MODELOWANIE INŻYNIERSKIE ISSN 1896-771X
34, s. 73-78, Gliwice 2007

ESTYMACJA PARAMETRÓW TERMOFIZYCZNYCH CIAŁ IZOTROPOWYCH ZA POMOCĄ METODY FILTRACJI DYNAMICZNEJ ORAZ PRZEDZIAŁOWEGO UŚREDNIANIA WYNIKÓW POMIARÓW

STANISŁAW KUCYPERA

Instytut Techniki Cieplnej, Politechnika Śląska
e-mail:kucypera@itc.polsl.pl

Streszczenie. Prawdziwe wartości parametrów cieplnych w procesie estymacji z zastosowaniem metody filtracji dynamicznej otrzymuje się, dążąc do zmniejszenia macierzy kowariancji błędów ocen, czyli im mniejsza jest ta macierz, a szczególnie jej elementy diagonalne, tym oceny są dokładniejsze. Należy podkreślić, że w procesie estymacji norma tej macierzy dąży do normy macierzy kowariancji błędów pomiarowych. Stąd wynika, że błędy ocen będą określone błędami pomiarowymi. Dlatego w pracy w celu zmniejszenia błędów pomiarowych i poprawienia dokładności estymacji parametrów termofizycznych badanego materiału wyniki pomiarów wygładzano przed estymacją. Przedstawiono wybrane wyniki analizy.

1. WSTĘP

Do wartości prawdziwych parametrów cieplnych w procesie estymacji z zastosowaniem metody filtracji dynamicznej dochodzi się w tzw. elipsoidzie zbieżności, której wielkość na każdym kroku czasowym określona jest wielkością diagonalnych elementów macierzy kowariancji błędów ocen. Im mniejsze są elementy diagonalne tej macierzy, tym oceny są dokładniejsze. Należy podkreślić, że w procesie estymacji norma tej macierzy dąży do normy macierzy kowariancji błędów pomiarowych. Stąd wynika, że błędy ocen będą określone błędami pomiarowymi. Dlatego dla zmniejszenia rozmiarów elipsoidy zbieżności, a więc dla zwiększenia dokładności estymowanych wielkości, stosuje się m.in. optymalizację eksperymentu, której celem jest dostarczenie do procesu estymacji najkorzystniejszych danych pomiarowych. Innym sposobem mającym istotny wpływ na szybkość i dokładność estymacji jest wcześniejsze przedziałowe uśrednianie wyników pomiarów przed wykorzystaniem ich w procesie estymacji. Optymalizacja eksperymentu [1] jest szczególnie ważna przy stosowaniu metod iteracyjnych zarówno w poszczególnych krokach czasowych, jak również podczas prowadzenia procesu iteracyjnego na podstawie danych z całego okresu wykonywania pomiarów.

W celu poprawy dokładności otrzymanych wyników estymacji parametrów termofizycznych badanego materiału zastosowano metodę wstępnego uśredniania (wygładzania) wyników pomiarów.

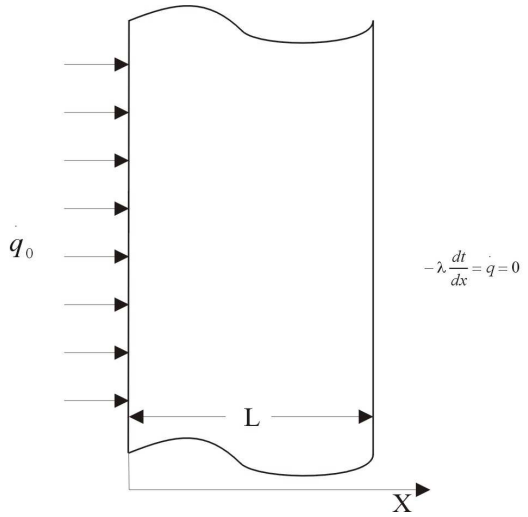
Jak wiadomo, wygładzanie można wykonywać na wiele sposobów, np. przy wykorzystaniu wielomianów Legandre'a [2]. W szeregu przypadków, szczególnie przy silnych zakłóceniach danych wejściowych, można stosować filtr korekcyjny, który wybierany jest w zależności od typu zakłóceń zniekształcających wyniki pomiarów [3]. W niniejszej pracy do wygładzania wyników pomiarów zaproponowano metodę arytmetycznego uśredniania ich w małych podprzedziałach czasowych (nazywanych przedziałami wygładzania) wokół punktu środkowego podprzedziału. Jak wykazały przeprowadzone analizy numeryczne, w wyniku uśredniania poprawiły się znacznie brane do procesu estymacji odpowiedzi temperaturowe układu pomiarowego na wymuszenie cieplne, co istotnie zwiększyło dokładność otrzymanych ocen.

