

## ANALIZA INTERWAŁOWA I ROZMYTA LUDZKIEJ KOŚCI BIODROWEJ

ANTONI JOHN, PIOTR ORANTEK, MONIKA MIARKA

*Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki, Politechnika Śląska*

Streszczenie. Modelowanie numeryczne ludzkiej kości biodrowej jest złożonym procesem, w którym należy wziąć pod uwagę wiele ważnych czynników. Jednym z nich są własności materiału. Obliczenia numeryczne wymagają wprowadzenia parametrów materiałowych, które zależą od wieku, zdrowia, płci, środowiska oraz wielu innych. Aby dobrać prawidłowo parametry materiałowe, należy wziąć pod uwagę różnorodne dane dotyczące pacjentów. Autorzy artykułu założyli wartości przedziałowe wybranych parametrów materiałowych. Zaproponowano interwałową i rozmytą analizę kości biodrowej.

### 1. WSTĘP

Bioinżynieria zajmuje się wieloma ważnymi problemami związanymi z ludzkim ciałem. Kość biodrowa jest jednym z najważniejszych elementów podporowych w obręczy biodrowej, i jest jednocześnie narażona na wiele urazów. Często przed interwencją chirurgiczną należy wyznaczyć rozkład naprężeń, odkształceń i przemieszczeń kości biodrowej. Jest to szczególnie ważne, gdy wykonuje się zabieg całkowitej alloplastyki stawu biodrowego. Dla bezpieczeństwa pacjenta wyżej wspomniane rozkłady można wyznaczyć jedynie dwoma metodami: testami wykonywanymi na modelu i obliczeniami numerycznymi. Model numeryczny musi być przygotowany przed obliczeniami numerycznymi [1,2,3]. Obliczenia te wymagają znajomości parametrów materiałowych. Z reguły źródłem wiadomości o materiałach jest literatura, jednak często dane te nie nadają się do zastosowania w obliczeniach. Dlatego szuka się wartości parametrów materiałowych na drodze eksperymentalnej [4,5,6]. Wiadomo, że właściwości materiałowe żywej tkanki zależą od wieku, płci, zdrowia, środowiska oraz wielu innych czynników zmieniających się w czasie. Jako że interesują nas wyniki nie tylko dla jednej osoby, ale dla grupy pacjentów, powinno się zakładać przedziałowe parametry materiałów. W pracy zaprezentowano analizę przedziałową i rozmytą. Analiza dotyczy właściwości materiałów. Zastosowano w obliczeniu metodę elementów skończonych [7,8,9].

W rozmytym podejściu liczby rozmyte rozpatruje się jako przedziały odpowiadające alfa-przekrojom.

### 2. PODSTAWY MATEMATYCZNE ARYTMETYKI PRZEDZIAŁOWEJ I ROZMYTEJ

Najważniejsze definicje i założenia dotyczące liczb przedziałowych można znaleźć w literaturze [10]. W nawiązaniu do definicji, przedziałowy skalar złożony jest z pojedynczych przedziałów należących do dziedziny liczb rzeczywistych  $\mathbf{R}$ . Dziedzina przedziałowych skalarów oznaczana jest jako  $\mathbf{IR}$ . Przedziałowy skalar oznaczany jest jako  $\mathbf{x}$ . Rzeczywisty domknięty przedział jest definiowany jako [10]:

$$\mathbf{x} = \{x \mid (x \in \mathbf{R})(\underline{x} \leq x \leq \bar{x})\} \text{ or } \mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$$

gdzie  $\underline{x}$  oraz  $\bar{x}$  są odpowiednio dolną i górną granicą przedziałowego skalaru. Zbiór skalarów oznaczany jest jako  $\langle x \rangle$  i definiowany następująco:

$$\langle x \rangle = \bigcup_i x_i$$

Wektor przedziałowy oznaczany jest jako  $\{\mathbf{x}\} \in \mathbf{IR}^n$ . Opisuje on zbiór wszystkich wektorów, których składniki  $x_i$  należą do odpowiadających im skalarnych przedziałów  $\mathbf{x}_i$ :

