partial z}\bigg|_{z=\delta}=h_H(t-t_{ot}),\quad 0\le r\le r_s \tag{3}$$

- dla powierzchni cylindrycznej:

$$\lambda_r\frac{\partial t}{\partial r}\bigg|_{r=\pm r_s}=h_r(t-t_{ot}),\ 0\le z\le H \tag{4}$$

- warunek symetrii:

$$\lim_{r\to 0}\lambda_r\frac{\partial t}{\partial r}=0,\ 0\le z\le H \tag{5}$$

- warunek początkowy:

$$t(z,r,\tau=0)=t_{ot},\quad (r,z)\in(0,R)\times(0,\delta) \tag{6}$$

gdzie:

t - temperatura w próbce,
t_{ot} - temperatura otoczenia,
r, z - współrzędne przestrzenne (promieniowa i osiowa),
t - czas,
λ_r, λ_z - kierunkowe współczynniki przewodzenia ciepła materiału,
r - gęstość materiału,
c - ciepło właściwe materiału,
h - współczynnik wnikania ciepła,
r_s, H - promieniowy i osiowy rozmiar próbki.

3. ALGORYTM ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA ODWROTNEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA

Istota iteracyjnej metody dynamicznej estymacji sekwencyjnej polega na sformułowaniu funkcji celu F w następującej postaci:

$$F(\mathbf{p}_k,\tilde{\mathbf{Y}}_k,j)=\left(h\left(\hat{\mathbf{p}}_k^{j-1}\right)-\tilde{\mathbf{Y}}\right)^T\mathbf{R}_k^{-1}\left(h\left(\hat{\mathbf{p}}_{k+1}^{j-1}\right)-\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1}\right)+\frac{1}{j}\left(\left(\mathbf{p}_{k+1}-\mathbf{p}_{k+1}^{j-1}\right)^T\left[\mathbf{G}_{k/k}^{j}\right]^{-1}\left(\mathbf{p}_{k+1}-\mathbf{p}_{k+1}^{j-1}\right)\right) \tag{7}$$

gdzie: **Y** – wektor mierzonych temperatur,
p – wektor identyfikowanych wielkości,
G – macierz kowariancji błędów wielkości estymowanych,
R – macierz kowariancji błędów wielkości mierzonych.

Minimalizując funkcję celu oraz uwzględniając równanie modelu pomiarowego opisanego zależnością:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_k = h(\mathbf{p}_k) + \mathbf{v}_k \tag{8}$$

Algorytm rozwiązania zagadnienia identyfikacji parametrycznej za pomocą iteracyjny metody dynamicznej estymacji sekwencyjnej (DES) można zapisać w następującej postaci:

$$\hat{\mathbf{p}}_{k+1/k+1}^{(j)} = \hat{\mathbf{p}}_{k+1/k+1}^{(j-1)} + \mathbf{M}_{k+1}^{(j)}\left[\widetilde{\mathbf{Y}}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1}^{(j)}\hat{\mathbf{p}}_{k+1/k+1}^{(j-1)}\right] \tag{9}$$

M jest macierzą wzmocnienia określoną zależnością:

$$\mathbf{M}_{k+1}^{(j)} = \mathbf{G}_{k/k}\left[\hat{\mathbf{H}}_{k+1}^{(j)}\right]^T\left\{\hat{\mathbf{H}}_{k+1}^{(j)}\mathbf{G}_{k/k}\left[\hat{\mathbf{H}}_{k+1}^{(j)}\right]^T + \mathbf{R}_{k+1}\right\}^{-1} \tag{10}$$

a macierz kowariancji błędów estymowanych parametrów **G** określone jest zależnością:

$$\mathbf{G}_{k+1/k+1} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{M}_{k+1}^{(ost_j)}\hat{\mathbf{H}}_{k+1}^{(ost_j)}\right]\cdot\mathbf{G}_{k/k}\left[\mathbf{I} - \mathbf{M}_{k+1}^{(ost_j)}\hat{\mathbf{H}}_{k}^{(ost_j)}\right]^T + \mathbf{M}_{k+1}^{(ost_j)}\mathbf{R}_{k+1}\left[\mathbf{M}_{k+1}^{(ost_j)}\right]^T \tag{11}$$

Elementy macierzy wrażliwości **H** mają postać:

$$\hat{\mathbf{H}}_{k+1}^{(j)} = \left\{\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{p}}\right\}_{k+1}^{(j)} \tag{12}$$

