

SZYBKA WIELOBIEGUNOWA METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ANALIZIE UKŁADÓW OBCIĄŻONYCH SIŁAMI OBJĘTOŚCIOWYMI

JACEK PTASZNY, PIOTR FEDELIŃSKI

*Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki, Politechnika Śląska
e-mail: jacek.ptaszny@polsl.pl, piotr.fedelinski@polsl.pl*

Streszczenie. W pracy przedstawiono szybką wielobiegunową metodę elementów brzegowych (SWMEB) w analizie tarcz liniowosprężystych, obciążonych siłami objętościowymi. Opracowano program komputerowy wykorzystujący trójwęzłowe elementy brzegowe oraz sześciowęzłowe trójkątne komórki wewnętrzne. Przedstawiono przykład numeryczny analizy przemieszczeń i naprężeń w wirującym krążku. Badano czas obliczeń, pamięć oraz dokładność analizy wykonanej trzema metodami: konwencjonalną MEB, szybką metodą wielobiegunową zastosowaną tylko do obliczenia składników objętościowych oraz kompletną SWMEB.

1. WSTĘP

Stosowanie szybkiej metody wielobiegunowej (SMW) (Greengard i Rokhlin [4]) przyczyniło się do powiększenia zakresu zastosowań metody elementów brzegowych (MEB). Efektywność analizy konwencjonalnej MEB jest ograniczona do układów o liczbie stopni swobody układu nie większej niż kilka tysięcy, ze względu na kwadratową zależność czasu obliczeń oraz wymaganej pamięci od liczby stopni swobody. W przypadku szybkiej wielobiegunowej MEB (SWMEB) zależności te są liniowe i możliwa jest efektywna analiza układów o dużo większej liczbie stopni swobody.

W pracy Nishimury [7] można znaleźć szczegółowy opis algorytmu SWMEB, sformułowania dla różnych równań różniczkowych oraz przegląd literatury dotyczącej szerokiego zakresu zastosowań metody. Wymienione są również kierunki, w których konieczne jest prowadzenie dalszych badań. Wśród nich znajduje się obliczanie potencjałów objętościowych występujących w przypadku obecności składników źródłowych, analizy zagadnień własnych, analizy zagadnień nieliniowych, itd. Jako jedną z możliwości autor wymienił zastosowanie SMW do obliczania całek objętościowych po zdyskretyzowanym obszarze.

Ingber i in. [5] porównali efektywność i dokładność różnych metod obliczania potencjałów objętościowych: metody rozwiązań szczególnych, zasady podwójnej wzajemności, metody całkowania bezpośredniego po dyskretyzowanym obszarze oraz metody całkowania po obszarze z wykorzystaniem metody wielobiegunowej. Dwie pierwsze metody nie wymagają dyskretyzacji obszaru. Analizowano zagadnienia opisane równaniami Poissona i niejednorodnym równaniem Helmholtza. Wykazano, że metody całkowania po obszarze są znacznie efektywniejsze oraz dają dużo dokładniejsze wyniki. Zdaniem cytowanych autorów uzasadnione jest stosowanie metod całkowania po dyskretyzowanym obszarze, zwłaszcza w obliczu stale rozwijających się algorytmów generowania siatek.

Zalety metody całkowania po obszarze opisali również Minutolo i in. [6]. Przedstawiono analizę MEB materiałów gradientowych, z wykorzystaniem klasycznych rozwiązań fundamentalnych. Metoda wymaga uwzględnienia potencjałów objętościowych. Wyniki analizy porównano z wynikami otrzymanymi za pomocą izoparametrycznego sformułowania MES, uwzględniającego zmienne własności materiału w obszarze elementu. Wykazano, że MEB dostarcza dokładniejszych wyników dla przypadków ze spiętrzeniem naprężeń oraz dla obszarów dyskretyzowanych elementami skończonymi (komórkami wewnętrznymi) o nieregularnym kształcie.

Wang i Yao [10] przedstawili zastosowanie SWMEB w analizie statycznej tarcz sprężysto-plastycznych. Obszar uplastyczniony dyskretyzowano stałymi trójkątnymi komórkami wewnętrznymi. Brzeg dyskretyzowano elementami liniowymi lub kwadratowymi. Do rozwiązania układu nieliniowego zastosowano metodę przyrostową. W każdej iteracji wyznaczano odkształcenia plastyczne w węzłach wewnętrznych obszaru, a układ równań rozwiązywano metodą GMRES (ang. *General Minimal Residual*).