Na podstawie przeprowadzonych analiz wydaje się, ze zaproponowana metoda uśredniania może mieć szczególne zastosowanie przy występowaniu stosunkowo dużego rozproszenia wyników pomiarów. Przedstawiono wybrane wyniki wykonanej analizy.

2. SCHEMAT ANALIZOWANEJ GEOMETRII PRÓBKI I SFORMUŁOWANIE MODELU MATEMATYCZNEGO

W pracy rozpatrywano model matematyczny jednowymiarowego nieustalonego pola temperatury w próbkach nagrzewanych symetrycznie stałym strumieniem ciepła.

Dla jednowymiarowego przepływu ciepła (rys.1) zagadnienie początkowo-brzegowe opisano znanym równaniem różniczkowym:



$$c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right)\quad (x,\tau)\in(0,L)\times(0,\tau_{\mathrm{k}}) \tag{1a}$$

gdzie:

- t - temperatura w próbce,
- x - współrzędna przestrzenna,
- t - czas,
- λ - współczynniki przewodzenia ciepła materiału,
- ρ - gęstość materiału,
- c - ciepło właściwe materiału,
- L - osiowy rozmiar próbki.

Rys. 1 Geometria analizowanej próbki i opis warunków brzegowych.

Z warunkami granicznymi:

- dla powierzchni grzanej:

$$\pm k\left.\frac{\partial \mathrm{t}}{\partial x}\right|_{x=0}=\dot{q} \tag{1b}$$

- dla powierzchni przeciwległej:

$$t\big|_{x=\pm L}=t_w=t_p \tag{1c}$$

- warunek początkowy:

$$t(x,\tau=0)=t_p,\ (x)\in(0,L) \tag{1d}$$

gdzie: $\dot{q}$ oznacza połowę gęstości strumienia ciepła wydzielanego w grzejniku, a L jest grubością pojedynczej próbki. Wykorzystując metodę bilansów elementarnych [4] do budowy modelu procesu nieustalonego przepływu ciepła w badanej próbce, równania (1) dla potrzeb metody filtracji dynamicznej zapisano w postaci tzw. równania stanu:

$$\mathbf{y}_{k+1} = F_{k+1,k}(\mathbf{y}_k, \tau_k) \tag{2}$$

gdzie: $\mathbf{y}_k$, $\mathbf{y}_{k+1}$ - wektory identyfikowanych wielkości (tzw. zmienne stanu) w kroku czasu k oraz k+1 ,

$F_{k+1,k}$ - funkcja stanu, która określa zależność pomiędzy zmiennymi stanu w dwóch sąsiednich krokach czasu,

W rozpatrywanym przypadku wektor stanu **y** zawiera wszystkie identyfikowane wielkości, tzn. N temperatur w węzłach podziału różnicowego, a ponadto M składowych identyfikowanych wielkości, czyli współczynnika przewodzenia ciepła $\boldsymbol{k}$ oraz ciepła właściwe $\boldsymbol{c}$. Wartość M zależy od postaci funkcji określającej współczynnik przewodzenia ciepła $\boldsymbol{k}$ i ciepło właściwe $\boldsymbol{c}$.

3. ALGORYTM ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA ODWROTNEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA ORAZ ISTOTA METODY WYGŁADZANIA WYNIKÓW POMIARÓW

3.1. Algorytm rozwiązania zagadnienia odwrotnego przewodzenia ciepła

Identyfikacja poszukiwanych wielkości za pomocą metody filtracji dynamicznej oprócz równania stanu (2) wymaga dodatkowo zapisania wyników pomiarów temperatury w wybranych MP punktach próbki w chwili czasu k+1. Wyniki te zapisywane są w postaci tzw. wektora obserwacji $\mathbf{z}_{k+1}$:

$$z_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{y}_{k+1} + \mathbf{V}_{k+1} \tag{3}$$

gdzie:

H - macierz określająca zależność pomiędzy wielkościami mierzonymi a zmiennymi stanu.

$\mathbf{V}_{k+1}$ - wektor reprezentujący błędy pomiarów.

