ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: Automatyka z.44 Nr kol. 580

Wiesław Pierzchała
Politechnika Krakowska

# HEURYSTYCZNE METODY OPTYMALIZACJI HARMONOGRAMÓW W DYSKRETNYCH PROCESACH PRZEMYSŁOWYCH

Streszczenie. W referacie porównano skuteczność wybranych, prostych heurystyk, dających suboptymalne rozwiązania problemu harmonogramowania i zaproponowano metodę heurystyczną dającą najlepsze (statystycznie) wyniki.

## 1. Wstęp

Organizacja i sterowanie w współczesnych systemach produkcyjnych wymagają rozwiązywania najrozmaitszych, niejednokrotnie bardzo trudnych i złożonych problemów optymalizacyjnych. Do najistotniejszych i często spotykanych w praktyce należy problem harmonogramowania dyskretnych procesów przemysłowych, postawiony przez S.M. Johnsona /13/, który podał również rozwiązanie dla dwóch stanowisk. W przypadku ogólnym problem ten dotychczas nie został rozwiązany, a obserwowany postęp metodyczny dotyczy najrozmaitszych przypadków szczególnych.

## 2. Sformułowanie założeń i modelu matematycznego

Rozważamy dyskretny proces wytwarzania n przedmiotów na m stanowiskach. Proces ten określony jest przez:

- zbiór przedmiotów $P = \{p_1, \dots, p_n\}$
- uporządkowany zbiór stanowisk $S = \{s_1, \dots, s_m\}$
- macierz $t(p_i, s_j)$ $(i=1,2,\dots,n\ ;\ j=1,2,\dots,m)$ zawierającą czasy jednostkowe operacji na stanowisku $s_j$ w procesie technologicznym przedmiotu $p_i$

przy czym obowiązują następujące założenia:

1. Procesy technologiczne wszystkich przedmiotów wymagają użycia tych samych stanowisk w tej samej kolejności, a więc nie ma "powrotów" na to samo stanowisko, jakkolwiek dopuszczalne jest opuszczanie pewnych stanowisk.
2. Zarówno czas przerw międzyoperacyjnych jak i czasy przygotowawczo-zakończeniowe są sobie równe lub pomijalnie małe i nie będą uwzględniane.
3. Żaden z przedmiotów i żadne ze stanowisk nie są pod jakimkolwiek względem uprzywilejowane.
4. Operacja rozpoczęta nie może być przerywana.
5. Na żadnym stanowisku nie można obrabiać jednocześnie kilku przedmiotów, a każdy przedmiot może się znajdować w danej chwili co najwyżej na jednym stanowisku.

Typową funkcją celu w optymalizacji harmonogramu takiego procesu jest minimalizacja czasu cyklu produkcyjnego wszystkich przedmiotów. W literaturze /np. 1 - 18/ znaleźć można szereg, proponowanych przez różnych autorów metod rozwiązywania problemu harmonogramowania (ustalania kolejności robót). Na ogół pozwalają one uzyskać tylko rozwiązanie suboptymalne, co wynika z przyjętych założeń upraszczających, metodyki postępowania, bądź też z jednego i drugiego jednocześnie.

Zadanie harmonogramowania sprowadza się w zasadzie do ustalenia kolejności obróbki przedmiotów na każdym ze stanowisk, a sam harmonogram jest już naturalną tego konsekwencją.
Rozwiązanie optymalne jest jednym z $(n!)^{m-2}$ możliwych rozwiązań problemu.[1]
W zasadzie wszystkie proponowane w literaturze metody dotyczą problemu harmonogramowania uproszczonego dodatkowym bardzo istotnym założeniem, że raz ustalona kolejność obowiązuje na wszystkich stanowiskach od pierwszego do ostatniego. Rozwiązanie optymalne, uzyskane przy takim założeniu, z reguły jest suboptymalnym rozwiązaniem zadania.
Prócz wymienionych, przyjmijmy następujące oznaczenia:

K - k elementowy podzbiór P

$\sigma_k$ - ustalona kolejność k przedmiotów /$k \leq n$/ należących do zbioru K. Odrzucając przedmiot ostatni otrzymujemy kolejność $\sigma_{k-1}$

$p_i(\sigma_k)$ - i - ty /$i \leq k$/ przedmiot w zbiorze K uporządkowanym wg kolejności $\sigma_k$; w konsekwencji $p_n(\sigma_n)$ oznacza przedmiot, który ma być wykonywany jako ostatni.

