MODELOWANIE INŻYNIERSKIE ISSN 1896-771X
35, s. 31-38, Gliwice 2008

ANALIZA MODALNA WZMOCNIONYCH TARCZ METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

RADOSŁAW GÓRSKI

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki, Politechnika Śląska
e-mail: radoslaw.gorski@polsl.pl

Streszczenie. W pracy przedstawiono sformułowanie i zastosowanie metody elementów brzegowych (MEB) w analizie drgań własnych tarcz wzmacnianych elementami usztywniającymi. Tarcze analizowane są metodą podwójnej zasady wzajemności MEB i wzmacniane elementami belkowymi, modelowanymi metodą elementów skończonych (MES). Dla układów, analizowanych w przykładach numerycznych, wyznaczono częstotliwości i postacie drgań własnych za pomocą MEB, a wyniki porównano z rezultatami wyznaczonymi MES, otrzymując bardzo dobrą zgodność rozwiązań.

1. WSTĘP

Cienkie elementy konstrukcyjne, jak tarcze, powłoki, membrany itp., są bardzo często wzmacniane za pomocą żeber, w celu zwiększenia wytrzymałości, sztywności i stateczności. Na elementy te mogą działać obciążenia dynamiczne. Obiekty takie są często elementami większych konstrukcji wykonujących drgania. Dodatkowo omawiane elementy konstrukcyjne wykonane są zwykle z kilku różnych materiałów. Typowym zastosowaniem są wzmocnione poszycia kadłubów samolotów stosowane w przemyśle lotniczym. Analiza dynamiczna takich układów jest ważnym zagadnieniem z praktycznego punktu widzenia. Celem analizy modalnej jest wyznaczenie częstości i postaci drgań własnych układów fizycznych wykonujących drgania własne. Wielkości te określają własności dynamiczne układów i zależą od ich kształtu, własności materiałowych i sposobu podparcia.

Analiza modalna jest bardzo ważnym etapem projektowania konstrukcji, gdyż umożliwia wyznaczenie częstości rezonansowych. W przypadku złożonych układów o dowolnej postaci konstrukcyjnej i wykonanych z różnych materiałów, częstości drgań własnych wyznaczane są zwykle metodami numerycznymi. Do najważniejszych zalicza się metodę elementów skończonych (MES) i metodę elementów brzegowych (MEB). W literaturze często jedna z tych metod wykorzystywana jest oddzielnie w celu rozwiązania zagadnienia własnego. Metody te mogą być połączone w celu wykorzystania ich zalet i rozwiązania tego problemu bardziej efektywnie.

MEB była z powodzeniem stosowana w analizie drgań własnych takich układów, jak tarcze, płyty, membrany czy układy bryłowe. Jednakże rozwiązanie problemu własnego za pomocą MEB przedstawiane jest w literaturze głównie dla układów jednorodnych i izotropowych. Analizę drgań własnych tarcz jednorodnych za pomocą metody podwójnej zasady wzajemności

(MPZW) MEB przedstawili po raz pierwszy Nardini i Brebbia [7]. Następnie autorzy zastosowali tę metodę do analizy drgań własnych i wymuszonych tych układów [2]. Od tego czasu metoda podwójnej zasady wzajemności MEB [3] jest szeroko stosowana przez wielu autorów w analizie dynamicznej układów. Albuquerque i inni [1] oraz Kögl i Gaul [6] zastosowali na przykład tę metodę odpowiednio w analizie modalnej tarcz anizotropowych i układów bryłowych. Górski i Fedeliński stosowali MPZW MEB w analizie drgań wymuszonych tarcz zbrojonych i ich optymalizacji [4] oraz w analizie drgań własnych tarcz niejednorodnych i ich optymalizacji [5].

W pracy przedstawiono sformułowanie i zastosowanie połączonej MEB/MES w analizie modalnej tarcz wzmacnianych żebrami. Uogólnione zagadnienie własne transformowane jest do standardowego i rozwiązane w celu otrzymania częstotliwości i postaci drgań własnych. Poszczególne komponenty układów wykonane są z materiału jednorodnego, liniowo-sprężystego i izotropowego, natomiast cały układ wykazuje własności anizotropowe i jest niejednorodny. Tarcza modelowana jest MPZW MEB, a elementy usztywniające MES. Takie podejście pozwala na zmniejszenie końcowego układu równań, np. w porównaniu z MES, gdyż dyskretyzacji podlega tylko brzeg zewnętrzny układu i linie wzdłuż żeber.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA WŁASNEGO

