**MODELOWANIE INŻYNIERSKIE** ISSN 1896-771X
**34**, s. 119-126, Gliwice 2007

# FALE AKUSTYCZNE W WARSTWOWYM OŚRODKU NIEJEDNORODNYM NOWA METODA PERTURBACJI II RZĘDU

JERZY SKRZYPCZYK, AGNIESZKA WINKLER-SKALNA

*Zakład Mechaniki Teoretycznej, Politechnika Śląska, Gliwice*
*email: jerzy.skrzypczyk@polsl.pl,*

Streszczenie. Analizowany jest warstwowy ośrodek o skończonej wysokości (grubości), w którym parametry warstw zależą od położenia. Rozpatrywane są warunki brzegowe typu Dirichleta (brzeg sztywny) lub typu mieszanego (brzeg odbijający). Zastosowano metodę perturbacji II rzędu, która wykorzystuje pojęcie liczb perturbacyjnych II rzędu. Otrzymano perturbacyjne wielkości wartości własnych i wektorów własnych równania opisującego położenie w obu rozpatrywanych przypadkach, tj. brzegu sztywnego i odbijającego. Poprawki perturbacyjne dla wartości własnych i wektorów własnych zostały wyliczone numerycznie z równań perturbacyjnych dla rozpatrywanych przypadków.

## 1. WSTĘP

Badania nad propagacją fal akustycznych w ośrodku niejednorodnym zyskały w ostatnim okresie na znaczeniu. Jest to spowodowane koniecznością dokładniejszego zrozumienia detekcji sygnałów w akustyce i sejsmologii. Reprezentacja spektralna równania falowego została osiągnięta przy założeniu symetrii cylindrycznej i przy zastosowaniu metody rozdzielenia zmiennych, co spowodowało rozdzielenie równania falowego na dwa oddzielne równania.

Zastosowanie jednorodnego modelu propagacji fali prowadzi w wyniku do prostego zadania dla wartości własnych i rozwiązanie otrzymuje się jako nieskończony szereg wartości własnych i rodzinę funkcji własnych. Z drugiej strony wiadomo, że prędkość dźwięku może się zmieniać w zależności od innych warunków, takich jak np.: temperatura, wilgotność, zasolenie, położenie itp. Temat został zainspirowany artykułem [18], w którym zastosowano klasyczną teorię perturbacji, por. [1-2], [4], [6-7], [9], a który jest w znacznym stopniu błędny.

W niniejszej pracy wykorzystano odmienną technikę wykorzystującą specjalne liczby, zwane liczbami perturbacyjnymi II rzędu. [10-15]

Równanie Helmholtza we współrzędnych cylindrycznych jest spełnione przez ciśnienie akustyczne $p^{(j)}$ dla każdej j-ej warstwy, przy założeniu symetrii radialnej, [5]. W naszych badaniach założono, dla uproszczenia, że dolna część obszaru cylindrycznego jest sztywna (warunki Dirichleta - I przypadek). W praktycznych zastosowaniach jednak często zdarza się, że brzeg nie jest sztywny, ale posiada własności absorbujące lub impedancyjne (warunki brzegowe mieszane - II przypadek). Z fizykalnego punktu widzenia oznacza to, że część pola akustycznego jest odbijana, natomiast część pochłaniana, por. [3].

Naturalnie rozpatrywany model matematyczny może być łatwo uogólniony na większą liczbę warstw. Zastosowana metodologia może być stosowana do dowolnych problemów brzegowych opisanych różnymi warunkami brzegowymi. Rozpatrywana była zależność

