ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: Automatyka z.44 Nr kol. 580

Tadeusz Sawik
Akademia Górniczo-Hutnicza

STEROWANIE OPTYMALNE HARMONOGRAMEM PRODUKCJI O WIELU URZĄDZENIACH I WIELU WYROBACH

Streszczenie. Zadanie optymalizacji harmonogramu wieloopera-cyjnego procesu produkcji sformułowano jako problem sterowania czasowo-optymalnego z całkowitoliczbową dziedziną sterowania i nierównościowymi ograniczeniami współrzędnych stanu. Podano pewne własności harmonogramu czasowo-optymalnego oraz algorytm jego wyznaczania. Całość rozważań zilustrowano przykładem liczbowym.

1. Wstęp

Jednym z najważniejszych i zarazem najbardziej skomplikowanym zadaniem planowania i sterowania produkcji jest wyznaczenie harmonogramu produkcji, zwanego również planem kalendarzowym produkcji. Określa on dla każdego urządzenia produkcyjnego kolejność wykonywania poszczególnych operacji technologicznych, precyzując jednocześnie czas kalendarzowy rozpoczęcia i zakończenia ich wykonywania. Innymi słowy, harmonogram produkcji określa w każdym momencie czasu objętego planowaniem okresu, rozdział wszystkich urządzeń pomiędzy poszczególne operacje. Optymalny harmonogram powinien ponadto zapewniać minimum globalnego czasu wykonywania zadań produkcyjnych, gdyż jest to chyba najbardziej obiektywne i zarazem najczęściej przyjmowane kryterium jego optymalności.

W pracy rozważono problem optymalizacji harmonogramu produkcji o M urządzeniach i N wyrobach. Wprowadzając pojęcia sterowania, stanu i wyjścia systemu produkcji i magazynowania przedstawiono model matematyczny zadania. Sformułowano je jako problem sterowania czasowo-optymalnego [1,2,3,4] z całkowitoliczbową dziedziną sterowania, zadanym stanem końcowym reprezentującym plan produkcji oraz ograniczeniami stanu uwzględniającymi strukturę technologiczną procesu produkcji i skończone pojemności magazynów wyrobów. Pokażemy, że przy takim sformułowaniu problemu, harmonogram produkcji reprezentowany jest przez sterowanie będące przedziałami stałą , wektorową funkcją czasu o całkowitoliczbowych współrzędnych. Określa ona rozdział urządzeń pomiędzy poszczególne wyroby (operacje) w każdym momencie objętego planowaniem okresu czasu. Podamy pewne własności harmonogramu czasowo-optymalnego oraz algorytm jego wyznaczania, a całość rozważań zilustrujemy przykładem liczbowym.

2. MODEL MATEMATYCZNY ZADANIA STEROWANIA OPTYMALNEGO HARMONOGRAMEM PRODUKCJI

Na wstępie przyjmiemy następujące założenia dotyczące własności rozważa-

nego systemu produkcji i magazynowania:

1) Każdej operacji odpowiada jeden i tylko jeden rodzaj wyrobu (półwyrobu lub wyrobu finalnego) otrzymywanego w wyniku jej zastosowania.

2) Na jednym urządzeniu nie można jednocześnie wykonywać więcej niż jedną operację.

3) Każda pojedyncza operacja jest w całości i bez przerywania wykonywana na jednym urządzeniu.

4) Okres planowania składa się ze skończonej liczby okresów produkcyjnych w każdym z których rozdział urządzeń pomiędzy operacje jest stały.

5) Przezbrojenia urządzeń, związane ze zmianą rozdziału urządzeń pomiędzy operacje, dokonywane są między okresami produkcyjnymi.

6) Dla wszystkich operacji i odpowiadających im urządzeń, jednostkowe czasy wykonywania (czasy konieczne do wykonania jednostki wyrobu) są jednakowe i równe umownej jednostce czasu.

Z założenia 6 wynika ponadto, że:

7) Dla każdego okresu produkcyjnego, półwyroby wytworzone w jego ostatniej jednostce czasu nie mogą być poddawane kolejnym operacjom w tym okresie.