2.1. Tarcza jednorodna

Rozważane jest liniowo sprężyste, izotropowe i jednorodne ciało, zajmujące obszar Ω i ograniczone brzegiem Γ. Na brzegach Γ_1 i Γ_2 ($\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$) zadane są odpowiednio przemieszczenia i siły brzegowe. Materiał ciała, modelowanego MPZW MEB jako tarcza, znajduje się w płaskim stanie naprężenia lub odkształcenia. W celu otrzymania rozwiązania numerycznego brzeg zewnętrzny tarczy dzielony jest na elementy brzegowe. Metoda pozwala sformułować dla rozważanego układu następujące macierzowe równanie ruchu [2], [3]:

$$\mathbf{H}\,\mathbf{u} + \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\,\mathbf{t} \tag{1}$$

gdzie **H** i **G** są macierzami współczynników MEB, **M** jest macierzą bezwładności, **u**, $\ddot{\mathbf{u}}$ oraz **t** są odpowiednio wektorami przemieszczeń, przyspieszeń oraz sił brzegowych. Równanie to przypomina równanie ruchu otrzymywane MES z tym, że macierze są pełne i niesymetryczne.

Zagadnienie drgań swobodnych (własnych) jest szczególnym przypadkiem drgań wymuszonych, zdefiniowanych za pomocą wzoru (1). Otrzymuje się je poprzez przyjęcie zerowych wartości sił wymuszających oraz harmonicznej zmienności przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń. Te ostatnie można wyrazić za pomocą następującej zależności:

$$\ddot{\mathbf{u}} = -w^2\,\mathbf{u} \tag{2}$$

gdzie w jest częstością kołową drgań własnych. Wstawiając równanie (2) do (1), otrzymuje się następujące macierzowe równanie drgań swobodnych tarczy jednorodnej:

$$\mathbf{H}\,\mathbf{u} - \mathbf{G}\,\mathbf{t} = w^2\,\mathbf{M}\,\mathbf{u} \tag{3}$$

Równanie (3) może być zapisane w następującej postaci, uwzględniającej podział brzegu:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12}\\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12}\\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{t}_1\\ \mathbf{t}_2\end{bmatrix} = w^2\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12}\\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\end{bmatrix} \tag{4}$$

gdzie indeksy dolne 1 i 2 dotyczą wielkości odpowiednio na brzegu Γ_1 i Γ_2.

Uwzględniając zadane warunki brzegowe, tj. brzeg Γ_1 jest utwierdzony ($\mathbf{u}_1$=0), natomiast brzeg Γ_2 jest wolny od obciążeń ($\mathbf{t}_2$=0), równanie (4) upraszcza się do postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{12}\ \mathbf{u}_2 - \mathbf{G}_{11}\ \mathbf{t}_1 &= w^2\ \mathbf{M}_{12}\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{H}_{22}\ \mathbf{u}_2 - \mathbf{G}_{21}\ \mathbf{t}_1 &= w^2\ \mathbf{M}_{22}\ \mathbf{u}_2 \end{aligned} \tag{5}$$

Eliminując siły brzegowe $\mathbf{t}_1$ na brzegu Γ_1 z powyższych równań, otrzymuje się następujące uogólnione zagadnienie własne dla tarczy jednorodnej [7]:

$$\bar{\mathbf{H}}\ \mathbf{u}_2 = w^2\ \bar{\mathbf{M}}\ \mathbf{u}_2 \tag{6}$$

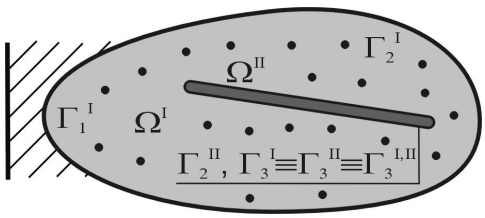
gdzie $\mathbf{u}_2$ jest wektorem przemieszczeń na brzegu swobodnym Γ_2, $\bar{\mathbf{H}}$ i $\bar{\mathbf{M}}$ są zmodyfikowanymi macierzami współczynników w postaci:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}} &= \mathbf{H}_{22} - \mathbf{G}_{21}\ \mathbf{G}_{11}^{-1}\ \mathbf{H}_{12} \\ \bar{\mathbf{M}} &= \mathbf{M}_{22} - \mathbf{G}_{21}\ \mathbf{G}_{11}^{-1}\ \mathbf{M}_{12} \end{aligned} \tag{7}$$

Sformułowanie zagadnienia własnego w przypadku tarczy wzmocnionej jednym żebrem przedstawione jest poniżej. W podobny sposób metoda może być rozszerzona na dowolną liczbę podobszarów MEB oraz wzmocnień.