Wykorzystując równania (2) i (3), algorytm estymacji zmiennych stanu $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}$ dla czasu k+1 na podstawie rozwiązania odwrotnego zagadnienia przepływu ciepła za pomocą filtru Kalmana można zapisać w następującej postaci [5,6]:

- **predykcja**

Wektor stanu dla predykcji:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1/k} = F_{k+1,k}(\tilde{\mathbf{y}}_k) \tag{4}$$

Zmienne stanu traktowane są jako zmienne stochastyczne o macierzy kowariancji **G**, którą dla błędów predykcji można zapisać postaci:

$$\mathbf{G}_{k+1/k} = \mathbf{\Phi}_{k+1/k}\, \mathbf{G}_{k,k}\, \mathbf{\Phi}^{T}_{k+1/k} \tag{5}$$

gdzie elementy macierzy **Φ** wynikają z linearyzacji równania stanu i wyznaczane są z następującej zależności:

$$\Phi_{i,j} = \frac{\partial F_i(y_{1,\ldots} y_N, y_{N+1}, y_{N+2})}{\partial y_j} \tag{6}$$

- **filtracja (korekcja)**

Wektor stanu po filtracji:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{y}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1}\left[\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}\,\tilde{\mathbf{y}}_{k=1/k}\right] \tag{7}$$

gdzie $\mathbf{K}_{k+1}$ jest macierzą wzmocnienia filtru o postaci

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{G}_{k+1/k}\mathbf{H}^{T}[\mathbf{H}\mathbf{G}_{k+1/k}\mathbf{H}^{T} + \mathbf{V}_{k+1}]^{-1} \tag{8}$$

Macierz kowariancji błędów estymacji $\mathbf{G}_{k+1}$ wyznacza się z zależności:

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_{k+1/k} - \mathbf{G}_{k+1/k}\mathbf{H}^{T}[\mathbf{H}\mathbf{G}_{k+1/k}\mathbf{H}^{T} + \mathbf{V}_{k+1}]^{-1}\mathbf{H}\mathbf{G}_{k+1/k} \tag{9}$$

Z uwagi na nieliniowy charakter zagadnienia należy w każdym kroku czasu stosować procedurę iteracyjną, aż do uzyskania założonej dokładności wyznaczenia estymaty $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}$.

3.2. Istota metody przedziałowego uśredniania wyników pomiarów

Istota metody przedziałowego uśredniania pomiarów zaproponowana w pracy polega na podziale całego okresu czasu, w którym wykonywany był eksperyment, na podprzedziały i w każdym podprzedziale czasowym uśredniano wynik pomiaru, a otrzymaną wartość przypisano średniej wartości czasu w tym przedziale. Innymi słowy, zaproponowaną metodę wygładzania wyników pomiarów oparto na uśrednianiu temperatury w małych podprzedziałach czasowych wokół punktu środkowego podprzedziału, tzn.:

$$\bar{t}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_{k,i} \tag{10}$$

Dla każdej wartości średniej oszacowanie odchylenia standardowego można zapisać w postaci:

$$\sigma_{\bar{t}_k} = \frac{\sigma_{t_k}}{\sqrt{n}} \tag{11}$$

Wartości oszacowanego odchylenia standardowego dla wartości średnich przyjmowano do dalszego procesu estymacji jako wartości błędów pomiarowych w krokach czasowych.

4. PRZYKŁADOWE WYNIKI BADAŃ

W analizie numerycznej przyjęto materiał próbki o następujących cechach geometrycznych:

- średnica próbki d=72 mm,
- wysokość próbki 12.5 mm,

Gęstość strumienia ciepła ogrzewającego pojedynczą próbkę wynosiła $\dot{q}$ = 590 W/m^2

Do rozwiązania zagadnienia bezpośredniego założono następujące zależności parametrów termofizycznych w funkcji temperatury :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 = 0{,}18 + 0{,}02t + 0{,}0002t^2 \\ c(t) &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 = 1500 + 5t + 0{,}1t^2 \end{aligned} \tag{12}$$

Estymacje parametrów wykonano dla eksperymentu numerycznego, tzn. otrzymany rozkład temperatury z rozwiązania zagadnienia bezpośredniego zaburzano wg następującej zależności:

$$t_i^{zab} = t_i^{nzab} + \sigma\xi \tag{13}$$

gdzie:

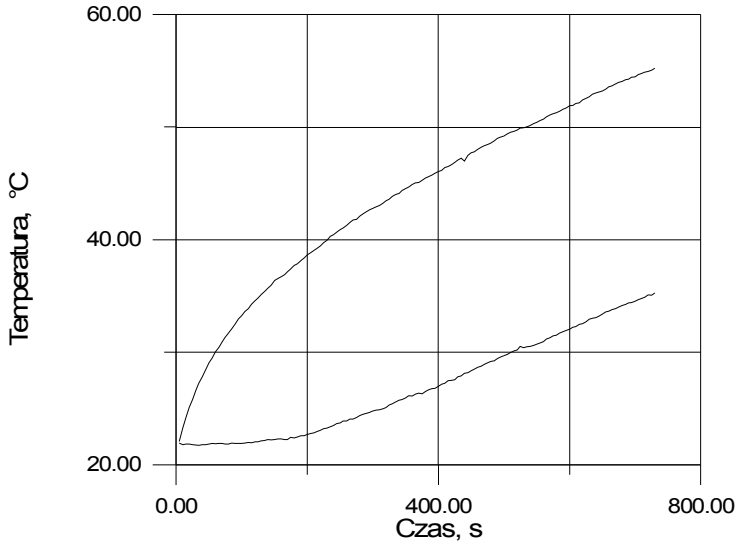
t_i^{zab} - temperatura otrzymana w wyniku zaburzenia,

t_i^{nzab} - temperatura otrzymana z rozwiązania zagadnienia bezpośredniego,

σ - założony błąd (odchylenie standardowe) pomiaru,

ξ - liczba z przedziału [-2.576; 2.576] dla rozkładu normalnego i poziomu ufności 99 %.