Uwzględniając powyższe założenia przedstawimy obecnie model matematyczny problemu optymalizacji harmonogramu produkcji. Wyróżnione w nim zostaną następujące elementy:

- Struktura technologiczna procesu produkcji,
- Struktura zasobów produkcyjnych,
- Równania stanu, równania wyjścia i ograniczenia.

2.1. Struktura technologiczna procesu produkcji

Przyjmiemy, że proces produkcji tworzy zespół wzajemnie powiązanych ciągów technologicznych operacji, w którym można łącznie wyróżnić N rodzajów operacji. Strukturę technologiczną procesu i wynikającą z niej dopuszczalną kolejność wykonywania operacji odwzorujemy za pomocą acyklicznego, skierowanego grafu $G(I,L)$, gdzie $I = \{i: i=1,\dots,N\}$ - jest zbiorem wierzchołków, natomiast $L = \{(i,j): i \in I, j \in I\}$ - zbiorem skierowanych krawędzi grafu. Wierzchołki grafu odpowiadają operacjom, a skierowane krawędzie (łuki) pomiędzy parami wierzchołków wskazują na kolejność wykonywania bezpośrednio po sobie następujących operacji technologicznych, reprezentowanych tymi wierzchołkami. Na grafie G zdefiniujemy macierz $C = [c_{ij}]$, $i \in I$, $j \in I$ - bezpośrednich zapotrzebowań jednostkowych na produkowane półwyroby, gdzie niezerowy element c_{ij} określa bezpośrednie jednostkowe zużycie półwyrobu i podczas wykonywania operacji j. Łukowi skierowanemu od wierzchołka i, $i \in I$ do wierzchołka j, $j \in I$ możemy więc przyporządkować element c_{ij} macierzy C.

2.2. Struktura zasobów produkcyjnych

Potencjał produkcyjny systemu produkcji tworzy M, $(M < N)$ różnych urządzeń produkcyjnych, z których na każdym można kolejno wykonywać pewną liczbę różnych operacji, jednak nie więcej niż jedną w każdym momencie czasu. Dopuszczalne połączenia operacji i urządzeń przedstawimy za pomocą zero-jedynkowej macierzy Q:

$$Q = [q_{ij}], \quad i \in I, \; j \in J, \tag{1}$$

gdzie:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 - \text{jeżeli operację } i \text{ można wykonywać na urządzeniu } j, \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$I = \{1,\dots,N\}$ - jest zbiorem numerów wszystkich operacji,

$J = \{1,\dots,M\}$ - jest zbiorem numerów wszystkich urządzeń.

W oparciu o macierz Q możemy wyznaczyć skończony zbiór $U \subset R^N$, wszystkich dopuszczalnych rozdziałów urządzeń pomiędzy operacje. Oznaczmy w tym celu przez:

$J \supseteq J_{mr}$ - m-elementowy podzbiór numerów urządzeń, tzn. $|J_{mr}| = m, \forall r = 1,\dots,\binom{M}{m}$; $m = 1,\dots,M$, przy czym $|\cdot|$ - oznacza liczbę elementów zbioru skończonego (moc zbioru),

$I \supseteq I_{mr}$ - największy podzbiór numerów operacji, każda z których może być wykonywana jedynie na urządzeniach (nie koniecznie wszystkich) z podzbioru J_{mr}:

$$I_{mr} = \left\{ i:\ q_{ij} = 0\ \forall j \notin J_{mr} \right\} \tag{2}$$

Skończony zbiór U dopuszczalnych rozdziałów urządzeń pomiędzy operacje możemy obecnie przedstawić w postaci:

$$U = \left\{ u \in R^N:\ 0 \leqslant u_i \leqslant \sum_{j=1}^{M} q_{ij} = m_i,\ i \in I;\ u_i \text{ - całkowitoliczbowe},\ \sum_{i \in I_{mr}} u_i \leqslant m,\ m=1,\dots,M;\ r=1,\dots,\binom{M}{m} \right\}, \tag{3}$$

gdzie współrzędna u_i wektora $u \in U$ rozdziału urządzeń jest liczbą urządzeń przydzielonych do wykonywania i-tej operacji.