$$\{\mathbf{x}\} = \{\{x\} \mid x_i \in \mathbf{x}_i\}$$

Macierz przedziałowa  $[\mathbf{X}] \in \mathbf{IR}^{n \times m}$  opisuje zbiór wszystkich macierzy, których składnik  $x_{ij}$  zawarty jest w odpowiadającym mu przedziałowym skalarze  $\mathbf{x}_{ij}$ :

$$[\mathbf{X}] = \{[X] \mid x_{ij} \in \mathbf{x}_{ij}\}$$

Zbiór macierzy  $\langle [X] \rangle$  opisuje zbiór wszystkich macierzy, których każdy składnik  $x_{ij}$  macierzy zawarty jest w odpowiadającym mu zbiorze skalarów  $\langle x_{ij} \rangle$ :

$$\langle [X_{ij}] \rangle = \{[X_{ij}] \mid x_{ij} \in \langle x_{ij} \rangle\}$$

Dodatkowo na liczbach przedziałowych zdefiniowana jest arytmetyka przedziałowa:

$$[\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]$$

$$[\underline{a}, \bar{a}] - [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}]$$

$$[\underline{a}, \bar{a}] \cdot [\underline{b}, \bar{b}] = [\min(\mathbf{M}), \max(\mathbf{M})]$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{M} = \{\underline{a} \cdot \underline{b}; \underline{a} \cdot \bar{b}; \bar{a} \cdot \underline{b}; \bar{a} \cdot \bar{b}\}$$

$$[\underline{a}, \bar{a}] / [\underline{b}, \bar{b}] = [\min(\mathbf{D}), \max(\mathbf{D})]$$

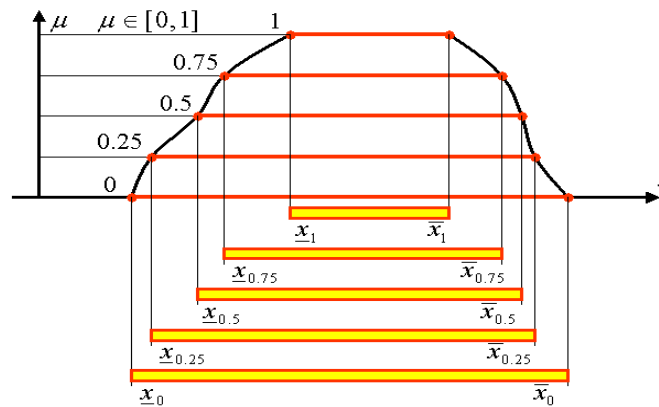
$$\text{gdzie: } \mathbf{D} = \{\underline{a} / \underline{b}; \underline{a} / \bar{b}; \bar{a} / \underline{b}; \bar{a} / \bar{b}\}.$$

Rozpatrzmy analizę elementów skończonych jako funkcję czarnej skrzynki  $f(\{x\})$  zależnej od wektora parametrów  $\{x\}$ , i mającą za wynik wektor  $\{y\}$ . Wektor parametrów wejściowych zawiera się w wektorze przedziałowym  $\{x\}$ . Procedura przedziałowych elementów skończonych jest równoważna szukaniu rozwiązania postaci:

$$\langle \{y\} \rangle = \left\{ \{y\} \mid (\{x\} \in \{x\}) (\{y\} = f(\{x\})) \right\}$$

Rozważania skupiono na obliczaniu przedziałowego wektor aproksymującego dokładny zbiór rozwiązań. Hiperprzestrzenna aproksymacja opisuje zakres każdego komponentu wektora. Można wyróżnić kilka metod numerycznych w celu obliczenia aproksymacji hipersześciennej dokładnego zbioru rozwiązań. W tej pracy wykorzystano analizę węzłową.

Zbiory rozmyte są rozpatrywane jako para  $x$  oraz  $\mu(x)$ . Typ zbioru rozmytego to liczba rozmyta. Liczba rozmyta może być reprezentowana przez zbiór alfa-przekrojów. Działania na liczbach rozmytych mogą zostać określone za pomocą arytmetyki przedziałowej dla każdego alfa-przekroju.