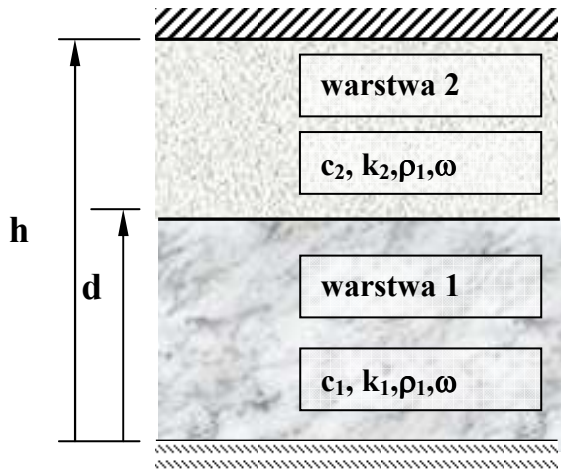
gęstości ośrodka od wysokości położenie w warstwie oraz jej wpływ na wartości własne i funkcje własne zagadnienia, które wynikają z równania Helmholtza dla ciśnienia akustycznego w ośrodku warstwowym o skończonej grubości. Dla uzupełnienia rozważań, oprócz warunków brzegowych typu Dirichleta, które odpowiadają brzegowi sztywnemu, rozpatrywano warunki brzegowe typu bardziej ogólnego - mieszane, które odpowiadają brzegowi o charakterze odbijającym [3], [5]. Pokazano, że wartości własne i funkcje własne zagadnienia można otrzymać, dla obu przypadków, z hierarchicznego układu równań różniczkowych. Wyznaczono części główne wartości własnych i funkcji własnych zagadnienia oraz ich części perturbacyjne, zarówno I jak i II rzędu.

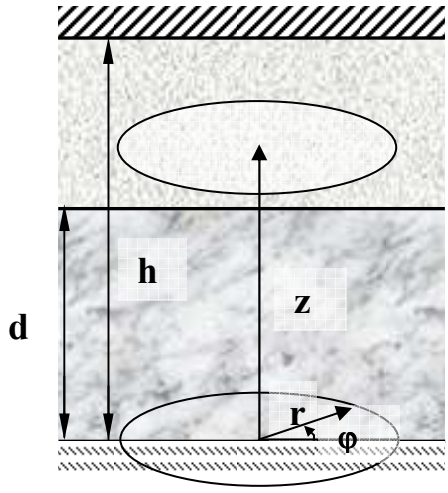
Zastosowana została metoda perturbacyjna bazująca na nowym systemie algebraicznym, który wykorzystuje specjalnie zdefiniowane liczby perturbacyjne II-rzędu (por. Skrzypczyk, „Metody perturbacyjne II rzędu w mechanice", niniejszy numer „ MI").

## 2. MODEL MATEMATYCZNY

Rozpatrujemy model ośrodka składający się z dwóch warstw podobnie jak w pracach [3], [18]. Geometria rozpatrywanego modelu ośrodka jest przedstawiona na rys. 1.

Analizowany jest ośrodek o wysokości *h* składający się z dwóch warstw o stałej grubości, dolna warstwa ma wysokość *d,* skąd wynika, że górna ma wysokość *h-d.* Warunki brzegowe są sformułowane w położeniach $z=0$, $z=d$ oraz $z=h$. Ciśnienie akustyczne $p_j$, gęstość $\rho_j$, prędkość $c_j$,- oraz liczba falowa $k_j$ oznaczają odpowiednie wielkości dla *j*-ej warstwy, $j=1,2$.




Rys.1. Geometria problemu Rys.2. Cylindryczny układ współrzędnych

Rozpatrzmy równanie Helmholtza we współrzędnych cylindrycznych (rys.2) opisujące ciśnienie akustyczne $p^{(j)}$ w *j*-tej warstwie:

$$\frac{\partial^2 p^{(i)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p^{(i)}}{\partial r}+\frac{\partial^2 p^{(i)}}{\partial z^2}+k_i^2 p^{(i)}=0 \qquad k_i=\frac{\omega}{c_i},\ i=1,2 \tag{1}$$

Zastosujmy metodę rozdzielenia zmiennych, t.j. załóżmy, że $p^{(i)}(r,z)=R(r)\varphi^{(i)}(z)$. Otrzymamy

$$\frac{d^2\varphi^{(i)}}{dz^2}+\left(k_i^2-\lambda\right)\varphi^{(i)}(z)=0, \qquad i=1,2 \tag{2}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\lambda R=0, \qquad i=1,2 \tag{3}$$

Jeżeli założymy symetrię radialną rozwiązania, możemy analizować dalej tylko pierwszą grupę równań (2), por. [5,9].

W naszych dalszych rozważaniach konsekwentnie zakładamy, że podstawa obszaru cylindrycznego jest swobodna oraz ze górna część cylindra jest sztywna (warunki Dirichleta - I przypadek) lub odbijająca (warunki mieszane - II przypadek), tak że równanie zależne od wysokości ma prostą postać.