Na rys. 2 przedstawiono otrzymane z rozwiązania zagadnienia bezpośredniego i zaburzone błędem 0.05 K przebiegi zmian temperatury powierzchni próbek w funkcji czasu.



Rys.2. Zależność mierzonej temperatury w węzłach (t_1 krzywa górna – na powierzchni grzanej i t_6 krzywa dolna – na powierzchni zaizolowanej) w funkcji czasu

Tabela 1. Przykładowe wyniki identyfikacji dla s=0,05K

	Wartości początkowe	identyfikacja bez uśredniania		identyfikacja z uśrednianiem	
		ocena	czas, s	ocena	czas, s
λ_0	0.09	0.1790	600	0.1798	250
λ_1	0.01	0.0210	470	0.0199	190
λ_2	0.0001	0.000192	500	0.000198	190
c_0	2500	1494.3	520	1504.1	160
c_1	10	5.100	450	4.991	210
c_2	0.2	0.1982	480	0.102	180

6. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

Metoda filtracji dynamicznej należy do metod stochastycznie optymalnych i w wersji pierwotnej wykorzystywana była głównie do sterowania różnych procesów. W pracy zastosowano

ją do rozwiązywania odwrotnych zagadnień współczynnikowych przewodzenia ciepła. Na podstawie wykonanych analiz można stwierdzić, że umożliwia ona:

- jednoznaczne określenie najbardziej prawdopodobne wartości wyznaczanych parametrów,
- kontrolowanie dokładności obliczeń poprzez elementy macierzy kowariancji błędów,
- zastosowanie uśredniania wyników pomiarów w krokach czasowych, co pozwala znacznie skrócić czasy estymacji parametrów oraz zmniejszyć błędy estymacji o około *n* razy, co przy stosunkowo dużej wartości *n* prowadzi do istotnego zwiększenia dokładności otrzymanych ocen. Ważną zaletą zastosowanego uśredniania jest to, że jeżeli w procesie estymacji osiągnięte zostają prawdziwe wartości estymowanego parametru, to wartości te niewiele zmieniają się mimo dalej prowadzonych obliczeń estymacji.

LITERATURA

1. Kucypera S.: Optymalizacja eksperymentu w celu poprawienia dokładności wyników rozwiązania odwrotnego zagadnienia przewodzenia ciepła metodą hybrydową. Gliwice 2005, ZN KMS nr 29, s. 261-266.
2. Legras. J.: Praktyczne metody analizy numerycznej. Warszawa: WNT, 1974 .
3. Taler J.: Teoria i praktyka identyfikacji procesów przepływu ciepła. Wrocław: Wyd. Ossolińskich, 1995.
4. Modelowanie numeryczne pól temperatury. Praca zbiorowa pod red. J. Szarguta. Warszawa: WNT, 1992.
5. Al-Khalidy N., Skorek J: Optimal dynamic filtration approach for inverse heat conduction problems with moving body. “Inverse Problems in Engineering” 1997, vol. 4, s. 209-229,
6. Kucypera S., Skorek J.: Wyznaczanie temperaturowych zależności właściwości cieplnych ciał stałych z wykorzystaniem metody filtracji dynamicznej. W: Materiały XI Sympozjum wymiany ciepła i masy. Gliwice-Szczyrk 2001, s. 347-354

ESTIMATION OF THE THERMOPHYSICAL PARAMETERS OF ISOTROPIC SOLIDS BY MEANS OF THE DYNAMIC FILTER METHOD AND INTERVAL AVERAGING THE RESULTS OF MEASUREMENTS

Summary. The actual values of the thermal parameters by means of dynamic filtration method are obtained approaching to decreasing of the covariance matrix of estimated errors. That is this matrix in particular her diagonal elements are lesser the estimates are more precise. It should be underline, that in the estimation process the norm of this matrix approaches the norm of the covariance matrix of the measurement errors. Hence it results, that the estimation errors are determined by measurement errors. In order to decreasing the measurement errors and to improve a precise of estimated parameters of thermophysical investigated material, the measurement results has been smoothed before estimation. Selected results of this analysis have been presented.