

Barbara Wójcik
Instytut Badań Systemowych PAN
Warszawa

**METODA WYZNACZANIA OPTYMALNYCH ZADAŃ DLA
STANOWISK WYTWORCZYCH Z UWZGLĘDNIENIEM
JAKOŚCI PRODUKCJI**

Streszczenie. W referacie przedstawiono metodę określania optymalnych zadań produkcyjnych przy ograniczeniach dotyczących jakości produktu. Oparto się na probabilistycznym modelu procesu produkcyjnego.

1. Wprowadzenie

W referacie przedstawiono metodę wyznaczania optymalnych zadań produkcyjnych i przedziałów tolerancji dla wyrobów poddawanych operacjom kontrolnym. Przedstawiony problem rozwiązano w oparciu o probabilistyczny model procesu produkcji, uwzględniający jakość wytwarzanych wyrobów. W rozważaniach oparto się na szeregowej strukturze procesu produkcyjnego, w której następują po sobie kolejno stanowiska wytwórcze, produkujące określone wyroby i operacje kontrolne, które sortują wytworzone wyroby w zależności od przyjętego kryterium jakości (jest nim szerokość przedziału tolerancji dla określonej cechy badanego wyrobu). Wyznaczono: optymalne ilości wyrobów, jakie powinny być wytworzone na kolejnych stanowiskach wytwórczych oraz optymalne przedziały tolerancji dla wyrobów poddawanych operacjom kontrolnym, które minimalizują założoną funkcję celu. Funkcją celu jest wartość oczekiwana kosztów związanych z odrzucaniem braków po wszystkich operacjach kontrolnych. Założonymi ograniczeniami jest ilość i jakość produktów finalnych oraz jakość surowca wchodzącego do pierwszego stanowiska wytwórczego. Funkcja celu ma postać:

$$S = \sum_{k=0}^K \alpha_j^k p_j^k H_j^k, \quad (1)$$

gdzie:

- S - wartość oczekiwana kosztów związanych z odrzuceniem braków we wszystkich operacjach kontrolnych,
- j - indeks dobra w k-tej operacji kontrolnej,
- α_j^k - wartość oczekiwana ilości j-tych wyrobów wytwarzanych w k-tym stanowisku wytwórczym,

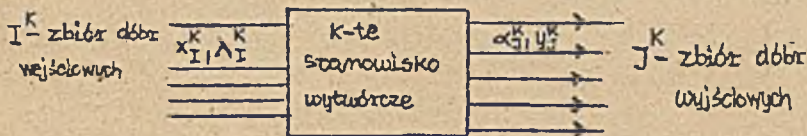
P_J^k - prawdopodobieństwo odrzucenia J -tego wyrobu w k -tej operacji kontrolnej,

H_J^k - koszt jednostkowy odrzucenia J -tego wyrobu w k -tej operacji kontrolnej.

2. Probabilistyczny model procesu produkcji

Przebieg procesu produkcyjnego zależy od bardzo wielu czynników (jak np. od kwalifikacji robotnika, stanu technicznego maszyn, temperatury, napięcia sieci elektrycznej itp.). Jest więc rzeczą oczywistą, że przekształcenie dóbr wejściowych na dobra wyjściowe ma charakter probabilistyczny.

W procesie produkcyjnym wytwarzania określonych wyrobów mamy do czynienia ze zbiorem $\{1, 2, \dots, k, \dots, N\}$ stanowisk wytwórczych. Każde k -te stanowisko wytwórcze (rys. 1) przetwarza zbiór dóbr wejściowych I^k (surowców, półfabrykatów) w zbiór dóbr wyjściowych J^k .



Rys.1

Z każdego zbioru dóbr wejściowych I^k_i niezależnie, wyjściowych J^k k -tego stanowiska wytwórczego wybierane jest jedno najbardziej reprezentatywne dobro. Zbiór I^k będzie więc reprezentowany przez dobro I , natomiast zbiór J^k będzie reprezentowany przez dobro J .

Źakość J -tego dobra (wyrobu), wytworzonego na k -tym stanowisku wytwórczym, $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ opisana jest wartością jednej cechy, która w sposób najbardziej reprezentatywny określa stan tego wyrobu.

Dobra są więc sprawdzane ze względu na jedną określoną cechę.

Dobro wejściowe do produkcji na k -tym stanowisku wytwórczym można scharakteryzować przez podanie następujących wielkości:

- 1) λ_I^k - wartość oczekiwana intensywności zużycia dobra I w określonym przedziale czasu (mierzona w jednostkach dobra I na jednostkę czasu).

- 2) x_I^k - wartość parametru jakościowego I-tego dobra zużywanego przez k-te urządzenie wytwórcze (np. wymiary geometryczne, ciężar, czystość, itp.),
- 3) $g_I^k(x_I^k)$ - funkcja gęstości prawdopodobieństwa cechy jakościowej x_I^k dobra I podawanego na wejście k-tego urządzenia.