Jako zakończenie procesu iteracyjnego przyjęto następujące kryteria:

$$\left\|\hat{\mathbf{B}}_k^{(j)}\hat{\mathbf{p}}_k^{(j)} - \widetilde{\mathbf{Y}}_k\right\| \le \gamma\sum_{i=1}^{k}\beta_i;\ \text{lub}\quad \left\|\hat{\mathbf{p}}_k^{(j)} - \hat{\mathbf{p}}_k^{(j-1)}\right\| < \varepsilon \tag{13}$$

gdzie: β_i jest sumą błędów pomiarów temperatury w *k*-tym kroku czasowym. Natomiast wektory **p** i **Y** określone są zależnościami:

$$\hat{\mathbf{p}}_k^{(j)} = \left\{\hat{\mathbf{p}}_{1/1}^{(ost_1)}, \hat{\mathbf{p}}_{2/2}^{(ost_2)}, \ldots, \hat{\mathbf{p}}_{k/k}^{(j)}\right\} \tag{14}$$

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_k = \left\{\widetilde{\mathbf{Y}}_1, \widetilde{\mathbf{Y}}_2, \ldots, \widetilde{\mathbf{Y}}_m\right\} \tag{15}$$

a macierz **B** zapisać można równaniem:

$$\mathbf{B}_k^{(j)} = \mathrm{diag}\left\{\hat{\mathbf{H}}_{1/1}^{(ost_1)}, \hat{\mathbf{H}}_{2/2}^{(ost_2)}, \ldots, \hat{\mathbf{H}}_{k/k}^{(j)}\right\} \tag{16}$$

4. PRZYKŁADOWE WYNIKI BADAŃ

W celu rozwiązania zagadnienia bezpośredniego oraz analizy numerycznej rozpatrywano materiał próbki o następujących parametrach:

- gęstość ρ=1180 kg/m^3,
- średnica próbki i źródła d_p=120 mm i $d_{źr}$ = 24 mm,
- wysokość próbki 25 mm,
- gęstość strumienia ciepła $\dot{q}$ = 840 W/m^2

oraz następujące postacie zależności dla parametrów cieplnych:

$$\lambda_r(t) = \lambda_{0,r} + \lambda_{1,r} t = 0{,}2 + 0{,}05t$$

$$\lambda_z(t) = \lambda_{0,z} + \lambda_{1,z} t = 0{,}16 + 0{,}02t \tag{17}$$

$$c = c_0 + c_1 t = 1500 + 5t$$

Do estymacji parametrów jako temperatury mierzone wykorzystano rozkład temperatury otrzymany z rozwiązania zagadnienia bezpośredniego i zaburzany losowo wg następującej zależności:

$$t_i^{zab} = t_i^{nzab} + \sigma\xi \tag{18}$$

gdzie:

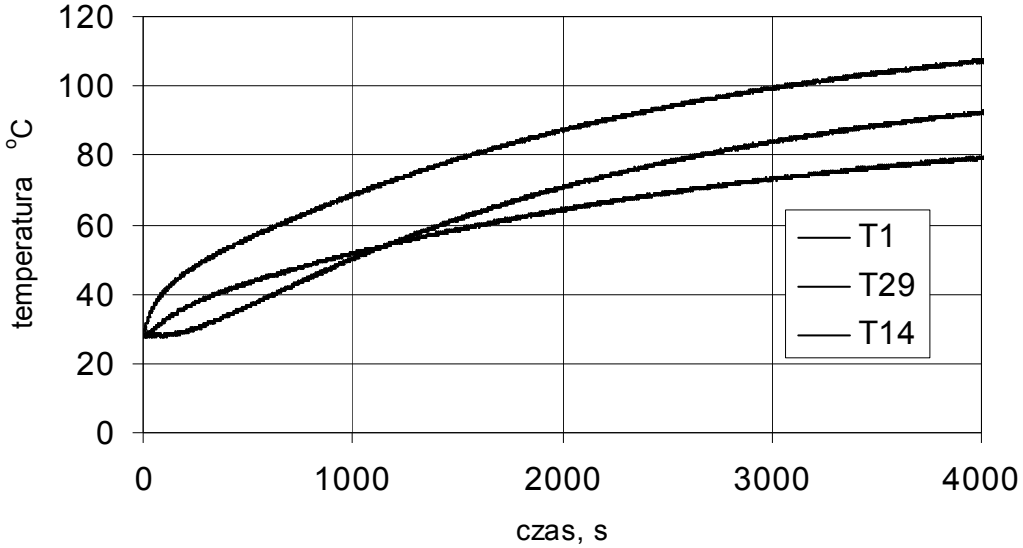
t_i^{zab} - temperatura otrzymana w wyniku zaburzenia,

t_i^{nzab} - temperatura otrzymana z rozwiązania zagadnienia bezpośredniego,

σ - założony błąd (odchylenie standardowe) pomiaru,

ξ - liczba z przedziału [-2.576; 2.576] dla rozkładu normalnego i poziomu ufności 99 %.