$T(\sigma_k, s_j)$ - "częściowy" czas cyklu produkcyjnego k przedmiotów na stanowiskach od pierwszego do j-tego, przy ustalonej kolejności obróbki $\sigma_k$.

Obróbkę przedmiotu $p_k(\sigma_k)$ /ostatniego w zbiorze K uporządkowanym wg kolejności $\sigma_k$ / na stanowisku $s_j$, można rozpocząć wtedy, gdy zakończono jego obróbkę na stanowisku poprzednim $s_{j-1}$, a stanowisko $s_j$ opuścił już przedmiot, który go poprzedzał $p_{k-1}(\sigma_{k-1})$. Dodając więc do późniejszego z tych terminów czas trwania operacji na stanowisku $s_j$ dla przedmiotu $p_k(\sigma_k)$ otrzymamy "częściowy" czas cyklu produkcyjnego $T(\sigma_k, s_j)$.

Jest to wyrażone wzorem:

$$T(\sigma_k, s_j) = \max\{T(\sigma_{k-1}, s_j), T(\sigma_k, s_{j-1})\} + t(p_k(\sigma_k), s_j)$$

dla k = 1, 2, ..., n  j = 1,2,...,m

Aby wzór powyższy był formalnie poprawny, należy umownie przyjąć, że:

$$\bigwedge_{s_j \in S} \left(T(\sigma_0, s_j)\right) = 0, \qquad \text{oraz}$$

$$\bigwedge_{k \neq 0} \left(T(\sigma_k, s_0)\right) = 0 .$$

Czas cyklu produkcyjnego n przedmiotów określony jest następująco:

$$1/ \quad T(\sigma_n, s_m) = \max\{T(\sigma_{n-1}, s_m), T(\sigma_n, s_{m-1})\} + t(p_n(\sigma_n), s_m)$$

Zadanie nasze polega na znalezieniu takiego $\sigma_n^*$, aby $T^*(\sigma_n^*, s_m)$ przyjęło wartość możliwie najmniejszą.

## 3. Heurystyczne metody rozwiązywania problemu

W problemach optymalizacji struktur układów i procesów o dużej złożoności można zauważyć ogólną tendencję, polegającą na poszukiwaniu możliwie prostych, skutecznych heurystyk, dających rozwiązania, lub lepiej zbiory rozwiązań możliwie bliskich rozwiązaniom optymalnym. /4/

1/ B.Roy /16/ udowodnił, że w rozwiązaniu optymalnym kolejność przedmiotów na pierwszych dwóch i ostatnich dwóch stanowiskach nie powinna się zmieniać.

D. S. Palmer [15] sugeruje cztery bardzo proste heurystyki odnoszące się do naszego zadania.

1. Ustalić kolejność przedmiotów wg rosnących czasów ich pierwszych operacji $t(p_i, s_1)$.
2. Ustalić kolejność przedmiotów wg malejących wartości różnic czasów ostatniej i pierwszej operacji $t(p_i, s_m) - t(p_i, s_1)$.
3. Ustalić kolejność przedmiotów wg malejących czasów ich ostatnich operacji $t(p_i, s_m)$.
4. Ustalić kolejność przedmiotów wg rosnących wartości wyrażeń