Analogicznie można scharakteryzować dobro wyjściowe J przez podanie następujących wielkości:

- 1) α_J^k - wartość oczekiwana intensywności wytwarzania dobra J przez k-te urządzenie wytwórcze w określonym przedziale czasu,
- 2) y_J^k - wartość parametru jakościowego J-tego dobra wytwarzanego w k-tym urządzeniu
- 3) $g_J^k(y_J^k)$ - funkcja gęstości prawdopodobieństwa cechy jakościowej dobra J.

Proces produkcyjny jest zjawiskiem złożonym, dlatego też pełny opis możliwy jest na podstawie dekompozycji całego cyklu produkcyjnego na K procesów. Dekompozycję procesu produkcyjnego można przedstawić schematycznie na rys. 2.



Zgodnie z rys. 2 istnieje K stanowisk wytwórczych $\{1, 2, \dots, k, \dots, K\}$ produkujących odpowiednie wyroby $\{C, E, \dots, J, \dots, N\}$; tzn. stanowisko 1 produkuje wyrób C, stanowisko 2 wyrób E itd. Surowcem dla stanowiska 1 jest dobro I.

Każdy z kolejnych procesów wprowadza rozrzut parametrów dóbr wyjściowych. Dlatego też niezbędne jest zastosowanie odpowiednich operacji kontrolnych, które w porę eliminowałyby złe wyroby. Pojęcie wyrobu złego zależy od przyjętego kryterium jakości. W najprostszym przypadku klasyfikacji alternatywnej odrzuca się te wyroby, które nie mieszczą się w ustalonym przedziale tolerancji dla badanej cechy. Z góry zakłada się przy tym, że błąd kon-

troli jest pomijalny.

Przedział tolerancji Δ_J^k dla wartości y_J cechy jakościowej wyrobu J

$$\Delta_J^k = (y_J^k_{\max}, y_J^k_{\min}) \quad (2)$$

jest to zbiór dopuszczalnych wartości cechy jakościowej J-tych wyrobów podanych k-tej operacji kontrolnej.

Jakość wyrobu finalnego określona jest funkcją gęstości $g_N^{\pi}(y_N)$, która z kolei zależy od jakości surowca $g_D^{\pi}(x_D)$ i od probabilistycznych charakterystyk jakości wyrobów, otrzymywanych w kolejnych procesach cyklu produkcyjnego $\{g_C^1(y_C^1), g_E^2(y_E^2), \dots, g_M^{\pi-1}(y_M^{\pi-1})\}$, zależnych od wyznaczonych przedziałów tolerancji. Chcąc wyznaczyć charakterystykę probabilistyczną jakości J-tego wyrobu w k-tym etapie procesu wytwórczego, trzeba znać funkcję gęstości prawdopodobieństwa jakości $g_I^k(x_I^k)$ dobra I, podawanego na wejściu k-tego urządzenia. Dla danej funkcji gęstości $g_I^k(x_I^k)$ mamy:

$$g_J^k(y_J^k) = \int_{x_I^k \in \Delta_I^{k-1}} g_J^k(y_J^k | x_I^k) g_I^k(x_I^k) dx_I^k, \quad (3)$$

gdzie: $g_J^k(y_J^k)$ - probabilistyczna charakterystyka jakości J-tego dobra, uzyskanego w k-tym procesie, $g_J^k(y_J^k | x_I^k)$ - warunkowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa jakości k-tego procesu.

W rezultacie, na wejściu k+1-szego procesu probabilistyczna charakterystyka jakości J-tego dobra ma postać:

$$g_J^{k+1}(x_J^{k+1}) = \begin{cases} \frac{g_J^k(y_J^k)}{G_J^k(y_J^k_{\max}) - G_J^k(y_J^k_{\min})} & \text{dla } y_J^k \in \Delta_J^k \\ 0 & \text{dla pozostałych wartości } y_J^k \end{cases} \quad (4)$$

gdzie: $G_J^k(z) = \int_0^z g_J^k(y_J^k) dy_J^k$ - dystrybuanta,

$y_J^k_{\max}, y_J^k_{\min}$ - granice tolerancji dla J-tego wyrobu, produkowanego na k-tym stanowisku wytwórczym.

Operacja kontrolna, przeprowadzone po k-tym procesie wytwórczym, umożliwia wyodrębnienie odrzutów ze zbioru J-tych dóbr, wytworzonych w tym procesie, z następującym prawdopodobieństwem:

$$p_J^k = 1 - p_d \quad (5)$$

gdzie: p_J^k - prawdopodobieństwo odrzucenia wyrobu,

p_d - prawdopodobieństwo przyjęcia wyrobu jako dobrego.