## 2.1 Sztywna górna część obszaru cylindrycznego

Zakładamy, że podstawa cylindra jest swobodna, skąd wynika, że dla powierzchni *z=0* mamy

$$\varphi^{(1)}(0) = 0. \tag{4}$$

Z ciągłości ciśnienia akustycznego na powierzchni interfejsu *z=d* wynika

$$\varphi^{(1)}(d) = \varphi^{(2)}(d) \tag{5}$$

natomiast z ciągłości gradientu ciśnienia akustycznego na powierzchni interfejsu wynika

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{d\varphi^{(1)}(d)}{dz} = \frac{1}{\rho_2}\frac{d\varphi^{(2)}(d)}{dz}, \tag{6}$$

natomiast warunki dla powierzchni sztywnej *z=h* dają warunek

$$\frac{d\varphi^{(2)}(h)}{dz} = 0 \tag{7}$$

Dla wygody przyjmijmy dalej następujące oznaczenia

$$\gamma_i^2 = k_i^2 - \lambda, \quad i=1,2. \tag{8}$$

wówczas równanie (2) przyjmie postać

$$\frac{d^2\varphi^{(i)}}{dz^2} + \gamma_i^2\varphi^{(i)}(z) = 0, \qquad i = 1,2 \tag{9}$$

Rozwiązanie ogólne równania (9) ma postać

$$\varphi^{(1)}(z) = A\sin(\gamma_1 z) + D\cos(\gamma_1 z), \qquad 0 \le z \le d \tag{10}$$

$$\varphi^{(2)}(z) = B\sin(\gamma_2 z) + C\cos(\gamma_2 z), \qquad d \le z \le h \tag{11}$$

Wykorzystując warunki brzegowe (4)-(7), otrzymamy

$$D = 0 \tag{12}$$

$$A\sin(\gamma_1 d) = B\sin(\gamma_2 d) + C\cos(\gamma_2 d) \tag{13}$$

$$\rho_2 A\gamma_1 \cos(\gamma_1 d) = \rho_1 (B\gamma_2\cos(\gamma_2 d) - C\gamma_2\sin(\gamma_2 d)) \tag{14}$$

$$B\gamma_2\cos(\gamma_2 h) - C\gamma_2\sin(\gamma_2 h) = 0 \tag{15}$$

Równania (12)-(15) są jednorodnym układem liniowych równań algebraicznych ze względu na niewiadome A, B, C, D. Taki układ równań posiada rozwiązanie nietrywialne wtedy i tylko wtedy, gdy [5]

$$\det\begin{pmatrix} \sin(\gamma_1 d) & -\sin(\gamma_2 d) & -\cos(\gamma_2 d) \\ \rho_2\gamma_1\cos(\gamma_1 d) & -\rho_1\gamma_2\cos(\gamma_2 d) & \rho_1\gamma_2\sin(\gamma_2 d) \\ 0 & \cos(\gamma_2 h) & -\sin(\gamma_2 h) \end{pmatrix} = 0 \tag{16}$$

a po rozwinięciu wyznacznika (16)

$$\begin{aligned} &\rho_1\gamma_2\sin(\gamma_1 d)\big(\cos(\gamma_2 d)\sin(\gamma_2 h) - \sin(\gamma_2 d)\cos(\gamma_2 h)\big) - \\ &- \rho_2\gamma_1\cos(\gamma_1 d)\big(\cos(\gamma_2 h)\cos(\gamma_2 d) + \sin(\gamma_2 d)\sin(\gamma_2 h)\big) = \\ &= \rho_1\gamma_2\sin(\gamma_1 d)\sin\big(\gamma_2(h-d)\big) - \rho_2\gamma_1\cos(\gamma_1 d)\cos\big(\gamma_2(h-d)\big) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Pamiętając, że $\gamma_i^2=k_i^2-\lambda$, i=1,2 z równania charakterystycznego (17) otrzymamy całą rodzinę wartości własnych $\lambda_m$, m=1,2,3,….. Odpowiadające im funkcje własne przyjmują postać

$$\varphi_m^{(1)}(z) = A\sin(\gamma_1 z), \qquad 0 \le z \le d \tag{18}$$

$$\varphi_m^{(2)}(z) = A\sin(\gamma_1 d)\frac{\cos\big(\gamma_2(h-z)\big)}{\cos\big(\gamma_2(h-d)\big)}, \qquad d \le z \le h \tag{19}$$