W niniejszej pracy przedstawiono analizę SWMEB tarcz liniowosprężystych. Program prezentowany w pracy [8] został uzupełniony o możliwość analizy układów obciążonych siłami objętościowymi [9]. Przedstawiono przykład numeryczny analizy wirującego krążka z otworem, obciążonego siłami odśrodkowymi. Wyniki analizy porównano z rozwiązaniem analitycznym. Celem pracy było szczegółowe zbadanie wpływu parametrów metody na czas obliczeń, pamięć i dokładność dla układu o umiarkowanej liczbie elementów brzegowych i komórek wewnętrznych (odpowiednio rzędu 10^2 i 10^3).

2. SZYBKA WIELOBIEGUNOWA METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Rozważane jest płaskie ciało wykonane z jednorodnego, izotropowego materiału liniowosprężystego. Ciało jest obciążone statycznie siłami powierzchniowymi i objętościowymi, działającymi w jego płaszczyźnie. Dla takiego modelu stan ciała opisany jest tożsamością Somigliany [1, 2]. W równaniu występują całki brzegowe (potencjały warstwy pojedynczej i podwójnej) zależne od rozwiązań podstawowych elastostatyki oraz od przemieszczeń i sił powierzchniowych występujących na brzegu ciała. W równaniu występuje również całka po obszarze ciała (potencjał objętościowy), zależna od rozwiązania podstawowego przemieszczeń oraz od znanego pola sił objętościowych. Rozwiązanie numeryczne otrzymuje się w wyniku podziału brzegu na elementy oraz obszaru na komórki wewnętrzne. Równania całkowite stosuje się dla punktów kolokacji, które są węzłami brzegowymi, co wiąże się z koniecznością wielokrotnego obliczania całek brzegowych i objętościowych. Układ równań można zapisać w postaci macierzowej

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{U}\} = [\mathbf{G}]\{\mathbf{T}\} + \{\mathbf{B}\}, \quad (1)$$

gdzie macierze \mathbf{H} i \mathbf{G} zależą od rozwiązań podstawowych oraz sposobu interpolacji wielkości brzegowych. Są one pełne i niesymetryczne. Wektory \mathbf{U} i \mathbf{T} zawierają brzegowe przemieszczenia i siły powierzchniowe. Wektor \mathbf{B} zawiera składniki potencjału objętościowego. Utworzenie układu równań (1) metodą bezpośrednią wymaga wykonania operacji w liczbie rzędu $N^2 + N \times M$, gdzie N jest liczbą elementów brzegowych a M – liczbą komórek wewnętrznych. Jeśli dyskretyzowany jest cały obszar układu, liczba M może być znacznie większa od N i decydujący wpływ na czas analizy ma całkowanie po obszarze.

W celu skrócenia czasu analizy stosuje się SWMEB. Podstawowym jej założeniem jest przybliżenie potencjałów ich rozwinięciem, w pobliżu punktów całkowania, w szereg wielobiegunowy [11]. Określa się obszary: odległy (*odl*), w którym korzysta się z szeregu,

oraz bliski (*bl*), w którym potencjały obliczane są poprzez bezpośrednie całkowanie. Składniki szeregu wielobiegunowego rozwijane są dalej w szereg lokalny w pobliżu punktów kolokacji. Dalszy szczegółowy opis metody zostanie pominięty ze względu na istniejący szeroki zbiór dostępnych publikacji związanych z metodą (zob. [7, 8, 9]). Wymienione zostaną jedynie główne kroki algorytmu, którymi są:

- grupowanie komórek wewnętrznych wraz z elementami brzegowymi w obszarach i utworzenie hierarchicznej struktury drzewa,
- obliczenie współczynników szeregu wielobiegunowego dla najmniejszych komórek (leżących na najwyższym poziomie drzewa, tzw. liści drzewa),
- formowanie współczynników wielobiegunowych dla węzłów leżących na coraz niższych poziomach drzewa, ze współczynników ich potomków,
- formowanie współczynników rozwinięcia lokalnego węzłów drzewa, ze współczynników rozwinięcia wielobiegunowego,
- uzupełnianie współczynników rozwinięcia lokalnego węzłów poprzez uwzględnienie współczynników lokalnych ich rodziców,
- obliczenie składników potencjałów za pomocą szeregu lokalnego.