Rys.1. Liczby rozmyte i odpowiadające im przedziały

### 3. PRZEDZIAŁOWA METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Przedziałowa metoda elementów skończonych (IFEM) jest stosunkowo nowym narzędziem obliczeniowym do analizowania problemów niedokładności parametrów. Główne algebraiczne równania po przestrzennej dyskretyzacji mają podobną formę do równań otrzymanych deterministyczną metodą elementów skończonych. Otrzymuje się układ  $n$  równań liniowych:

$$[A][x] = [B]$$

co jest równoznaczne z:

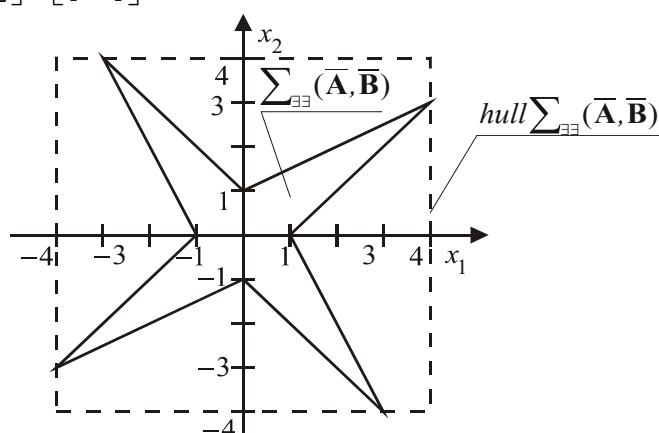
$$\begin{bmatrix} [a_{11}, \bar{a}_{11}] & [a_{12}, \bar{a}_{12}] & [a_{13}, \bar{a}_{13}] & \dots & [a_{1n}, \bar{a}_{1n}] \\ [a_{21}, \bar{a}_{21}] & [a_{22}, \bar{a}_{22}] & [a_{23}, \bar{a}_{23}] & \dots & [a_{2n}, \bar{a}_{2n}] \\ [a_{31}, \bar{a}_{31}] & [a_{32}, \bar{a}_{32}] & [a_{33}, \bar{a}_{33}] & \dots & [a_{3n}, \bar{a}_{3n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [a_{n1}, \bar{a}_{n1}] & [a_{n2}, \bar{a}_{n2}] & [a_{n3}, \bar{a}_{n3}] & \dots & [a_{nn}, \bar{a}_{nn}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [x_1, \bar{x}_1] \\ [x_2, \bar{x}_2] \\ [x_3, \bar{x}_3] \\ \dots \\ [x_n, \bar{x}_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [b_1, \bar{b}_1] \\ [b_2, \bar{b}_2] \\ [b_3, \bar{b}_3] \\ \dots \\ [b_n, \bar{b}_n] \end{bmatrix}$$

W przypadku interwałowym elementy macierzy  $[A]$  oraz wektora  $[B]$  są przedziałowe. Dlatego wektor  $[x]$  jest również przedziałowy.

Rozwiązaniem układu przedziałowych równań liniowych jest zbiór *hull* (rys.2).

Dla przykładu:

$$\begin{bmatrix} [1,2] & [2,4] \\ [2,4] & [1,2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-1,1] \\ [1,2] \end{bmatrix}$$



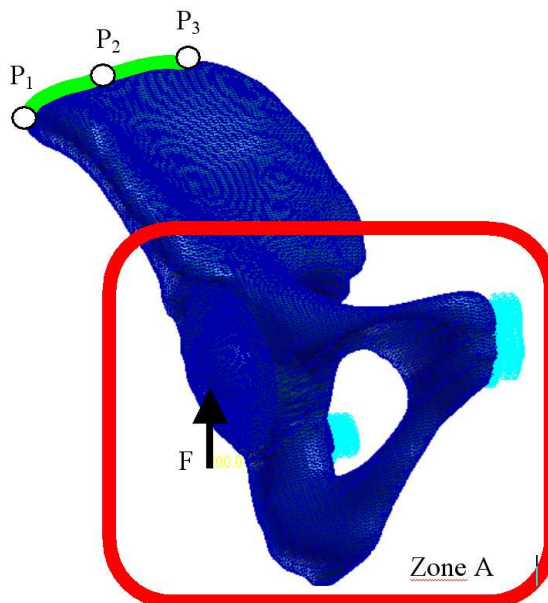
Rys. 2. Interpretacja geometryczna rozwiązania układu przedziałowych równań