Maksymalna liczba nierówności określających zbiór U (3), wynosi $(N + 2^M - 1)$. Jednak w wielu praktycznych przypadkach struktura macierzy Q (1) powoduje, że nie każdemu podzbiorowi J_{mr} odpowiada niepusty podzbiór I_{mr} (2) tak, że faktyczna liczba tych nierówności często jest znacznie mniejsza.

2.3. Równania stanu, równania wyjścia i ograniczenia

Harmonogram produkcji przedstawimy w postaci ciągu $\{(u^1,h_1),\dots,(u^T,h_T)\}$ T par (u^t,h_t), $t=1,\dots,T$, wektorów $u^t \in U$ rozdziału urządzeń oraz długości h_t odpowiadających im okresów produkcyjnych. Wszystkie te wielkości należy traktować jako niewiadome, których wyznaczenie jest celem naszych rozważań.

Stan x^t oraz wyjście y^t procesu produkcji na końcu każdego t-tego okresu zdefiniujemy jako ciągi: $x^t = [x_1^t,\dots,x_N^t]$, $y^t = [y_1^t,\dots,y_N^t]$, gdzie x_i^t, $(i=1,\dots,N)$ oznacza liczbę jednostek i-tego wyrobu, wyprodukowanych w ciągu t pierwszych okresów czasu, natomiast y_i^t - zmagazynowane zapasy i-tego wyrobu na początku (t+1)-go okresu. Uwzględniając założenia 1 i 6, zgodnie z którymi liczba wyprodukowanych jednostek każdego wyrobu jest równa liczbie jednostek czasu maszynowego pracy urządzeń przy jego produkcji, wielkości x_i^t, y_i^t będziemy wyrażać w tych ostatnich jednostkach.

Równania stanu i równania wyjścia mają postać:

$$x^t = x^{t-1} + h_t u^t,\ t=1,\dots \tag{4}$$

$$y^t = (I - C)x^t, \quad t=1,\dots,T \tag{5}$$

gdzie: h_t, u_i^t, x_i^t, y_i^t, $(i=1,\dots,N)$ - wielkości całkowitoliczbowe, przy czym $h_t \geqslant 1$, $u^t \in U$. I - macierz identycznościowa.

Ponadto, $x^0 = 0 \in R^N$, $x^T = x^f$, gdzie $x^f = [x_1^f,\dots,x_N^f]$ oznacza zadany plan produkcji, przy czym x_i^f jest liczbą jednostek czasu maszynowego pracy urządzeń przy wykonywaniu i-tej operacji, konieczną do wykonania zadania produkcyjnego ze względu na i-ty wyrób.

Zadania produkcyjne dotyczące poszczególnych półwyrobów wyznacza się na podstawie planu produkcji wyrobów finalnych, korzystając z zależności:

$$x_i^f = \sum_{j>i} c_{ij} x_j^f \, . \tag{6}$$

Z założeń 2 i 7 wynikają następujące dodatkowe ograniczenia:

$$u^t \leqslant x^f - x^{t-1}, \quad t=1,\dots,T \tag{7}$$

$$Ch_t u^t \leqslant y^{t-1} + (h_t - 1)u^t, \quad t=1,\dots,T \, , \tag{8}$$

przy czym ostatnie z nich jest równoważne ograniczeniu:

$$(C - I)x^t \leqslant u^t, \quad t=1,\dots,T \tag{9}$$

Ponadto należy wprowadzić ograniczenia uwzględniające skończone pojemności a_i, $(i=1,\dots,N)$ magazynów wyrobów:

$$y_i^t \leqslant a_i, \quad i=1,\dots,N \; ; \; t=1,\dots,T \tag{10}$$

3. MINIMALNY CZAS WYKONYWANIA ZADAŃ PRODUKCYJNYCH

Jeśliby w procesie technologicznym nie występowały operacje zależne (C byłaby macierzą zerową), wówczas minimalny czas wykonywania planu produkcji x^f byłby równy [1,2,4]:

$$t_f^* = \max\left(\max_i \frac{x_i^f}{m_i}, \max_{I_{mr}} \frac{\sum_{i \in I_{mr}} x_i^f}{m}\right) = \frac{\sum_{i \in I^*} x_i^f}{m^*} \, , \tag{11}$$

gdzie:

$I \supseteq I^*$ - najmniejszy podzbiór numerów operacji, których łączne zadanie produkcyjne wymaga najdłuższego czasu wykonywania (t_f^*),

$J \supseteq J_{m^*}$ - m^*-elementowy podzbiór numerów urządzeń odpowiadający podzbiorowi I^*. Jeżeli $I^* = \{i^*\}$, (I^* - zbiór 1-elementowy), wówczas $m^* = m_{i^*}$, a $J_{m^*} = \{j: q_{i^*j} = 1\}$.