W wyniku przeprowadzenia wymienionych operacji uzyskuje się układ równań w następującej postaci:

$$[\mathbf{H}]^{bl} \{\mathbf{U}\} + \{\mathbf{HU}\}^{odl} = [\mathbf{G}]^{bl} \{\mathbf{T}\} + \{\mathbf{B}\}^{bl} + (\{\mathbf{GT}\}^{odl} + \{\mathbf{B}\}^{odl}). \quad (2)$$

Elementy macierzy (*bl*) oblicza się poprzez całkowanie bezpośrednie. Elementy wektorów (*odl*) oblicza się w wyniku transformacji współczynników wielobiegunowych. Wektor sumy dwóch ostatnich składników prawej strony równania oblicza się poprzez transformacje współczynników wielobiegunowych. Uwzględniając warunki brzegowe, równanie sprowadza się do postaci

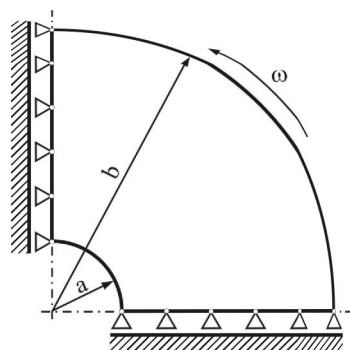
$$\{\mathbf{AX}^i\} = \{\mathbf{Y}\}. \quad (3)$$

Wektor lewej strony równania $\{\mathbf{AX}^i\}$ zawiera składniki potencjałów zależnych od poszukiwanych wielkości, natomiast wektor prawej strony równania $\{\mathbf{Y}\}$ zawiera składniki potencjałów zależnych od zadanych przemieszczeń, sił powierzchniowych oraz sił objętościowych. Równanie można rozwiązać tylko metodą iteracyjną, stąd też występuje w nim wektor \mathbf{X}^i jako przybliżenie rozwiązania po *i*-tej iteracji. Całkowity czas analizy SWMEB jest wielkością rzędu $N+M$.

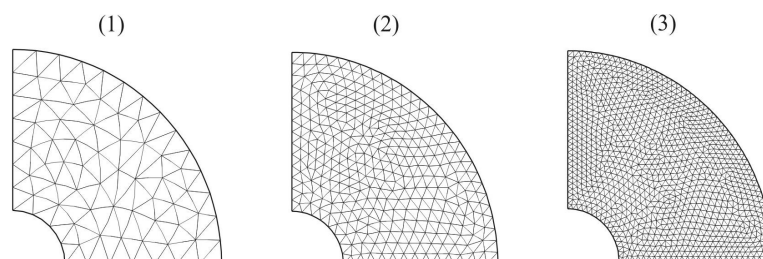
3. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Program komputerowy SWMEB, przedstawiony w pracy [8], wzbogacono o możliwość przeprowadzenia analizy tarcz obciążonych siłami objętościowymi. Program zastosowano do analizy przemieszczeń i naprężeń występujących w krążku z otworem [9], o stałej grubości, wirującego względem swej osi ze stałą prędkością kątową $w = 100 \cdot \pi$ rad/s. Krążek znajduje się w płaskim stanie naprężenia. Moduł Younga i liczba Poissona materiału krążka wynoszą odpowiednio: $E = 200$ GPa oraz $\nu = 0.3$. Gęstość materiału jest równa $\rho = 7800$ kg/m³. Promień otworu wynosi $a = 0.25$ m a promień zewnętrzny krążka $b = 1$ m. Ze względu na symetrię krążka modelowano tylko jego fragment. Geometrię i sposób podparcia modelu przedstawiono na rys.1. Rozpatrzono trzy sposoby dyskretyzacji układu, które zostały

przedstawione na rys. 2. Stosowano trójwęzłowe elementy brzegowe oraz sześciowęzłowe trójkątne komórki wewnętrzne. Dane opisujące trzy modele zestawiono w tabeli 1. W każdym przypadku generowano nieregularną siatkę komórek wewnętrznych, ponieważ dla wielu układów spotykanych w praktyce możliwa jest jedynie taka dyskretyzacja.