2.2. Tarcza zbrojona

Rozważana jest tarcza wzmocniona elementem usztywniającym (żebrem), jak pokazano na rys.1. Materiały tarczy i wzmocnienia są liniowo-sprężyste, izotropowe i jednorodne, i zajmują odpowiednio obszary Ω^{I} i Ω^{II}. W przypadku, gdy materiały tarczy i żebra będą miały różne własności mechaniczne, układ będzie niejednorodny i będzie wykazywał własności anizotropowe. Podejście takie umożliwia analizę materiałów kompozytowych.



Rys.1. Tarcza wzmocniona żebrem

Tarcza modelowana jest MPZW MEB i elementami o kwadratowych funkcjach kształtu, natomiast wzmocnienie analizowane jest MES i belkowymi elementami o trzech stopniach swobody w węźle, czyli elementami skończonymi ramy płaskiej. W dalszej części pracy autor będzie używał określenia element belkowy, zamiast element ramy płaskiej. Stosowane w MPZW MEB punkty wewnętrzne (zob. rys.1) zwiększają zwykle dokładność rozwiązania.

Brzegi zewnętrzne tarczy, na których zadane są przemieszczenia i siły brzegowe, to odpowiednio Γ_1^{I} i Γ_2^{I}, natomiast brzeg wspólny, wzdłuż którego przytwierdzone jest wzmocnienie, to $\Gamma_3^{I,II} \equiv \Gamma_3^{I} \equiv \Gamma_3^{II}$. W celu połączenia tarczy z belką wprowadza się dodatkową linię brzegową wewnątrz obszaru tarczy. W modelu numerycznym uwzględniono połączenie tarczy i żebra poprzez założenie zgodności przemieszczeń liniowych obu elementów i równowagi sił ich wzajemnego oddziaływania. W węzłach tarczy i belki założono idealne połączenie. Wzdłuż brzegu wspólnego $\Gamma_3^{I,II}$ jeden element brzegowy łączony jest z dwoma elementami skończonymi. Brzeg Γ_2^{II} (zob. rys.1) dotyczy kątów obrotu belki.

Dolne indeksy 1, 2, 3 dotyczą wielkości odpowiednio wzdłuż brzegu utwierdzonego, swobodnego i wspólnego, natomiast górne indeksy I i II dotyczą obszaru tarczy i belki.

Jak wspomniano wcześniej, wzmocnienie analizowane jest MES. W przypadku belki metoda pozwala sformułować następujące macierzowe równanie ruchu:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u} + \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\,\mathbf{t} \tag{8}$$

gdzie **K** i **M** są odpowiednio macierzami sztywności i bezwładności belki, **u** i $\ddot{\mathbf{u}}$ są wektorami przemieszczeń i przyspieszeń. Ponieważ w pracy wykorzystano transformację równań MES do równań MEB, to wektor węzłowych sił skupionych **P** wyrażono za pomocą sił brzegowych **t** i specjalnej macierzy transformacji **T**, tj. **P** = **T t** [4]. Macierze otrzymywane MES, w odróżnieniu od MEB, są pasmowe i symetryczne.

Macierzowe równanie drgań swobodnych dla belki, podobnie jak w przypadku tarczy (por. równanie (3)), ma postać:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u} - \mathbf{T}\,\mathbf{t} = w^2\,\mathbf{M}\,\mathbf{u} \tag{9}$$