Dla uproszczenia wprowadzimy dalej normalizację wartości własnych. Warunek normalizacji przyjmuje standardową postać

$$\int_0^h \varphi_i^2(z)dz = \int_0^d \varphi_i^{(1)^2}(z)dz + \int_d^h \varphi_i^{(2)^2}(z)dz = 1 \tag{20}$$

Odpowiednie całki dają się obliczyć w sposób jawny

$$\int_0^d \varphi_i^{(1)^2}(z)dz = \frac{d}{2} - \frac{1}{2\gamma_1}\cos(\gamma_1 d)\sin(\gamma_1 d) = \frac{1}{G_i^{(1)^2}} \tag{21}$$

$$\int_d^h \varphi_i^{(2)^2}(z)dz = \frac{\sin^2(\gamma_1 d)}{\cos^2(\gamma_2(h-d))}\left(\frac{h-d}{2} + \frac{1}{2\gamma_2}\sin(\gamma_2(h-d))\cos(\gamma_2(h-d))\right) = \frac{1}{G_i^{(2)^2}} \tag{22}$$

Załóżmy dalej, że $A=G_i$, gdzie

$$\frac{1}{G_i^{\,2}} = \frac{1}{G_i^{(1)^2}} + \frac{1}{G_i^{(2)^2}} \tag{23}$$

## 2.2 Odbijająca górna powierzchnia obszaru cylindrycznego

Rozważmy dalej pewną modyfikację ośrodka składającego się z dwóch jednorodnych warstw ograniczonych przez powierzchnię swobodną na podstawie cylindra i powierzchnię odbijającą na powierzchni górnej. Równania różniczkowe opisujące ciśnienie akustyczne są takie same jak poprzednio (9). Podobnie bez zmian pozostają warunki brzegowe na powierzchniach *z=0* oraz *z=d,* które są takie same jak w poprzednim przypadku, patrz równania (4)-(6). Natomiast warunek brzegowy na powierzchni odbijającej *z=h* przyjmuje postać

$$\frac{d\varphi^{(2)}(h)}{dz} + \alpha\varphi^{(2)}(h) = 0 \tag{24}$$

Zauważmy dalej, że jeżeli *α=0*, wówczas warunek odbicia staje się warunkiem "sztywnym", por. (7). Wykorzystując warunki brzegowe (4)-(6) oraz (24), otrzymamy

$$D = 0 \tag{25}$$

$$A\sin(\gamma_1 d) = B\sin(\gamma_2 d) + C\cos(\gamma_2 d) \tag{26}$$

$$\rho_2 A\gamma_1 \cos(\gamma_1 d) = \rho_1 (B\gamma_2\cos(\gamma_2 d) - C\gamma_2\sin(\gamma_2 d)) \tag{27}$$

$$B\gamma_2\cos(\gamma_2 h) - C\gamma_2\sin(\gamma_2 h) + \alpha B\sin(\gamma_2 h) + \alpha C\cos(\gamma_2 h) = 0 \tag{28}$$

Równania (25)-(28) są jednorodnym układem równań algebraicznych z niewiadomymi A, B, C, D, [5]. Układ równań ma rozwiązanie nietrywialne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det\begin{pmatrix} \sin(\gamma_1 d) & -\sin(\gamma_2 d) & -\cos(\gamma_2 d) \\ \rho_2\gamma_1\cos(\gamma_1 d) & -\rho_1\gamma_2\cos(\gamma_2 d) & \rho_1\gamma_2\sin(\gamma_2 d) \\ 0 & \gamma_2\cos(\gamma_2 h) + \alpha\sin(\gamma_2 h) & -\gamma_2\sin(\gamma_2 h) + \alpha\cos(\gamma_2 h) \end{pmatrix} = 0 \tag{29}$$

a po rozwinięciu wyznacznika (29)