#### 4. PRZEDZIAŁOWA I ROZMYTA ANALIZA KOŚCI BIODROWEJ

Ludzka kość biodrowa jest utwierdzona w spójeniu łonowym i na powierzchni kontaktu z kością krzyżową. Jest obciążona siłą  $F$  działającą w sztucznej panewce. Przeprowadzono obliczenia dla dwóch przypadków. W pierwszym przypadku parametry materiałowe nie zależą od położenia. W drugim są zależne od położenia w kości.

W obu przypadkach zastosowano podejścia interwałowe i rozmyte (dwa alfa-przekroje trapezoidalne). Założono, że dla podejścia przedziałowego moduł Younga kości miedniczej był stały i równy  $[1.8E8; 2.2E8]$ . Moduł Younga kości korowej (w pierwszym przypadku) został zamodelowany jako przedział  $[1.8E10; 2.2E10]$ . W drugim przypadku moduł Younga kości korowej był równy  $[1.8E10; 2.2E10]$  w strefie A (rys.2) i równy  $[0.9E10; 1.1E10]$  na brzegu B (pomiędzy  $P_1$  oraz  $P_3$ ). W przestrzeni pomiędzy strefą A i brzegiem B, moduł Younga był wygenerowany jako liniowa funkcja wagi.

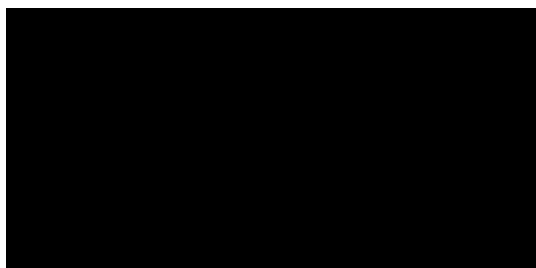
W przypadku analizy rozmytej moduł Younga kości miedniczej (w obu przypadkach) był stały i równy liczbom rozmytym (tab.3). W pierwszym przypadku moduł Younga kości korowej był



zamodelowany jako liczba rozmyta (tab.3). Wartości modułu Younga kości korowej w strefie A i na brzegu B (Rys.3) w drugim przypadku są przedstawione w tab.3. W przestrzeni pomiędzy strefą A i brzegiem B, moduł Younga był wygenerowany jako liniowa funkcja wagi.

Rys.3. Model kości miednicy człowieka

Założono, że pozostałe parametry są liczbami deterministycznymi. Wyniki: rzeczywiste, przedziałowe i rozmyte przemieszczenia w wybranych punktach są przedstawione w tab.1 i tab.2 oraz na rys.4.

Rys.4. Przedziałowe (górną i dolną granicą) przemieszczenia wzdłuż osi x na odcinku P<sub>1</sub>-P<sub>3</sub>

Tablica 1. Przemieszczenia w postaci rzeczywistej

punkt	przypadek	x	y	z
P <sub>1</sub>	1	2.927E-07	2.953E-07	-3.016E-07
	2	2.927E-07	2.953E-07	-3.015E-07
P <sub>2</sub>	1	3.932E-07	1.337E-07	-2.920E-07
	2	3.932E-07	1.337E-07	-2.929E-07
P <sub>3</sub>	1	4.194E-07	3.731E-08	-2.663E-07
	2	4.194E-07	3.733E-08	-2.662E-07