Uwzględniając podziały brzegów i podobszarów za pomocą indeksów 1, 2, 3 oraz I, II, równania drgań własnych (3) dla tarczy przyjmą postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{\mathrm{I}}_{11} & \mathbf{H}^{\mathrm{I}}_{12} & \mathbf{H}^{\mathrm{I}}_{13} \\ \mathbf{H}^{\mathrm{I}}_{21} & \mathbf{H}^{\mathrm{I}}_{22} & \mathbf{H}^{\mathrm{I}}_{23} \\ \mathbf{H}^{\mathrm{I}}_{31} & \mathbf{H}^{\mathrm{I}}_{32} & \mathbf{H}^{\mathrm{I}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\mathrm{I}}_1 \\ \mathbf{u}^{\mathrm{I}}_2 \\ \mathbf{u}^{\mathrm{I}}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{\mathrm{I}}_{11} & \mathbf{G}^{\mathrm{I}}_{12} & \mathbf{G}^{\mathrm{I}}_{13} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{I}}_{21} & \mathbf{G}^{\mathrm{I}}_{22} & \mathbf{G}^{\mathrm{I}}_{23} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{I}}_{31} & \mathbf{G}^{\mathrm{I}}_{32} & \mathbf{G}^{\mathrm{I}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{\mathrm{I}}_1 \\ \mathbf{t}^{\mathrm{I}}_2 \\ \mathbf{t}^{\mathrm{I}}_3 \end{bmatrix} = w^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\mathrm{I}}_{11} & \mathbf{M}^{\mathrm{I}}_{12} & \mathbf{M}^{\mathrm{I}}_{13} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{I}}_{21} & \mathbf{M}^{\mathrm{I}}_{22} & \mathbf{M}^{\mathrm{I}}_{23} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{I}}_{31} & \mathbf{M}^{\mathrm{I}}_{32} & \mathbf{M}^{\mathrm{I}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\mathrm{I}}_1 \\ \mathbf{u}^{\mathrm{I}}_2 \\ \mathbf{u}^{\mathrm{I}}_3 \end{bmatrix} \tag{10}$$

natomiast równania (9) dla belki mają postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathrm{II}}_{22} & \mathbf{K}^{\mathrm{II}}_{23} \\ \mathbf{K}^{\mathrm{II}}_{32} & \mathbf{K}^{\mathrm{II}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\mathrm{II}}_2 \\ \mathbf{u}^{\mathrm{II}}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{\mathrm{II}}_{22} & \mathbf{T}^{\mathrm{II}}_{23} \\ \mathbf{T}^{\mathrm{II}}_{32} & \mathbf{T}^{\mathrm{II}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{\mathrm{II}}_2 \\ \mathbf{t}^{\mathrm{II}}_3 \end{bmatrix} = w^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\mathrm{II}}_{22} & \mathbf{M}^{\mathrm{II}}_{23} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{II}}_{32} & \mathbf{M}^{\mathrm{II}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\mathrm{II}}_2 \\ \mathbf{u}^{\mathrm{II}}_3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Równania (10) i (11) dla tarczy i belki łączy się, wykorzystując następujące warunki zgodności przemieszczeń i równowagi sił na brzegu wspólnym:

$$\mathbf{u}^{\mathrm{I}}_3 = \mathbf{u}^{\mathrm{II}}_3 = \mathbf{u}^{\mathrm{I,II}}_3 \quad , \quad \mathbf{t}^{\mathrm{I}}_3 = -\mathbf{t}^{\mathrm{II}}_3 = \mathbf{t}^{\mathrm{I,II}}_3 \tag{12}$$

Po uwzględnieniu powyższych warunków, zadanych warunków brzegowych na brzegach Γ_1^{I} ($\mathbf{u}_1^{\mathrm{I}}$=0), Γ_2^{I} ($\mathbf{t}_2^{\mathrm{I}}$=0) i Γ_2^{II} ($\mathbf{t}_2^{\mathrm{II}}$=0), a także wyeliminowaniu sił brzegowych $\mathbf{t}_1^{\mathrm{I}}$ na brzegu utwierdzonym Γ_1^{I} z równań (10), otrzymuje się, podobnie jak dla tarczy jednorodnej, następujące uogólnione zagadnienie własne dla tarczy zbrojonej:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}^{\mathrm{I}}_{22} & 0 & \bar{\mathbf{H}}^{\mathrm{I}}_{23} & -\bar{\mathbf{G}}^{\mathrm{I}}_{23} \\ \bar{\mathbf{H}}^{\mathrm{I}}_{32} & 0 & \bar{\mathbf{H}}^{\mathrm{I}}_{33} & -\bar{\mathbf{G}}^{\mathrm{I}}_{33} \\ 0 & \mathbf{K}^{\mathrm{II}}_{22} & \mathbf{K}^{\mathrm{II}}_{23} & \mathbf{T}^{\mathrm{II}}_{23} \\ 0 & \mathbf{K}^{\mathrm{II}}_{32} & \mathbf{K}^{\mathrm{II}}_{33} & \mathbf{T}^{\mathrm{II}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\mathrm{I}}_2 \\ \mathbf{u}^{\mathrm{II}}_2 \\ \mathbf{u}^{\mathrm{I,II}}_3 \\ \mathbf{t}^{\mathrm{I,II}}_3 \end{bmatrix} = w^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}^{\mathrm{I}}_{22} & 0 & \bar{\mathbf{M}}^{\mathrm{I}}_{23} & 0 \\ \bar{\mathbf{M}}^{\mathrm{I}}_{32} & 0 & \bar{\mathbf{M}}^{\mathrm{I}}_{33} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^{\mathrm{II}}_{22} & \mathbf{M}^{\mathrm{II}}_{23} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^{\mathrm{II}}_{32} & \mathbf{M}^{\mathrm{II}}_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\mathrm{I}}_2 \\ \mathbf{u}^{\mathrm{II}}_2 \\ \mathbf{u}^{\mathrm{I,II}}_3 \\ \mathbf{t}^{\mathrm{I,II}}_3 \end{bmatrix} \tag{13}$$