Rys.1. Krążek z otworem



Rys. 2. Sposoby dyskretyzacji układu

Tabela 1. Parametry modeli dyskretnych analizowanego układu

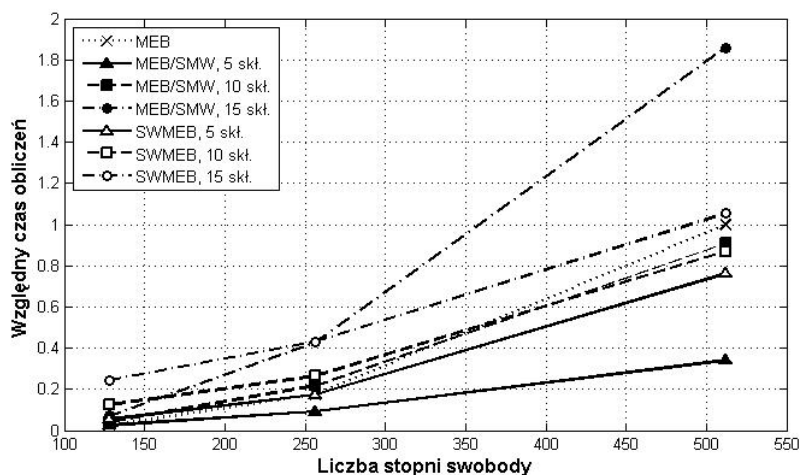
Numer modelu	Liczba elementów brzegowych	Liczba komórek wewnętrznych	Liczba wszystkich węzłów	Liczba stopni swobody układu
1	32	124	281	128
2	64	622	1309	256
3	128	2062	4253	512

Ruch obrotowy powoduje działanie sił odśrodkowych, które są siłami zachowawczymi. Całka powierzchniowa występująca w tożsamości Somigliany może zostać sprowadzona do całki brzegowej, co eliminuje konieczność dyskretyzacji obszaru ciała [2]. Przykład ma jednak na celu pokazanie poprawności działania opracowanego programu.

Obliczenia wykonano za pomocą trzech wariantów metody elementów brzegowych. Pierwszym z nich była metoda konwencjonalna (oznaczana dalej skrótem MEB), w której całki brzegowe i objętościowe obliczane były bezpośrednio. W drugim wariantcie całki brzegowe obliczane były metodą bezpośrednią, natomiast całki objętościowe z zastosowaniem szybkiej metody wielobiegunowej (metoda ta będzie oznaczana skrótem MEB/SMW). Układ równań w obu przypadkach rozwiązywano metodą bezpośrednią. W trzecim wariantcie wykorzystano kompletną metodę wielobiegunową, w której całki brzegowe i powierzchniowe obliczano, stosując szeregi (metoda ta będzie oznaczana skrótem SWMEB). Układ równań rozwiązywano za pomocą metody iteracyjnej GMRES, z wstępnym uwarunkowaniem. Stosowano macierz wstępnego uwarunkowania, której bloki leżące na diagonalnej były tworzone z wyrazów uwzględniających wpływ elementów brzegowych leżących w tych samych najmniejszych obszarach, co punkty kolokacji. Tolerancja błędu względnego dla metody GMRES wynosiła 10^{-6} .

W wariantcie drugim oraz trzecim liczba składników wszystkich szeregów wynosiła kolejno 5, 10 oraz 15. Dla drugiego wariantu metody maksymalną liczbę komórek wewnętrznych w najmniejszych obszarach przyjęto równą 10, dla wszystkich trzech sposobów dyskretyzacji układu. W przypadku kompletnej SWMEB maksymalna liczba komórek wewnętrznych w najmniejszych obszarach wynosiła 20, 80 oraz 200, odpowiednio dla sposobów dyskretyzacji (1), (2) oraz (3). Liczba ta została dobrana tak, aby zapewnić dobrą zbieżność iteracyjnego procesu rozwiązywania układu równań.

Analizowano efektywność badanych metod. Na rys. 3 przedstawiono względny czas obliczeń w funkcji liczby stopni swobody układu. Za wartość odniesienia przyjęto czas obliczeń za pomocą MEB dla układu o największej rozważanej liczbie stopni swobody.