Na rys. 2 przedstawiono otrzymane z rozwiązania zagadnienia bezpośredniego i zaburzone błędem 0.05 K przebiegi zmian temperatury w próbce w funkcji czasu.



Rys. 2. Zależność mierzonej temperatury w węzłach próbki wg rys. 1 (1- powierzchnia grzana, 14 – powierzchnia cylindryczna, 29 –powierzchnia przeciwległa grzanej) w funkcji czasu

Tabela 1. Przykładowe wyniki identyfikacji dla s=0,05K

	Wartości początkowe	identyfikacja bez iteracji		identyfikacja z iteracjami	
		ocena	czas, s	ocena	czas, s
λr_0	0.09	0.212	800	0.199	90
λr_1	0.03	0.048	925	0.0497	105
λ_{z0}	0.07	0.165	900	0.168	107
λ_{z1}	0.01	0.0108	780	0.0206	98
c_0	2500	1510,3	450	1506	75
c_1	10	5.21	480	4.99	46

5. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

Na podstawie przeprowadzonych analiz można stwierdzić, że iteracyjnie zastosowanie MDES do rozwiązywania odwrotnych współczynnikowych zagadnień przewodzenia ciepła:

- pozwala uniknąć modyfikacji pierwotnego modelu matematycznego problemu,
- pozwala skrócić czas obliczeń ze względu na działanie na mniejszych macierzach,
- umożliwia stosunkowo szybką estymację danego parametru, co istotnie zmniejsza liczbę wymaganych pomiarów, a przez to skraca proces badań eksperymentalnych.
- pozwala, podobnie jak metoda filtracji dynamicznej, kontrolować dokładności obliczeń poprzez odpowiednie elementy macierzy kowariancji błędów estymacji.

LITERATURA

1. Kucypera S.: Wyznaczanie charakterystyk temperaturowych parametrów termofizycznych materiałów ortotropowych za pomocą rozwiązania dwuwymiarowego współczynnikowego zagadnienia przewodzenia ciepła. W: Materiały XIX Zjazdu Termodynamików. Sopot 2005. CD-ROM.
2. Kucypera S.: Wyznaczanie parametrów cieplnych materiałów ortotropowych z wykorzystaniem odwrotnego wewnętrznego zagadnienia przewodzenia ciepła. „Chemical and Process Engineering" 2004, t.25, z 4, s.2191-2198.
3. Zmywaczyk J., Koniorczyk P., Panas A.: Wpływ warunków eksperymentu na dokładność i precyzję wyznaczania estymat parametrów termofizycznych ciał stałych. W: Materiały XIX Zjazdu Termodynamików. Sopot 2005. CD-ROM..
4. Kucypera S.: Application of evolutionary algorithms to determine the temperature characteristics of the thermal properties of solids. W: Materiały Konferencji Naukowo-Technicznej ENERGETYKA. Wrocław 2002, s. 383-390.
5. Koniorczyk P., Zmywaczyk J.: Jednoczesna estymacja przewodności cieplnej i objętościowej pojemności cieplnej - sformułowanie 2D. W: Materiały XII sympozjum wymiany ciepła i masy. Kraków 2004, s.949-959.
6. Modelowanie numeryczne pól temperatury. Pod red. J. Szarguta. Warszawa: WNT, 1992.

IDENTIFICATION OF TEMPERATURE – DEPENDENT THERMAL PARAMETERS OF THE ORTOTROPIC SOLIDS USING SOLUTION OF THE INVERSE HEAT CONDUCTION COEFFICIENT PROBLEM

Summary. In the identification of the thermophysical processes often it is necessary to determine temperature characteristics for the thermal conductivity and specific heat of the ortotropic materials. Therefore the aim of this paper is identification temperature characteristics of the thermophysical parameters of the ortotropic materials by means of solving the inverse heat conduction problem and measurements data.. To solve the inverse problem the iterative sequential dynamic estimation method has been used. Selected results of the analysis have been presented.