$$\begin{aligned} &\rho_1\gamma_2\gamma_2\sin(\gamma_1 d)\sin(\gamma_2(h-d)) - \rho_2\gamma_1\gamma_2\cos(\gamma_1 d)\cos(\gamma_2(h-d)) + \\ &-\alpha\rho_1\gamma_2\sin(\gamma_1 d)\cos(\gamma_2(h+d)) - \alpha\rho_2\gamma_1\cos(\gamma_1 d)\sin(\gamma_2(h-d)) = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Pamiętając, że $\gamma_i^2 = k_i^2 - \lambda$, i=1,2 z równania charakterystycznego (30) otrzymujemy całą rodzinę wartości własnych $\lambda_m$, m=1,2,3,….. Odpowiadające im funkcje własne przyjmują postać

$$\varphi_m^{(1)}(z) = A\sin(\gamma_1 z), \qquad 0 \le z \le d \tag{31}$$

$$\varphi_m^{(2)}(z) = A\sin(\gamma_1 d)\frac{\gamma_2\cos(\gamma_2(h-z)) + \alpha\sin(\gamma_2(h-z))}{\gamma_2\cos(\gamma_2(h-d)) + \alpha\sin(\gamma_2(h-d))}, \qquad d \le z \le h \tag{32}$$

Dla uproszczenia dokonamy dalej normalizacji wartości własnych, podobnie jak w poprzednim przypadku. Warunek normalizacji przyjmuje postać (20). Odpowiednie całki przyjmują postać

$$\int_0^d \varphi_i^{(1)^2}(z)dz = \frac{1}{G_i^{(1)^2}}, \quad \int_d^h \varphi_i^{(2)^2}(z)dz = \frac{1}{G_i^{(2)^2}} \tag{33}$$

Załóżmy dalej, że $A=G_i$, por. (23).

## 3. NIEJEDNORODNE PERTURBOWANE WARUNKI BRZEGOWE

Weźmy pod uwagę niejednorodny ośrodek warstwowy, w którym zarówno dolna, jak i górna warstwa ośrodka mogą mieć zmienne parametry fizyczne, zależne od położenia. Wynika stąd zmienność współczynnika odbicia, która skutkuje zależnością prędkości falowej od wysokości w obszarze cylindra. Zastosujemy technikę perturbacyjną zaproponowaną przez Skrzypczyka, por. [10]-[15], w celu określenia wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych, dla przedstawionych wcześniej zagadnień brzegowych.

Ponieważ rozpatrujemy ośrodek składający się z dwóch warstw, dla uproszczenia notacji przyjmiemy

$$\Phi = \begin{cases} \varphi^{(1)} & 0 \le z \le d \\ \varphi^{(2)} & d < z \le h \end{cases} \tag{34}$$

Załóżmy, że warstwy ośrodka są niejednorodne, stąd wynika, że równanie (2) staje się równaniem perturbacyjnym II rzędu postaci

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + k^2\left(1 + \varepsilon s_0(z) + \varepsilon^2 s_1(z)\right) = \lambda\Phi, \tag{35}$$

gdzie $s(z)=\varepsilon s_0(z)+\varepsilon^2 s_1(z)$ jest miarą niejednorodności zależną od położenia we współrzędnych cylindrycznych. Jeżeli *s(z)=0,* problem redukuje się do zagadnienia ośrodka jednorodnego analizowanego wcześniej. Rozumując jak w [3,8,18], załóżmy, że zagadnienie własne (35) będzie rozpatrywane w sensie uogólnionym w $R_{\varepsilon 2}$. Zauważmy dalej, że $\Phi=\Phi_0+\varepsilon\Phi_1+\varepsilon^2\Phi_2$, $\lambda=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\varepsilon^2\lambda_2$, gdzie $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in R$. Wówczas równanie (35) przyjmie postać

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} + \varepsilon\frac{d^2\Phi_1}{dz^2} + \varepsilon^2\frac{d^2\Phi_2}{dz^2} + k^2\Phi_0 + \varepsilon k^2\left(\Phi_1 + \Phi_0 s_1(z)\right) + \varepsilon^2 k^2\left(\Phi_2 + \Phi_1 s_1(z) + \Phi_0 s_2(z)\right) = \\ &= \lambda_0\Phi_0 + \varepsilon\left(\lambda_0\Phi_1 + \lambda_1\Phi_0\right) + \varepsilon^2\left(\lambda_0\Phi_2 + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_0\right) \end{aligned} \tag{36}$$

Jeżeli porównamy współczynniki przy odpowiednich potęgach parametru $\varepsilon$, otrzymamy równania nieperturbacyjne