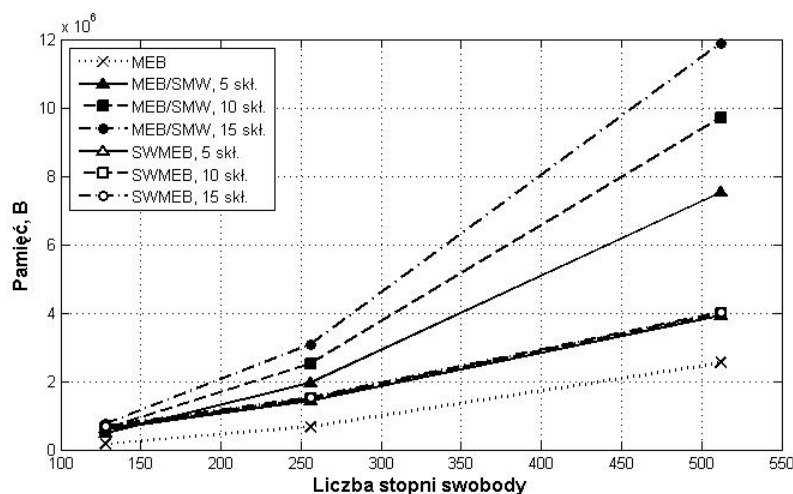
Rys. 3. Względny czas obliczeń w funkcji liczby stopni swobody układu

Duży wpływ na czas analizy w przypadku MEB/SMW ma liczba składników szeregu. Tylko dla liczby składników równej 5 metoda była efektywniejsza od MEB. Czas obliczeń dla największego układu był około trzykrotnie krótszy od czasu obliczeń MEB. Dla 10 składników szeregu czas obliczeń był zbliżony, zaś dla 15 składników – prawie dwukrotnie dłuższy od czasu obliczeń MEB. Duży wpływ liczby składników szeregu na efektywność wynika ze stosunkowo małej maksymalnej liczby komórek wewnętrznych w najmniejszych obszarach, utworzonych na etapie grupowania. Cały obszar analizowanego układu jest równomiernie wypełniony komórkami wewnętrznymi. Powoduje to utworzenie rozbudowanej struktury drzewa o dużej liczbie poziomów. Liczba węzłów na każdym z poziomów jest funkcją wykładniczą numeru poziomu. Liczba operacji transformacji jest proporcjonalna do liczby węzłów drzewa, zaś złożoność transformacji jest funkcją kwadratową liczby składników szeregu. Stąd wynika długi czas obliczeń dla większej liczby wyrazów szeregu.

W przypadku SWMEB czas analizy dla największego układu był zbliżony do czasu analizy wykonanej za pomocą MEB. Maksymalna liczba komórek wewnętrznych w najmniejszych obszarach była 20-krotnie większa niż w przypadku MEB/SMW, stąd też niewielki wpływ liczby wyrazów szeregu na czas obliczeń. Liczba iteracji wynosiła 19, 21 oraz 22, odpowiednio dla pierwszego, drugiego oraz trzeciego sposobu dyskretyzacji, niezależnie od liczby składników szeregu.

Analizowano również pamięć wymaganą do przeprowadzenia analizy. Zależność pamięci od liczby stopni swobody układu przedstawiono na rys. 4. Dla wszystkich rozpatrywanych przypadków dyskretyzacji pamięć wymagana do analizy MEB była najmniejsza. W metodzie tej największy obszar pamięci zajmują macierze układu. Metoda wielobiegunowa wymaga natomiast zapisania wyrazów macierzy pochodzących od obszarów bliskich oraz struktury drzewa wraz z momentami wielobiegunowymi i lokalnymi, przypisanymi węzłom drzewa. W przypadku MEB/SMW liczba składników szeregów wpływa znacznie na zajmowaną pamięć. Pamięć ta dla największego układu jest 3÷5 razy większa od pamięci zajmowanej w razie zastosowania MEB, zależnie od liczby składników szeregu. W przypadku SWMEB liczba składników szeregów nie wpływa znacznie na pamięć, która jest około 1.5-krotnie większa od pamięci w przypadku analizy MEB, dla największego z analizowanych układów.

Wpływ liczby składników szeregu na pamięć w przypadku metod wielobiegunowych zależy, podobnie jak w przypadku czasu obliczeń, od stopnia rozbudowania struktury drzewa.