Tablica 2. Przemieszczenia interwałowe wybranych punktów

punkt	przypadek	x		y		z	
		$\underline{x}$	$\bar{x}$	$\underline{y}$	$\bar{y}$	$\underline{z}$	$\bar{z}$
P <sub>1</sub>	1	2.666E-07	3.247E-07	2.690E-07	3.277E-07	-3.347E-07	-2.744E-07
	2	2.665E-07	3.247E-07	2.690E-07	3.276E-07	-3.348E-07	-2.745E-07
P <sub>2</sub>	1	3.580E-07	4.363E-07	1.217E-07	1.484E-07	-3.240E-07	-2.658E-07
	2	3.580E-07	4.362E-07	1.217E-07	1.484E-07	-3.241E-07	-2.658E-07
P <sub>3</sub>	1	3.819E-07	4.654E-07	3.390E-08	4.151E-08	-2.955E-07	-2.424E-07
	2	3.819E-07	4.654E-07	3.388E-08	4.150E-08	-2.955E-07	-2.424E-07

Tablica 3. Rozmyte wartości parametrów materiałowych i przemieszczenia punktu P<sub>1</sub>

E1 [e+10] k. korowa	E2 [e+8] k. gąbczasta	Px <sub>1</sub> [e-7]	Py <sub>1</sub> [e-7]	Pz <sub>1</sub> [e-7]
1.8 2.2	2.66 3.24	2.66 3.24	2.70 3.27	-3.34 -2.74
1.6 2.4	2.44 3.64	2.44 3.64	2.47 3.68	-3.76 -2.51

#### 4. PODSUMOWANIE

Analiza przedziałowa umożliwia obliczenia wybranych charakterystyk (odkształcenia, naprężenia i przemieszczenia) nie tylko dla dyskretnych deterministycznych parametrów materiałowych, ale dla założonych przedziałów, dzięki czemu znacznie dokładniej odzwierciedla rzeczywiste warunki. Otrzymane wyniki mogą być pomocne przy ocenie

jakości wykonanych chirurgicznych zabiegów. Chirurdzy mogą zaobserwować, które stany są niebezpieczne dla pacjentów.

## LITERATURA

1. John A.: Numerical analysis of solid and shell models of human pelvic bone. Lecture Notes in Computer Science 1988. Eds.: L. Vulkov, J. Waśniewski, P. Yalamov, Numerical Analysis and Its Application. Berlin Heidelberg: Springer Verlag 2001, p. 764-771.
2. John A., Orantek P.: Computer aided creation of geometrical model of human pelvic bone. "Acta of Bioengineering and Biomechanics" 2001, vol. 2, Supplement 2, p. 217-220.
3. John A., Orantek P.: Computer aided creation of numerical model of human pelvic bone. "Engineering Transactions" 2003, vol. 51, No. 2-3, p. 215-226.
4. John A., Kuś W., Orantek P.: Material coefficient identification of bone tissues using evolutionary algorithms. In: Inverse Problems in Engineering Mechanics IV. Masa.Tanaka (Ed.), Elsevier 2003, p. 95-102.
5. Burczyński T., John A., Kuś K., Orantek P., Poteralski A.: The evolutionary algorithm and hypersurface in identification of material coefficients in human pelvic bone. "Acta of Bioengineering and Biomechanics", 2003, 5, Supplement 1, p. 61-66.
6. Cowin S.C. (Ed.): Bone mechanics handbook. CRC Press 2001.
7. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: The finite element method. Vol. 1: The Basis. 5th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
8. Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P.: Meshless methods: An overview and recent developments. "Comput. Methods Appl. Mech. Engng" 1996, 139, p. 3-47.
9. Owen, D.R.J., Feng, Y.T., Mak, K.W. and Honnor, M.E.: Computational modelling of large scale multiple fracturing solids and particulate systems. In: Computational Mechanics – New Frontiers for the New Millennium, Proceedings of the First Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics, Valliappan, S. and Khalili, N. Eds, Elsevier, Amsterdam 2001, Vol. 1, p. 117-126.
10. Moore R.E.: Interval Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1966.

## THE INTERVAL AND FUZZY ANALYSIS OF THE HUMAN PELVIC BONE

Summary. Numerical modeling of the human pelvic bone is a complex process in which many important factors are taken into account. One of them concerns material properties. Numerical calculations require the characteristics of the material properties and the material parameters from the beginning. The material properties of the living body depend on age, health, gender, environment and many others factors. To determine correct material parameters, health details of a group of patients need to be taken into consideration. In this paper authors assumed interval values of the selected material parameters and proposed interval and fuzzy analysis of the pelvic bone.