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} + k^2\Phi_0 = \lambda_0\Phi_0 \tag{37}$$

$$\frac{d^2\Phi_1}{dz^2} + k^2\left(\Phi_1 + \Phi_0 s_1(z)\right) = \left(\lambda_0\Phi_1 + \lambda_1\Phi_0\right) \tag{38}$$

$$\frac{d^2\Phi_2}{dz^2} + k^2\left(\Phi_2 + \Phi_1 s_1(z) + \Phi_0 s_2(z)\right) = \lambda_0\Phi_2 + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_0 \tag{39}$$

Dalej będziemy pisać $\gamma_0=k^2-\lambda_0$ i wówczas równanie (37) przyjmie postać

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} + \gamma^2\Phi_0 = 0 \tag{40}$$

Ponieważ problem własny (40) dotyczy operatora typu Sturma-Liouvile'a, posiada on nieskończoną liczbę wartości własnych $\{\gamma_{01}, \gamma_{02}, \gamma_{03}, \ldots\ldots, \gamma_{0n}, \ldots.\}$, gdzie $\gamma_{0m}=k^2-\lambda_{0m}$. Odpowiadające im funkcje własne oznaczymy $\{\Phi_{01}, \Phi_{02}, \Phi_{03}, \ldots, \Phi_{0n}, \ldots\ldots\}$. Dalej będzie

stosowana następująca notacja $\Phi_p=\Phi_{0p}+\varepsilon\Phi_{1p}+\varepsilon^2\Phi_{2p}$, $\lambda_p=\lambda_{0p}+\varepsilon\lambda_{1p}+\varepsilon^2\lambda_{2p}$, $\Phi_{1p}=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{pk}\Phi_{0k}$, $\Phi_{2p}=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{pk}\Phi_{0k}$, zakładamy dalej, że $\langle\Phi_{0n},\Phi_{0n}\rangle=1$ dla dowolnego n, $\langle\Phi_{0n},\Phi_{0m}\rangle=0$ dla $n\neq m$. Można udowodnić, że

$$\lambda_{1p}=k^2\left\langle s_1(z)\Phi_{0p},\Phi_{0p}\right\rangle \text{ for } p=1,2,3,..... \tag{41}$$

$$\lambda_{2p}=k^2\left\langle s_1(z)\Phi_{1p},\Phi_{0p}\right\rangle+k^2\left\langle s_2(z)\Phi_{0p},\Phi_{0p}\right\rangle \text{ for } p=1,2,3,.... \tag{42}$$

gdzie

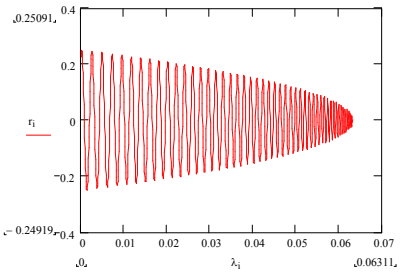
$$\Phi_{1p}=\alpha_{pp}\Phi_{0p}+\sum_{i\neq p}\frac{\chi_{pi}}{\lambda_{0i}-\lambda_{0p}}\Phi_{0i} \tag{43}$$

$$\Phi_{2p}=\beta_{pp}\Phi_{0p}+\sum_{i\neq p}\frac{\eta_{pi}}{\lambda_{0i}-\lambda_{0p}}\Phi_{0i} \tag{44}$$

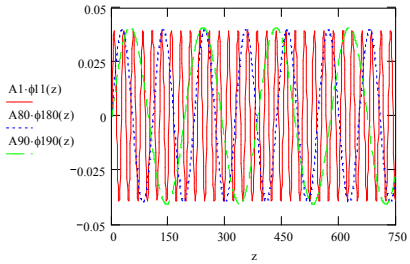
Współczynniki $\chi_{pi}$ oraz $\eta_{pi}$ są wyznaczone z rozkładu Fouriera znanych funkcji.

## 4. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Załóżmy, że h=1300 [m], d=750 [m], $c_1$=1500 [m/s], $c_2$=1495 [m/s], ω=376.991 [rad/s], $\rho_1=1.0*10^3$ [kg/m$^3$], $\rho_2=1.0*10^3$ [kg/m$^3$].




Rys. 3. Lewa strona równania (17).