Rys. 4. Wymagana pamięć komputera w funkcji liczby stopni swobody układu

Zbadano dokładność wykorzystanych metod. Uzyskane przemieszczenia i naprężenia porównywano z rozwiązaniami analitycznymi [3]. Obliczano względny błąd średniokwadratowy rozwiązania numerycznego f^n zdefiniowany następująco:

$$e(f^n) = \frac{1}{|f_{\max}^e|} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_i^n - f_i^e)^2} \cdot 100\%, \quad (4)$$

gdzie f_i^e jest rozwiązaniem dokładnym w i -tym węźle, f_i^n jest rozwiązaniem przybliżonym, $|f_{\max}^e|$ jest maksymalną wartością rozwiązania dokładnego oraz N jest liczbą węzłów brzegowych. Naprężenia obliczone dla węzłów łączących dwa elementy brzegowe traktowano jako dwie oddzielne wielkości, w zależności od elementu, dla którego obliczano naprężenia. W tym przypadku liczba N była równa liczbie węzłów brzegowych pomnożonej przez 1.5. Dla wszystkich węzłów brzegowych obliczono błąd przemieszczeń w kierunku promieniowym u_r , naprężeń w kierunku obwodowym s_t oraz naprężeń w kierunku promieniowym s_r . Wartości błędów wielkości obliczonych badanymi metodami przedstawiono w tabelach 2, 3 i 4.

W przypadku MEB błąd względny przekroczył wartość 1% tylko dla naprężeń w kierunku promieniowym, dla układu o najmniejszej liczbie elementów brzegowych. Ta sama uwaga odnosi się do MEB/SMW, niezależnie od liczby składników szeregu. Dodatkowo, dla liczby składników równej 10 oraz 15 uzyskano te same wartości błędów, co w przypadku MEB. Stąd wniosek, że zastosowanie szeregów do obliczenia tylko potencjału objętościowego nie powoduje znacznego zmniejszenia dokładności metody.

W przypadku SWMEB maksymalna wartość błędu nie przekroczyła 7%. Większa wartość błędu wynika stąd, że w metodzie tej wszystkie całki pochodzące od obszaru odległego obliczane są za pomocą szeregów, a układ równań rozwiązywany jest iteracyjnie. Zauważyć można mały wpływ liczby składników szeregu na wartość błędu. Podobnie jak w przypadku MEB/SMW, dla 10 oraz 15 składników szeregu uzyskano wielkości obciążone takim samym błędem. Błąd nie wykazuje jednoznacznej zależności od liczby stopni swobody i może zależeć od maksymalnej liczby komórek wewnętrznych w obszarze. Zmieniając tę liczbę, można

wpływać na wielkość obszaru bliskiego, gdzie wszystkie całki obliczane są w sposób bezpośredni.

Tabela 2. Względny błąd średniokwadratowy wielkości obliczonych za pomocą MEB

Model	$e(u_r)$, %	$e(S_t)$, %	$e(S_r)$, %
1	0.23	0.24	2.30
2	0.05	0.07	0.62
3	0.01	0.03	0.16

Tabela 3. Względny błąd średniokwadratowy wielkości obliczonych za pomocą MEB/SMW

Model	$e(u_r)$, %		$e(S_t)$, %		$e(S_r)$, %	
	5 skl.	10/15 skl.	5 skl.	10/15 skl.	5 skl.	10/15 skl.
1	0.23	0.23	0.24	0.24	2.39	2.30
2	0.06	0.05	0.10	0.07	0.91	0.62
3	0.02	0.01	0.11	0.03	0.51	0.16

Tabela 4. Względny błąd średniokwadratowy wielkości obliczonych za pomocą SWMEB

Model	$e(u_r)$, %		$e(S_t)$, %		$e(S_r)$, %	
	5 skl.	10/15 skl.	5 skl.	10/15 skl.	5 skl.	10/15 skl.
1	2.11	2.10	5.44	5.42	4.33	4.30
2	0.44	0.44	1.62	1.63	6.66	6.54
3	0.31	0.31	1.90	1.90	5.41	5.24

4. WNIOSKI

W pracy przedstawiono analizę tarcz liniowosprężystych obciążonych siłami objętościowymi, za pomocą SWMEB. Porównywano czas obliczeń, wymaganą pamięć oraz dokładność trzech wariantów MEB:

- metody konwencjonalnej, z bezpośrednim całkowaniem po dyskretyzowanym obszarze,
- metody konwencjonalnej połączonej z obliczeniem tylko całek powierzchniowych za pomocą SMW,
- kompletnej SWMEB.