W przypadku dowolnej struktury technologicznej procesu produkcji (graf G(I,C) z niezerową macierzą C), przy przyjętych w pracy założeniach można wykazać, że minimalny czas T_f^* wykonywania planu produkcji x^f dany jest wyrażeniem:

$$T_f^* = \begin{cases} t_f^* & \text{- jeżeli } I^* = I, \; (m^* = M) \\ t_f^* + 1 & \text{- jeżeli } I^* \neq I, \; (m^* < M) \end{cases} \tag{12}$$

Z powyższych rozważań wynikają następujące dodatkowe ograniczenia stanu (warunki optymalności) czasowo-optymalnego procesu produkcji [1,2]:

$$x_i^f - x_i^t \leqslant m_i(T_f^* - \sum_{k=1}^{t} h_k),\ i=1,\dots,N\ ;\ t=1,\dots,T$$

$$\sum_{i\in I_{mr}} (x_i^f - x_i^t) \leqslant m(T_f^* - \sum_{k=1}^{t} h_k),\ m=1,\dots,M\ ;\ r=1,\dots,\binom{M}{m},\ t=1,\dots,T$$

$$\sum_{i\in I^*} (x_i^f - x_i^t) = m^*(t_f^* - \sum_{k=1}^{t} h_k)\ ,\ t=1,\dots,T \tag{13}$$

Warunki optymalności (13) wykorzystano przy opracowywaniu algorytmu obliczeń.

4. ALGORYTM WYZNACZANIA OPTYMALNEGO HARMONOGRAMU PRODUKCJI

Wektor u^t, $t=1,\dots,T$ optymalnego rozdziału urządzeń oraz długość h_t związanego z nim t-tego okresu produkcyjnego wyznaczać będziemy zgodnie z następującą procedurą:

1) Wyznaczamy średnią dopuszczalną prędkość $\tilde{u}^t \in \mathrm{conv}(U)$ zapewniającą wykonanie planu produkcji x^f w ciągu T_f^* jednostek czasu:

$$\tilde{u}^t = \frac{x^f - x^{t-1}}{T_f^* - \sum_{k=1}^{t-1} h_k},\ t=1,\dots,T \tag{14}$$

2) Wyznaczamy wektor $u^t \in U$ optymalnego rozdziału urządzeń, generujący trajektorię czasowo-optymalną wychodzącą z punktu x^{t-1} przestrzeni stanu, w kierunku "najbliższym" kierunkowi $(x^f - x^{t-1})$:

$$u^t \in U_t^* = \left\{ u^0 \in U_t : \sum_{i=1}^{N} |u_i^0 - \tilde{u}_i^t| = \min_{u\in U_t} \sum_{i=1}^{N} |u_i - \tilde{u}_i^t|\ ,\ \sum_{i\in I^*} u_i^0 = m^*,\ \text{jeżeli } I^*=I \right\}, \tag{15}$$

gdzie U_t - zbiór dopuszczalnych rozdziałów urządzeń w t-tym okresie:

$$U_t = \left\{ u \in U \subset R^N : u_j = 0\ \forall j \in J_t,\ u_i \leqslant x_i^f - x_i^{t-1},\ i=1,\dots,N \right\}, \tag{16}$$

przy czym J_t oznacza zbiór numerów operacji, których nie można wykonywać w t-tym okresie na skutek braku zapasów odpowiednich półwyrobów:

$$J_t = \left\{ j : y_i^{t-1} = x_i^{t-1} - \sum_{k=1}^{N} c_{ik} x_k^{t-1} < c_{ij},\ c_{ij} > 0 \right\} \tag{17}$$