$$\frac{t(p_i, s_m) - t(p_i, s_1)}{\sum_{j=1}^{m} t(p_i, s_j)} .$$

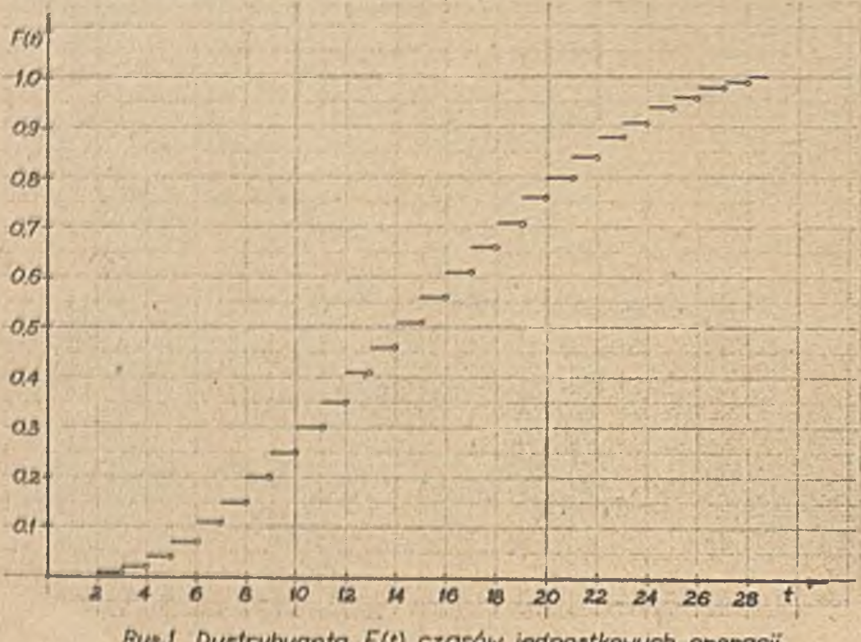
Wymienione heurystyki poddano eksperymentowi symulacyjnemu mającemu wykazać ich skuteczność. W trakcie badań autor poddał próbom kilka innych nasuwających się i intuicyjnie uzasadnionych heurystyk. Ponieważ w referacie ograniczono się do heurystyk najlepszych, uwzględniono tylko wyniki dla heurystyki, której przyporządkowano numer 5. Formalnie wyglądała ona następująco:

5. Ustalić kolejność przedmiotów wg rosnących wartości wyrażeń:

$$\sum_{j=1}^{m-1} j\left(\max\{0, (t(p_i, s_j) - t(p_i, s_{j+1})\}\right)$$

## 4. Opis eksperymentu

Wielkości n i m określające wymiary problemu przyjmowały wartości 5,10,15 we wszelkich możliwych kombinacjach. Czasy jednostkowe operacji były całkowitymi liczbami przypadkowymi z przedziału $\langle 2, 28 \rangle$, generowanymi wg rozkładu opisanego dystrybuantą empiryczną F /t/, otrzymaną na podstawie analizy wybranych procesów technologicznych części maszyn /rys.1/