Analizowano układy o liczbie brzegowych stopni swobody rzędu 10^2 . Dla takiej liczby możliwe jest znaczne skrócenie czasu analizy względem konwencjonalnej MEB, poprzez zastosowanie SMW do obliczenia tylko całek powierzchniowych, przy liczbie wyrazów szeregu równej 5. Należy się spodziewać, że znaczne skrócenie czasu obliczeń za pomocą kompletnej SWMEB względem MEB zostanie uzyskane dla układów o liczbie brzegowych stopni swobody rzędu 10^3 i większych.

Zastosowanie metody wielobiegunowej w badanych układach powoduje zwiększenie obszaru wymaganej pamięci, ze względu na konieczność zapisania struktury drzewa, odwzorowującej grupowanie komórek wewnętrznych w obszarach. Zredukowanie ilości wymaganej pamięci może być osiągnięte dla układów o większej liczbie stopni swobody.

Uzyskane wyniki przemieszczeń odznaczają się dużą dokładnością. W przeważającej liczbie analiz wartość błędu względnego była rzędu 0,1%. Dla naprężeń uzyskano zadowalającą dokładność, z wartością błędu rzędu kilku procent. Decydujący wpływ na dokładność rozwiązania ma sposób obliczenia całek brzegowych. Zastąpienie tylko całek objętościowych szeregiem wprowadza bardzo nieznaczny błąd.

Zastosowanie SWMEB do obliczania całek po obszarze stwarza możliwość efektywnej analizy szerszej grupy układów odkształcalnych, np. wykonanych z materiałów sprężysto-plastycznych lub gradientowych.

LITERATURA

1. Brebbia C.A., Dominguez J.: Boundary elements an introductory course. New York: McGraw-Hill, 1992.
2. Burczyński T.: Metoda elementów brzegowych w mechanice. Warszawa: WNT, 1995.
3. Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.: Wytrzymałość materiałów. T. II. Warszawa: WNT, 1997.
4. Greengard L., Rokhlin V.: A fast algorithm for particle simulations. „J. Comput. Phys.” 1987, 73, s. 325-348.
5. Ingber M. S., Mammoli A. A., Brown M. J.: A comparison of domain integral evaluation techniques for boundary element methods. „Int. J. Numer. Meth. Engng” 2001, 52, s. 417-432.
6. Minutolo V., Ruocco E., Colella T.: Isoparametric FEM vs. BEM for elastic functionally graded materials. W: Advances in Boundary Element Techniques VII, International Conference on Boundary Element Techniques BETEQ VII. Paris 2006, s. 263-266.
7. Nishimura N.: Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. „Appl. Mech. Rev.” 2002, 55, s. 299-324.
8. Ptaszny J., Fedeliński P.: Szybka wielobiegunowa metoda elementów brzegowych dla dwuwymiarowych zagadnień elastostatyki. „Modelowanie Inżynierskie” 2006, 32, s. 407-414.
9. Ptaszny J., Fedeliński P.: Szybka wielobiegunowa metoda elementów brzegowych w analizie tarcz liniowosprężystych. W: I Kongres Mechaniki Polskiej. Warszawa 2007, CD-ROM, ss.8.
10. Wang P. B., Yao Z. H.: Fast multipole boundary element analysis of two-dimensional elastoplastic problems. „Commun. Numer. Meth. Engng” 2007, 23, s. 889-903.
11. Yamada Y., Hayami K.: A multipole boundary element method for two dimensional elastostatics. METR 95-07, Department of Mathematical Engineering and Information Physics, Faculty of Engineering, University of Tokyo, 1995.

FAST MULTIPOLE BOUNDARY ELEMENT METHOD IN ANALYSIS OF STRUCTURES LOADED BY VOLUME FORCES

Summary. The fast multipole boundary element method (FMBEM) in analysis of linear elastic plates loaded by volume forces, is presented. A computer code, using three-node boundary element and six-node triangle internal cells, is developed. A numerical example of analysis of displacements and stresses in a rotating disc is presented. Three methods of analysis are considered, namely: the conventional BEM, the fast multipole method applied to evaluation of the volume terms only, and the complete FMBEM. Time of computations, memory and accuracy of the three methods are investigated.