lub zapisując w zwięzłej postaci:

$$\bar{\mathbf{H}}\,\mathbf{u} = w^2\,\bar{\mathbf{M}}\,\mathbf{u} \tag{14}$$

gdzie $\bar{\mathbf{H}}$ i $\bar{\mathbf{M}}$ są macierzami występującymi odpowiednio po lewej i prawej stronie równania (13), **u** jest wektorem przemieszczeń i sił na brzegu swobodnym i wspólnym. Górna kreska nad macierzami dotyczącymi tarczy w równaniu (13) oznacza macierze modyfikowane (w wyniku eliminacji sił w utwierdzeniu), natomiast macierze dotyczące belki pozostają bez

zmian, w stosunku do macierzy, występujących odpowiednio w równaniach (10) i (11). Uogólnione zagadnienie własne (14) transformowane jest do standardowego:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{u} = l\,\mathbf{u} \tag{15}$$

gdzie $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{H}}^{-1}\,\bar{\mathbf{M}}$, $\mathbf{u}$ jest wektorem wartości własnych, natomiast l wartością własną równania (15), która jest równa:

$$l = \frac{1}{w^2} \tag{16}$$

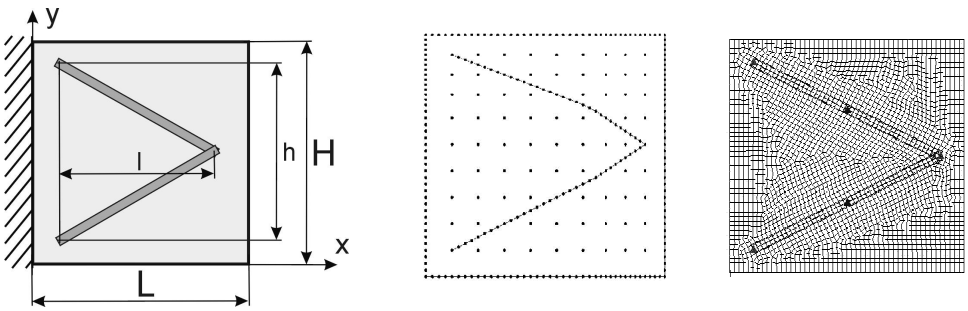
Każdej częstości drgań własnych w, wyznaczonej z powyższego równania, odpowiada jeden wektor wartości własnych, reprezentujący jedną postać drgań własnych.

3. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Zastosowanie i dokładność MEB przedstawiono, rozwiązując zagadnienie drgań własnych dla dwóch tarcz zbrojonych. Pierwszy przykład numeryczny dotyczy analizy zbrojonej tarczy wspornikowej, natomiast drugi tarczy obustronnie podpartej. Zbadano wpływ dodatkowych punktów wewnętrznych na dokładność rozwiązania. Punkty te rozmieszczone są symetrycznie w obszarach analizowanych tarcz. Układy analizowano także systemem MES Patran/Nastran. Do dyskretyzacji stosowano tarczowe czworokątne i belkowe elementy skończone. Zbadano wpływ wzmocnienia na częstotliwości drgań własnych, analizując tarcze bez zbrojenia.