Rys.1 Dystrybuanta F(t) czasów jednostkowych operacji

| Wymiary problemu $n \times m$ | Por. Heur. | $I$ | $W$ | $W_{sr}$ | Wymiary problemu $n \times m$ | Por. Heur. | $I$ | $W$ | $W_{sr}$ | Wymiary problemu $n \times m$ | Por. Heur. | $I$ | $W$ | $W_{sr}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15×15 | 5 | 181 | 12.54 | 0.069 | 15×10 | 5 | 189 | 17.16 | 0.091 | 15 × 5 | 5 | 198 | 27.21 | 0.137 |
| | 4 | 18 | 0.32 | 0.018 | | 4 | 10 | 0.25 | 0.025 | | 4 | 1 | 0.01 | 0.01 |
| | 3 | 133 | 5.71 | 0.043 | | 3 | 131 | 6.57 | 0.050 | | 3 | 131 | 6.70 | 0.051 |
| | 5 | 64 | 1.71 | 0.027 | | 5 | 61 | 1.82 | 0.030 | | 5 | 61 | 2.20 | 0.036 |
| | 1 | 95 | 3.33 | 0.035 | | 1 | 101 | 3.92 | 0.039 | | 1 | 103 | 4.32 | 0.042 |
| | 3 | 99 | 3.56 | 0.035 | | 3 | 96 | 3.70 | 0.039 | | 3 | 92 | 3.90 | 0.042 |
| | 2 | 129 | 4.81 | 0.037 | | 2 | 125 | 5.11 | 0.041 | | 2 | 151 | 7.65 | 0.051 |
| | 1 | 66 | 2.09 | 0.032 | | 1 | 67 | 1.63 | 0.024 | | 1 | 41 | 1.03 | 0.025 |
| | 6[1] | 163 | 7.63 | 0.047 | | 6 | 152 | 6.69 | 0.044 | | 6 | 101 | 3.24 | 0.032 |
| | 2 | 36 | 0.71 | 0.020 | | 2 | 44 | 1.02 | 0.023 | | 2 | 59 | 1.36 | 0.023 |
| 10×15 | 5 | 171 | 11.47 | 0.067 | 10×10 | 5 | 181 | 16.04 | 0.089 | 10 × 5 | 5 | 184 | 26.48 | 0.144 |
| | 4 | 28 | 0.76 | 0.027 | | 4 | 15 | 0.32 | 0.021 | | 4 | 14 | 0.34 | 0.024 |
| | 3 | 128 | 5.91 | 0.046 | | 3 | 124 | 6.76 | 0.055 | | 3 | 133 | 7.36 | 0.055 |
| | 5 | 66 | 1.77 | 0.027 | | 5 | 67 | 2.38 | 0.035 | | 5 | 56 | 2.15 | 0.038 |
| | 1 | 101 | 3.78 | 0.037 | | 1 | 101 | 4.38 | 0.043 | | 1 | 90 | 4.36 | 0.048 |
| | 3 | 97 | 3.10 | 0.032 | | 3 | 97 | 4.30 | 0.044 | | 3 | 105 | 5.70 | 0.054 |
| | 2 | 115 | 3.95 | 0.034 | | 2 | 116 | 5.39 | 0.046 | | 2 | 137 | 8.53 | 0.062 |
| | 1 | 78 | 2.33 | 0.030 | | 1 | 77 | 2.28 | 0.030 | | 1 | 47 | 1.43 | 0.030 |
| | 6 | 148 | 6.61 | 0.045 | | 6 | 138 | 5.65 | 0.041 | | 6 | 85 | 2.78 | 0.033 |
| | 2 | 46 | 1.13 | 0.025 | | 2 | 55 | 1.37 | 0.025 | | 2 | 56 | 1.18 | 0.021 |
| 5×15 | 5 | 157 | 10.75 | 0.068 | 5×10 | 5 | 168 | 13.44 | 0.080 | 5 × 5 | 5 | 177 | 22.71 | 0.128 |
| | 4 | 43 | 1.31 | 0.030 | | 4 | 31 | 1.03 | 0.033 | | 4 | 16 | 0.74 | 0.041 |
| | 3 | 95 | 4.18 | 0.044 | | 3 | 119 | 6.41 | 0.054 | | 3 | 97 | 6.09 | 0.062 |
| | 5 | 83 | 2.42 | 0.029 | | 5 | 54 | 2.34 | 0.043 | | 5 | 68 | 3.39 | 0.050 |
| | 1 | 101 | 3.74 | 0.037 | | 1 | 96 | 4.93 | 0.051 | | 1 | 87 | 4.92 | 0.057 |
| | 3 | 90 | 3.76 | 0.042 | | 3 | 94 | 4.22 | 0.044 | | 3 | 101 | 5.62 | 0.056 |
| | 2 | 88 | 3.02 | 0.034 | | 2 | 92 | 4.70 | 0.051 | | 2 | 106 | 5.96 | 0.056 |
| | 1 | 78 | 1.95 | 0.025 | | 1 | 74 | 2.67 | 0.036 | | 1 | 45 | 1.63 | 0.041 |
| | 6 | 140 | 6.42 | 0.046 | | 6 | 110 | 5.98 | 0.054 | | 6 | 62 | 3.09 | 0.050 |
| | 2 | 42 | 0.79 | 0.019 | | 2 | 61 | 1.55 | 0.025 | | 2 | 44 | 1.42 | 0.032 |

Tab.1 Wyniki porównania heurystyk.

[1] Heurystyka 6 zostanie opisana w p.6.

Porównywano heurystyki parami od najmniej do najbardziej skutecznych w dwustu próbach dla każdego wymiaru problemu $(n \times m)$. Obliczenia wykonano na maszynie cyfrowej CYBER 72. Wyniki przedstawiono w Tab.1.