3) Wyznaczamy długość h_t okresu czasu stosowania rozdziału u^t:

$$h_t = \begin{cases} \mathrm{Ent}(H_t) & \text{- jeżeli } \sum_{i\in I^*} u_i^t = m^* \\ 1 & \text{- jeżeli } \sum_{i\in I^*} u_i^t < m^* < M \end{cases} \tag{18}$$

gdzie:

$$H_t = \min(h_{t1}, h_{t2}, h_{t3}, h_{t4}) \tag{19}$$

$$h_{t1} = \min\left[\min_{i\in I^*_{t1}} \frac{m_i(T^*_f-\sum_{k=1}^{t-1}h_k)-(x^f_i-x^{t-1}_i)}{m_i - u^t_i}, \min_{I_{mr}\subset \mathcal{J}_{t1}} \frac{m(T^*_f-\sum_{k=1}^{t-1}h_k)-\sum_{i\in I_{mr}}(x^f_i-x^{t-1}_i)}{m-\sum_{i\in I_{mr}} u^t_i}\right] \tag{20}$$

$$h_{t2} = \min_{i\in I^*_{t2}} \frac{x^f_i - x^{t-1}_i}{u^t_i} \tag{21}$$

$$h_{t3} = \min_{i\in I^*_{t3}} \frac{y^{t-1}_i - u^t_i}{\sum_{j=1}^{N} c_{ij}u^t_j - u^t_i} \tag{22}$$

$$h_{t4} = \min_{i\in I^*_{t4}} \frac{a_i - y^{t-1}_i}{u^t_i - \sum_{j=1}^{N} c_{ij}u^t_j} \tag{23}$$

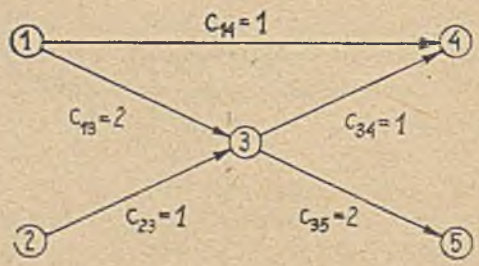
gdzie zbiory I^*_{t1}, I^*_{t2}, I^*_{t3}, I^*_{t4}, $\mathcal{J}_{t1}$ zdefiniowane są następująco:

$$I^*_{t1} = \{i: \tilde{u}^t_i > u^t_i\},\ I^*_{t2} = \{i: \tilde{u}^t_i < u^t_i\},\ I^*_{t3} = \{i: \sum_{j=1}^{N} c_{ij}u^t_j - u^t_i > 0\},$$

$$I_{t4} = \{i: \sum_{j=1}^{N} c_{ij}u^t_j - u^t_i < 0\},\ \mathcal{J}_{t1} = \{I_{mr}: \sum_{i\in I_{mr}} \tilde{u}^t_i > \sum_{i\in I_{mr}} u^t_i\}. \tag{24}$$

5. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Czasowo-optymalny harmonogram produkcji wyznaczono dla następującego przypadku:
liczba urządzeń M = 2, liczba operacji N = 5.



Rys.1. Przykład struktury technologicznej procesu produkcji.

Macierz Q (1) dopuszczalnych połączeń operacji i urządzeń oraz odpowiadający jej zbiór U (3) dopuszczalnych rozdziałów urządzeń pomiędzy operacje:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \{u \in R^5 : 0 \leqslant u_1 \leqslant 2,\ 0 \leqslant u_2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant u_3 \leqslant 1,\ 0 \leqslant u_4 \leqslant 1,\ 0 \leqslant u_5 \leqslant 1,$$
$$u_2+u_3+u_4 \leqslant 1,\ u_1+u_2+u_3+u_4+u_5 \leqslant 2,\ u_i,\ (i=1,2,3,4,5) \text{ - całkowitoliczbowe}\}$$

Struktura technologiczna procesu produkcji zadana jest w postaci grafu (rys.1), gdzie niezerowe elementy macierzy C - bezpośrednich zapotrzebowań jednostkowych na produkowane wyroby, wynoszą:

$$c_{13} = 2,\ c_{14} = 1,\ c_{23} = 1,\ c_{34} = 1,\ c_{35} = 2.$$

Zadany jest plan produkcji wyrobów finalnych (operacje 4 i 5):