3.1. Wzmocniona tarcza wspornikowa

Obie strony tarczy wspornikowej są symetrycznie wzmocnione belkami o przekroju ceowym i wymiarach 20×10×2×2 *mm*, jak pokazano na rys.2a. Wymiary tarczy wynoszą L=H=0.5 *m*, jej grubość g=0.01 *m*, a pozostałe wymiary l=h=0.4 *m*.



a) b) c)

Rys.2. Wzmocniona tarcza wspornikowa: a) warunki brzegowe, b) elementy brzegowe, c) elementy skończone

Materiał tarczy (Ω^{I}), znajdujący się w płaskim stanie naprężenia oraz belek (Ω^{II}), to odpowiednio PMMA i aluminium. Własności mechaniczne tych materiałów są następujące: moduł Younga E_I=3.3 *GPa* i E_{II}=70 *GPa*, współczynnik Poissona n_I=0.42 i n_{II}=0.34, gęstość r_I=1180 kg/m^3 i r_{II}=2700 kg/m^3.

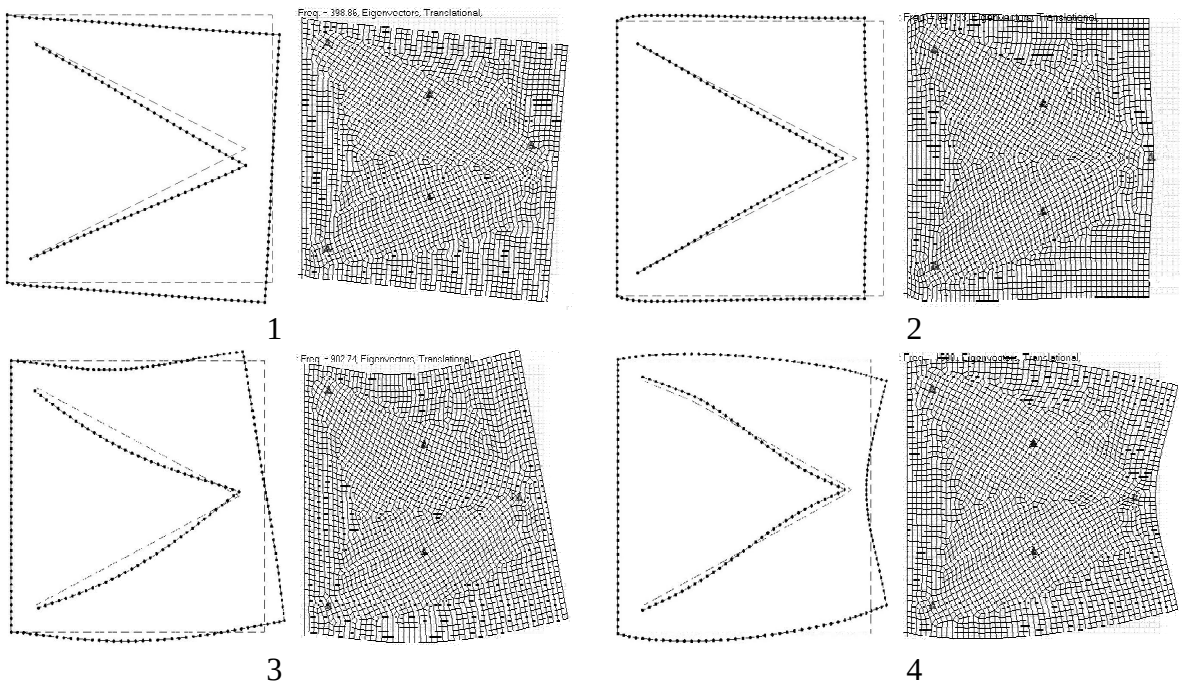
Całkowita liczba elementów brzegowych i skończonych w przypadku analizy połączoną MEB/MES wynosi odpowiednio 112 (32 elementów na brzegu wspólnym) i 64 (zob. rys.2b). Liczba punktów wewnętrznych (PW) wynosi 74 (zob. rys.2b). Całkowita liczba tarczowych i belkowych elementów w analizie MES wynosi 2604 i 90 (zob. rys.2c).

Tabela 1. Częstotliwości drgań własnych

Nr	Częstotliwość [*Hz*]			Błąd [%]	
	MES	MEB/MES - liczba PW			
		0	72	0	72
1	398.86	388.77	398.57	2.53	0.07
2	897.93	899.64	910.94	0.19	1.45
3	902.74	914.44	902.06	1.30	0.08
4	1500.0	1473.7	1501.0	1.75	0.07
5	1672.6	1751.5	1684.1	4.72	0.69

Wyniki analizy numerycznej pokazano w tabeli 1, która przedstawia pięć najniższych częstotliwości drgań własnych, wyznaczonych połączoną MEB/MES oraz MES. Można zauważyć dobrą zgodność rozwiązań, zwłaszcza gdy stosowane są dodatkowe punkty wewnętrzne. Im liczba tych punktów jest większa, tym mniejsza liczba częstotliwości zespolonych, które pojawiają się przy wyższych częstotliwościach.