O skuteczności każdej z badanych heurystyk wnioskować można z trzech wymienionych tam wielkości:

I – ilość przypadków, w których dana heurystyka była lepsza

W – suma ułamków postaci

$$\frac{|T(\sigma_n^1, s_m) - T(\sigma_n^2, s_m)|}{\min\{T(\sigma_n^1, s_m), T(\sigma_n^2, s_m)\}}$$

wpisywanych po stronie heurystyki dającej wynik lepszy, gdzie $\sigma_n^1, \sigma_n^2$ – kolejności przedmiotów uzyskane z porównywanych heurystyk

$W_{\acute{s}r}$ wartość średnia W.

## 5. Wyniki eksperymentu

Wyniki wskazują na całkowitą nieprzydatność heurystyki 4. Heurystyka 5 prawie zawsze lepsza jest od czwartej, jednakże i tak znacznie ustępuje pozostałym. Pierwszą i trzecią uznać można za mniej więcej równorzędne. Heurystyka 2, będąca swego rodzaju połączeniem dwu poprzednich dawała najlepsze /statystycznie/ rezultaty.

## 6. Propozycja nowej procedury heurystycznej

Wyróżniająca się skuteczność drugiej heurystyki Palmera, szczególnie w aspekcie dobrych wyników dla pierwszej i trzeciej, nasunęły możliwość skonstruowania nowej procedury heurystycznej, która pozwalałaby na uwzględnianie czasów jednostkowych pozostałych operacji /nie tylko pierwszej i ostatniej/. Przeprowadzone badania pozwalają zaproponować następujące postępowanie /heurystyka 6/:

Ustalić kolejność przedmiotów wg malejących wartości wyrażeń:

5/ $$\sum_{k=1}^{v} A_k \left(t(p_i, s_{m-k+1}) - t(p_i, s_k)\right)$$ gdzie:

6/ $$A_k = 1 - a(k-1) \qquad k = 1, 2, \ldots, v$$

7/ $$v = \mathrm{Entier}\,(0{,}5\,m)$$

Współczynnik a zależy od m i należy go odczytywać z Tab.2

| m | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0,75 | 0,60 | 0,45 | 0,40 | 0,30 | 0,25 | 0,20 | 0,15 | 0,15 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,10 |

Tab.2

Porównanie heurystyki 6 z drugą heurystyką Palmera /poprzednio najskuteczniejszą/ przedstawiono również w Tab.1. Wyniki przemawiają zdecydowanie na korzyść procedury proponowanej.

## 7. Zakończenie

Wymienione, bardzo proste metody heurystyczne pozwalają uzyskać w pełni zadowalające rozwiązania zadania harmonogramowania. Rozwiązywanie problemu sprowadza się do wykonania pewnej ilości elementarnych, odręcznych obliczeń.

Stwierdzono, że praktycznie zawsze, co najmniej jedna z badanych heurystyk daje rozwiązanie bardzo zbliżone, lub nawet identyczne z rozwiązaniem *optymalnym*, wyznaczonym np. metodą podziału i ograniczeń.

Najlepsze rozwiązania uzyskane heurystycznie w stosunkowo łatwy sposób,są średnio w granicach 2,7 - 5,1% gorsze / przy współczynniku ufności 0,997/ od rozwiązań optymalnych.
Przeszukiwanie zbioru możliwych rozwiązań zadania / o mocy jak wiadomo n!/, można ograniczyć z dużymi - co warto podkreślić - szansami powodzenia, do zbadania czterech możliwości, odpowiadających kolejnościom wynikającym z heurystyk 1,2,3,6.
Zdecydowanie najlepsze statystycznie wyniki daje heurystyka proponowana / 6/, jednakże warto zalecić sprawdzenie rezultatów wynikających z pozostałych wymienionych procedur.