$x_4^f = 100$ [jednostek czasu maszynowego pracy urządzeń przy produkcji wyrobu 4]

$x_5^f = 100$ [jednostek czasu maszynowego pracy urządzeń przy produkcji wyrobu 5]

Pozostałe zadania produkcyjne dotyczące półwyrobów (operacje 1,2,3) wyznaczono z zależności (6):

$$x_3^f = c_{34}x_4^f + c_{35}x_5^f = 300,\ x_2^f = c_{23}x_3^f = 300,\ x_1^f = c_{13}x_3^f + c_{14}x_4^f = 700.$$

Minimalny czas T_f^* (12) wykonywania planu produkcji $x^f(700,300,300,100,100)$, wynosi:

$$T_f^* = t_f^* = 750 \text{ [jednostek czasu], przy czym } I^*=I=\{1,2,3,4,5\},\ m^*=M.$$

Wykorzystując przedstawiony w rozdziale 4 algorytm, wyznaczono czasowo-optymalny harmonogram produkcji oraz odpowiadającą mu optymalną trajektorię stanu:

$u^{*1} = [1,1,0,0,0]$	$h_1 = h_{12} = 300$	$x^{*1} = [300,300,0,0,0]$
$u^{*2} = [1,0,1,0,0]$	$h_2 = h_{23} = 299$	$x^{*2} = [599,300,299,0,0]$
$u^{*3} = [1,0,0,0,1]$	$h_3 = h_{31} = 50$	$x^{*3} = [649,300,299,0,50]$
$u^{*4} = [1,0,0,1,0]$	$h_4 = h_{42} = 51$	$x^{*4} = [700,300,299,51,50]$
$u^{*5} = [0,0,1,0,1]$	$h_5 = h_{52} = 1$	$x^{*5} = [700,300,300,51,51]$
$u^{*6} = [0,0,0,1,1]$	$h_6 = h_{62} = 49$	$x^{*6} = [700,300,300,100,100] = x^f.$

6. WNIOSKI

Przedstawiono problem czasowo-optymalnego sterowania harmonogramem produkcji o wielu urządzeniach i wielu wyrobach. Jak wykazano, przy pewnych, spotykanych często w praktyce przemysłowej własnościach procesu produkcji (założenie 6), wpływ zależnych operacji na długość globalnego czasu wykonywania planu produkcji jest pomijalny. Umożliwiło to wykorzystanie idei przedstawionych w pracach [1,2,3,4] do opracowania prostego algorytmu dla wyznaczania optymalnego harmonogramu produkcji.

LITERATURA

[1] T.Sawik, Minimalno-czasowe programowanie produkcji wieloasortymentowej. Arch. Autom. i Telemech., vol.21 (1976), No 3.

[2] T.Sawik, O pewnym modelu zadania teorii harmonogramów. Arch. Autom. i Telemech., vol.22 (1977), No 1-2.

[3] T.Sawik, Czasowo-optymalne sterowanie produkcji w przypadku niestacjonarnego parku urządzeń produkcyjnych. Arch. Autom. i Telemech., vol.22 (1977), No 4.

[4] T.Sawik, O dekompozycji zadania minimalno-czasowego rozdziału urządzeń w kompleksie niezależnych operacji technologicznych. Podstawy Sterowania, vol.7 (1977), No 3.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГРАФИКОМ ПРОИЗВОДСТВА ПРИ НАЛИЧИИ БОЛЬШОГО КОЛИЧЕСТВА ОБОРУДОВАНИЯ И АССОРТИМЕНТА ИЗДЕЛИЙ

Р е з ю м е

Задачу оптимализации графика работ многооперационного процесса представлено как проблемму временно - оптимального управления в дискретной области с неравенственным ограничением для координат состояния. Даны некоторые особенности временно - оптимального графика и алгоритм его получение.

OPTIMUM CONTROL OF PRODUCTION SCHEDULING FOR MANY MACHINES AND PRODUCTS

S u m m a r y

The problem of optimum scheduling of an industrial process with many operations is formulated as a lime-optimum control problem with an integar control domain and inequality constraints on state variables. Some properties of this scheduling are presented and an algorithm for the scheduling is presented. The derivations are illustrated by means of a numerical example.