Pierwsze cztery postacie drgań własnych, wyznaczone zarówno MEB/MES, jak i MES, przedstawiono na rys.3. Można zauważyć, że postacie te są identyczne.



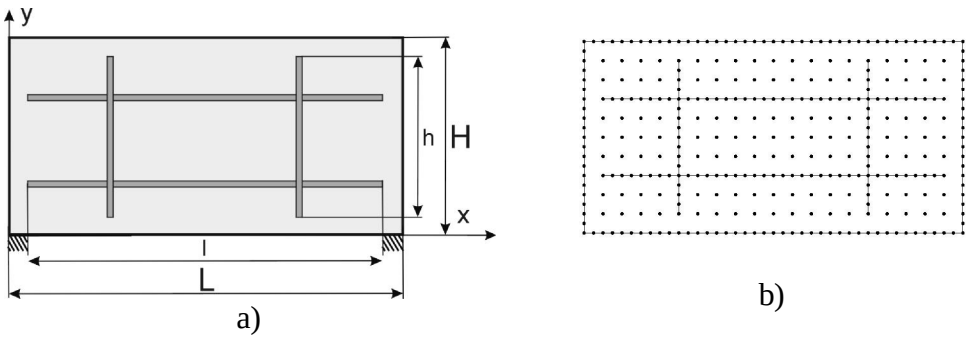
Rys.3. Cztery pierwsze postacie drgań własnych wyznaczone MEB/MES oraz MES

W przypadku rozważanej wzmocnionej tarczy uzyskano wzrost prawie wszystkich analizowanych częstotliwości drgań własnych, w porównaniu do układu bez wzmocnienia. Największy wzrost nastąpił w przypadku częstotliwości podstawowej (344.76 *Hz* dla układu bez wzmocnienia) i wyniósł ok. 16%.

3.2. Wzmocniona tarcza obustronnie podparta

Tarcza obustronnie podparta wzmocniona jest symetrycznie układem żeber, jak pokazano na rys.4a. Wymiary tarczy wynoszą L=0.1 *m*, H=0.05 *m*, a pozostałe wymiary l=0.09 *m*, h=0.04 *m*. Wzmocnieniem tarczy są płaskowniki o wymiarach 10×2 *mm*. Dłuższe boki

przekroju płaskowników są prostopadłe do płaszczyzny tarczy. Odległość między pionowymi i poziomymi belkami wynosi odpowiednio 0.05 *m* i 0.02 *m*. Długości podpór, w których odebrano przemieszczenia poziome i pionowe, wynoszą 0.005 *m*.



Rys.4. Wzmocniona tarcza obustronnie podparta: a) warunki brzegowe, b) elementy brzegowe

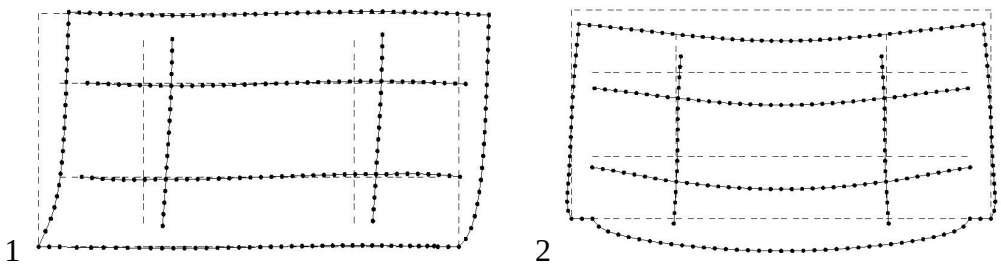
Materiał tarczy (Ω^{I}), znajdujący się w płaskim stanie odkształcenia oraz belek (Ω^{II}), to odpowiednio żywica epoksydowa i aluminium. Własności mechaniczne tych materiałów są następujące: moduł Younga E_I=4.5 *GPa* i E_{II}=70 *GPa*, współczynnik Poissona n_I=0.37 i n_{II}=0.34, gęstość r_I=1160 kg/m^3 i r_{II}=2700 kg/m^3.