Należy nadmienić, że przyjęta w modelu funkcja celu i założenia upraszczające mogą budzić zastrzeżenia i wątpliwości.
Prowadzone aktualnie prace mają na celu sformułowanie kryterium optymalizacji możliwie bliskiego realnym warunkom praktyki produkcyjnej, oraz pominięcie przynajmniej niektórych założeń, szczególnie trudnych do spełnienia.-

## LITERATURA

[1] ASHOUR S. /1970/ - A Branch and Bound Algorithm for Flow-Shop Scheduling Problems. AIIE TRANS,2, 172-176.
[2] BAKER K.R. /1975/ -A Comparative Study of Flow-Shop Algorithms. Opns. Res. vol. 23, 62-73.
[3] BAKER K.R. /1974/ - Introduction to Sequencing and Scheduling. Wiley, New York, 1974.
[4] BAKSHI M.S. ARORA S.R./1969/ - The Sequencing Problem. Manag. Science vol.15,4.
[5] BESTWICK P.F. HASTINGS N.A.J./1976/ - A New Bound for Machine Scheduling. Opnal. Res. Qart. 27, 2,ii,479-487.
[6] BONEY M.C. GUNDRY S.W./1976/ - Solutions to the Constrained Flow-Shop Sequencing Problem. Opnal. Res. Qart. vol.27,4,i,869-883.
[7] BROWN A.P. LOMNICKI Z.A./1966/-Some Applications of the Branch-and-Bound Algorithms to the Machine Scheduling Problem. Opnal. Res. Quart. vol. 17,2,173.
[8] CAMPBELL H.G. DUDEK R.A. SMITH M.L. /1970/- A Heuristic Algorithm for the n-Job, m-Machine Sequencing Problem. Manag. Science vol. 16, 630.
[9] CHARLTON J.H. DEATH C.C./1970/-Method of Solution for General Machine Scheduling Problems. Opns. Res. vol. 18, 4, 689.
[10] GUPTA J.N.D. /1971/ - A Functional Heuristic Algorithm for the Flow-Shop Scheduling Problem. Opnal. Res. Quart. vol. 22,1.
[11] GUPTA J.N.D. /1971/ - An Improved Combinatorial Algorithm for the Flow-Shop Scheduling Problem. Opns. Res. vol 19, 1753-1758 i "Errata" Opns. Res. vol. 24,4 /1976/.
[12] IGNALL E. SCHRAGE L. /1965/- Application of the Branch-and-Bound Technique to some Flow-Shop Scheduling Problems. Opns. Res. vol. 13,3,400-412.
[13] JOHNSON S.M. /1954/ - Optimal Two-and Three-Stage Production Schedules with Set up Times Included. Naval Res. Log. Quart. vol. 1,61-68.

[14] Mc MAHON G.B. BURTON P.G./1967/ - Flow-Shop Scheduling with the Branch-and-Bound Method. Opns. Res. vol.15,3,473-481.
[15] PALMER D.S. /1965/ - Sequencing Jobs Through a Multi-Stage Process in the Minimum Total Time - A Quick Method of Obtaining a Near Optimum. Opnal. Res. Quart. vol.16,101.
[16] ROY B. - Cheminement et connexitée dans les graphes. Application aux problemes d'ordonnancement. METRA Série Speçiale No 1, Sociéte d'economie et de mathematique appliquées, Paris 1962.
[17] SMITH R.D. DUDEK R.A. /1967/- A General Algorithm for Solution of the n-Job, m-Machine Sequencing Problem of the Flow-Shop. Opns. Res. vol.15,71-78 i "Errata" Opns. Res. vol.17,756 /1969/.
[18] SZWARC W. /1971/ - Elimination Methods in the mxn Sequencing Problem. Naval Res. log. Quart. vol. 18,295-305.

## HEURISTIC METHODS FOR THE SCHEDULING OF OPTIMIZATION IN DISCRETE INDUSTRIAL PROCESSES

S u m m a r y

The paper compares the effectiveness of some simple heuristics giving a sub-optimal solution to the scheduling problem. A method giving statistically the best scheduling has been proposed.

## ЕВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМАЛИЗАЦИИ ГРАФИКОВ РАБОТ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Р е з ю м е

В работе даётся сравнение мощностей избранных простых евристик, дающих субобтимальное решение для проблеммы определения графиков работ. Предлагается евристический метод, дающих статистически наилучшее решение.