Rys. 4. 1., 80., 90. - funkcje własne $\varphi^{(1)}(x)$

Dla łatwego porównania wyników założono takie same wartości parametrów jak w pracy [18]. Załóżmy, że w rozpatrywanym przykładzie występuje liniowe zaburzenie współczynnika refrakcji dane wzorami

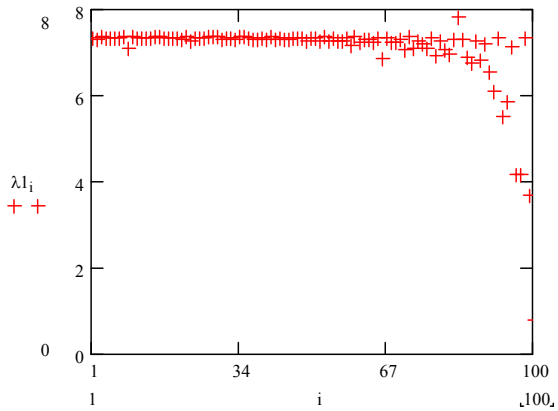
$$s_1(z)=\begin{cases}0 & 0\le z\le d\\ d-z & d<z\le h\end{cases},\quad s_2(z)=0\,.$$

Jeżeli rozwiążemy na drodze numerycznej równanie (40), otrzymamy całą rodzinę wartości własnych $\lambda_m$, m=1,2,3,….. W rozpatrywanym przykładzie istnieje 100 rozwiązań. Odpowiednie funkcje własne otrzymamy z odpowiadających im równań (18)-(19) (rys.4). Wartości wielkości perturbacyjnych pierwszego rzędu $\lambda_1$ oraz drugiego rzędu $\lambda_2$ dla wartości własnych, w przypadku „sztywnych" warunków brzegowych otrzymujemy z równań (41)-(42) po podstawieniu odpowiednich funkcji własnych danych równaniami (18)-(19).

## 5. WNIOSKI

Przeanalizowano efekty zależności wartości własnych i funkcji własnych zagadnienia opisującego fale akustyczne od współczynników równania, które są znanymi funkcjami

położenia (wysokości). Ciśnienie akustyczne w rozpatrywanym ośrodku warstwowym o skończonej wysokości (grubości) opisane jest równaniem Helmholtza o zmiennych, perturbowanych współczynnikach. Przeanalizowano podstawowy przypadek, gdy brzeg obszaru jest sztywny oraz bardziej ogólny, w którym założono, że na brzegu może wystąpić odbicie fali. Pokazano, że wartości własne i funkcje własne w zadaniu z brzegiem sztywnym są szczególnym przypadkiem rozwiązania dla bardziej ogólnych warunków brzegowych.




Rys. 5. Perturbacje I rzędu $\lambda_1$ wartości własnych

## 6. WNIOSKI

Badano efekty zależności wartości własnych i funkcji własnych zagadnienia opisującego fale akustyczne od współczynników równania, które są znanymi funkcjami położenia (wysokości). Ciśnienie akustyczne w rozpatrywanym ośrodku warstwowym o skończonej wysokości (grubości) opisane jest równaniem Helmholtza o zmiennych współczynnikach z perturbacjami. Przeanalizowano podstawowy przypadek, gdy brzeg obszaru jest sztywny oraz bardziej ogólny, w którym założono, że na brzegu może wystąpić odbicie fali.

Zastosowana została nowa specjalna metodologia metod perturbacyjnych dla otrzymania wartości własnych i funkcji własnych niejednorodnego modelu warstwowego. Założono, że gęstość ośrodka zależy od położenia, co powoduje taką samą zależność liczby falowej. W rozpatrywanym przykładzie założono perturbacje liczby falowej, które są liniową funkcją położenia. Na rys. 4. pokazano przykładowe trzy funkcje własne. Na rys. 5. pokazane są perturbacje pierwszego rzędu wartości własnych, spowodowane liniową perturbacją liczby falowej.