Całkowita liczba elementów brzegowych i skończonych w przypadku analizy połączoną MEB/MES wynosi odpowiednio 112 (52 elementów na brzegu wspólnym) i 104 (zob. rys.4b). Liczba punktów wewnętrznych (PW) wynosi 119 (zob. rys.4b). Całkowita liczba tarczowych i belkowych elementów w analizie MES wynosi 800 i 104.

Tabela 2. Częstotliwości drgań własnych

Nr	Częstotliwość [*Hz*]			Błąd [%]	
	MES	MEB/MES - liczba PW			
		0	119	0	119
1	3182.5	3128.1	3132.0	1.71	1.57
2	3509.8	3511.2	3513.3	0.04	0.10
3	5431.0	5485.1	5490.7	1.00	1.10
4	9490.4	9498.8	9503.0	0.09	0.13
5	11255	11304	11271	0.44	0.14

Wyniki analizy numerycznej pokazano w tabeli 2, która przedstawia pięć najniższych częstotliwości drgań własnych, wyznaczonych połączoną MEB/MES oraz MES. Pierwsze dwie postacie drgań własnych, wyznaczone MEB/MES, przedstawiono na rys.5. Podobnie jak poprzednio, otrzymano dobrą zgodność częstotliwości i postaci drgań obiema metodami.



Rys.5. Dwie pierwsze postacie drgań własnych wyznaczone MEB/MES

W przypadku rozważanej wzmocnionej tarczy uzyskano zarówno wzrost, jak i spadek analizowanych częstotliwości drgań własnych, w porównaniu do układu bez wzmocnienia. Największy spadek nastąpił w przypadku częstotliwości podstawowej (3518.3 *Hz* dla układu bez wzmocnienia) i wyniósł ok. 10%.

4. WNIOSKI

W pracy przedstawiono sformułowanie i zastosowanie połączonej metody elementów brzegowych i skończonych (MEB/MES) w analizie swobodnie drgających tarcz zbrojonych. Dla analizowanych układów wyznaczono częstotliwości oraz postacie drgań własnych MEB/MES oraz MES, otrzymując bardzo dobrą zgodność rozwiązań. Metoda pozwala na zmniejszenie końcowego układu równań, w porównaniu z MES, gdyż dyskretyzacji podlega tylko brzeg zewnętrzny układu oraz linie wzdłuż żeber. Ze względu na prostotę dyskretyzacji metoda jest szczególnie odpowiednia do poszukiwania optymalnej struktury wzmocnienia.

LITERATURA

1. Albuquerque E.L., Sollero P., Fedelinski P.: Free vibration analysis of anisotropic material structures using the boundary element method. „Engineering Analysis with Boundary Elements” 2003, 27, s. 977-985.
2. Brebbia C.A., Nardini D.: Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure. „Engineering Analysis with Boundary Elements” 2000,.24, s. 513-518, [Reprinted from Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 2, No. 4, 1983, s. 228-233].
3. Dominguez J.: Boundary elements in dynamics. CMP, Southampton, 1993.
4. Fedeliński P., Górski R.: Analysis and optimization of dynamically loaded reinforced plates by the coupled boundary and finite element method. „Computer Modeling in Engineering and Science” 2006, Vol. 15, No. 1, s. 31-40.
5. Górski R., Fedeliński P.: Analiza i optymalizacja swobodnie drgających tarcz niejednorodnych. W: Pierwszy Kongres Mechaniki Polskiej. Warszawa 2007. Streszczenia referatów, (CD-ROM – 8 stron).
6. Kögl M., Gaul L.: Free vibration analysis of anisotropic solids with the boundary element method. „Engineering Analysis with Boundary Elements” 2003, 27, s. 107-114.
7. Nardini D., Brebbia C.A.: A new approach to free vibration analysis using boundary elements. „Applied Mathematical Modelling” 1983, 7, s. 15-162.

MODAL ANALYSIS OF REINFORCED PLATES BY THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

Summary. The formulation and application of the boundary element method (BEM) in analysis of freely vibrating reinforced plates is presented. The plates are analyzed by the dual reciprocity BEM and reinforcement by the finite element method (FEM). Numerical examples are shown and frequencies and mode shapes, computed for the reinforced plates by the BEM, are compared with the FEM solutions, showing a good agreement of the results.