Obliczenia z wykorzystaniem nowych liczb perturbacyjnych prowadzą do zastosowań, które są z matematycznego punktu widzenia równoważne klasycznym metodom perturbacyjnym II rzędu. Zalety nowego systemu algebraicznego są następujące:

- można pominąć wszystkie złożone obliczenia analityczne, które są typowe dla przedstawienia wielkości aproksymowanych w postaci szeregów nieskończonych. Dotyczy to zarówno przedstawienia wielkości nieznanych - rozwiązań, jak i współczynników problemu obciążonych perturbacjami;
- otrzymujemy duże uproszczenia wszystkich operacji arytmetycznych, które występują w analitycznym formułowaniu i analizie problemów perturbacyjnych;
- większość znanych algorytmów numerycznych może być w prosty sposób adaptowana do nowego systemu algebraicznego bez specjalnych trudności.

Model matematyczny, który był rozpatrywany, może być w prosty sposób uogólniony na przypadek większej liczby warstw. Nowa metodologia może być również zastosowana do

bardziej skomplikowanych problemów brzegowych oraz zróżnicowanych warunków brzegowych.

BIBLIOGRAFIA

1. Awrejcewicz J., Krysko V.A.: Wprowadzenie do współczesnych metod asymptotycznych. Warszawa : WNT, 2004.
2. Bellman R.:Introduction to matrix analysis. New York,Toronto, London : Mc-GrawHill Book Comp.1976.
3. Buchanan J. et. al.: Marine acoustics – direct and inverse problems. SIAM, 2004.
4. Kato T.:Perturbation theory for linear operators. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1966.
5. Korn G.A., Korn T.M.: Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów. Cz.I. Warszawa : PWN, 1983.
6. Liao S.: Beyond perturbation - introduction to the homotopy analysis method. Boca Raton : Chapman&Hall/CRC Press LLC, 2004.
7. Nayfeh A. H.: Perturbation methods. New York, London, Sydney : J. Wiley & Sons, 1976.
8. Ed. Woźniak C., Świtka R., Kuczma M.: Selected topice in the mechanics of inhomogeneous media. Zielona Góra : Uniw. Zielonogórski, 2006.
9. Shivamoggi B.K.: Perturbation methods for differential equations. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser 2002.
10. Skrzypczyk J.: Perturbation methods - new arithmetic. Zesz. Nauk.Pol. Śl., ser. Budownictwo. Gliwice 2003, s. 391-398.
11. Skrzypczyk J.: Metody perturbacyjne - nowa arytmetyka. Zesz. Nauk. Kat. Mech. Stos. Pol.Śl. 2004, nr 23, s. 363-368.
12. Skrzypczyk J.: Perturbation methods - new algebraic methodology with applications in mechanics. Zesz. Nauk. Kat. Mech. Stos. Pol. Śl. 2005. s. 413 – 418.
13. Skrzypczyk J.: Perturbation methods - new algebraic methodology. W: Proc. of CMM-2005 – Computer Methods in Mechanics. Częstochowa 2005.
14. Skrzypczyk J.: Multi-scale perturbation methods in mechanics. Slovak Journal of Civil Engineering 2006, 3, s. 10-14.
15. Skrzypczyk J.: II-order perturbation methods in mechanics. Materiały XLVI Sympozjonu "Modelowanie w Mechanice", Wisła, luty 2007, Gliwice, 2007.
16. Skrzypczyk J., Winkler-Skalna A.: Sound wave propagation problems new perturbation methodology. "Arch. of Acoustic" 2006, 31(N.4) Supl., s. 115-122.
17. Skrzypczyk J., Winkler-Skalna A.: Sound wave propagation problems new perturbation methodology. Proc. of Int. Conf. New Trends in Statics and Dynamics of Buildings. Bratislava 2006, Faculty of Civil Eng. SUT, s. 97-100.
18. Zaman F.D., Al-Muhiameed Z.I.A.:coustic waves in a layered inhomogeneous ocean. "Applied Acoustics" 2000, 61, s. 427-440.

## ACOUSTIC WAVES IN LAYERED NONHOMOGENEOUS MEDIUM: A NEW II-ORDER PERTURBATION APPROACH

Summary. We consider a layered medium of finite height in which the layers are assumed to have position dependent properties. The boundary conditions are considered to be either rigid (Dirichlet-type) or of a reflecting type (mixed-type). The perturbation method based on II-order perturbation numbers is used to obtain the eigenvalues and the eigenfunctions of the height equation in the case of both the rigid and reflecting boundaries. The corrections to the eigenvalues and eigenfunctions are numerically computed from the perturbation formulae in both cases of interest.