Szukane prawdopodobieństwo p_J^k można wyznaczyć w następujący sposób:

$$p_J^k = 1 - p_d = 1 - G_J^k(y_J^k_{\max}) + G_J^k(y_J^k_{\min}) \quad (6)$$

Natomiast zależności między wartościami oczekiwanymi intensywności wytwarzania i zużywania wyrobów można określić z następujących zależności:

$$(1 - p_I^{k-1})\alpha_I^{k-1} = \lambda_I^k \quad (7)$$

oraz

$$\frac{k_I^k}{x_I^k a_J^k} = \alpha_J^k, \quad (8)$$

gdzie $a_J^k = \alpha_J^k / \lambda_I^k$ oznacza normę produkcji J-tego dobra na jednostkę zużywanego dobra I-tego.

Z kolei zależność między wartością oczekiwaną intensywności wytwarzania wyrobów w k-tym urządzeniu wytwórczym a wartością oczekiwaną intensywności wytworzenia wyrobów w k-1-szym procesie technologicznym jest następująca:

$$\alpha_I^{k-1} = \frac{b_I^k \alpha_J^k}{(1 - p_I^{k-1})} \quad (9)$$

Powyższe równanie będzie wykorzystane w dalszej części pracy w procesie optymalizacji, umożliwia bowiem wyznaczanie wartości oczekiwanych ilości wyrobów wytwarzanych w kolejnych stanowiskach technologicznych, niezbędnych do zapewnienia pożądaney ilości wyrobów finalnych.

3. Proces optymalizacji

Rozwiązanie zasadniczego problemu, którym jest optymalizacja granic tolerancji dla badanych wyrobów przez minimalizację kosztów związanych z od-

rzucaniem złych wyrobów, może być wykonane tylko na podstawie znajomości wszystkich wyników częściowych, tzn. poszczególnych założonych przedziałów tolerancji, wynikających z tego prawdopodobieństw odrzucenia braków i następnie kosztów związanych z przyjęciem założonych przedziałów tolerancji. W tym celu musimy najpierw wyznaczyć rodzinę zbiorów prawdopodobieństw odrzucenia złych wyrobów P

$$P = \{P_D^0, P_C^1, \dots, P_J^k, \dots, P_N^{\kappa}\}, \quad (10)$$

gdzie $P_J^k \in P$ jest zbiorem prawdopodobieństw odrzucenia J -braków po k -tej operacji kontrolnej

$$P_J^k = \{P_1^k, P_2^k, \dots, P_S^k\} \quad (11)$$

Wyznaczenie zbioru prawdopodobieństw P_J^k jest możliwe wówczas, gdy dysponujemy probabilistyczną warunkową charakterystyką k -tego stanowiska wytwórczego $g_J^k(y_J^k | x_I^k)$. Zakładamy, że znany jest zbiór R probabilistycznych warunkowych charakterystyk stanowisk wytwórczych

$$R = \{g_C^1(y_C^1 | x_D^1), \dots, g_J^k(y_J^k | x_I^k), \dots, g_N^{\kappa}(y_N^{\kappa} | x_M^{\kappa})\} \quad (12)$$

Zbiór prawdopodobieństw P może być obliczany kolejno, od elementu P_D^0 (będącego zbiorem) do elementu P_N^{κ} (będącego również zbiorem). W odwrotnej kolejności (tzn. od ostatniego stanowiska wytwórczego do pierwszego) może być obliczony zbiór α wartości oczekiwanych intensywności wytwarzania wyrobów od wyrobu finalnego N rozpoczynając, a na wyrobie D kończąc (zgodnie ze wzorem 9). W wyniku otrzymywana jest rodzina zbiorów

$$\alpha = \{\alpha_D^0, \alpha_C^1, \dots, \alpha_J^k, \dots, \alpha_N^{\kappa}\} \quad (13)$$

Rodzina zbiorów α jest równoliczna z rodziną zbiorów P

$$\text{card } \alpha = \text{card } P \quad (14)$$

Natomiast nie każdy zbiór $\alpha_J^k \in \alpha$ jest równoliczny z odpowiednim zbiorem $P_J^k \in P$.

$$\forall (k \in \{0, 1, \dots, \kappa-2\}, J \in \{D, C, \dots, A\}) (\text{card } \alpha_J^k \neq \text{card } P_J^k) \quad (15)$$

Jeśli $\{t, r, \dots, z, v, \dots, w, u\}$ są licznosciami zbiorów przedziałów tolerancji

cji w kolejnych operacjach kontrolnych $\{0, 1, \dots, k, \dots, \kappa-1, \kappa\}$, to moc P_N^κ wynosi tr...wu prawdopodobieństw odrzucenia N -tych wyrobów

$$\text{card } P_N^\kappa = \text{tr} \dots q \dots w u \quad (16)$$

Dla N -wyrobu finalnego istnieje jedna założona norma państwowa (jeden przedział tolerancji), stąd

$$\text{card } \alpha_N^\kappa = \text{card } S_N^\kappa = \text{card } P_N^\kappa = \text{tr} \dots s \dots w \quad , \quad (17)$$

gdzie α_N^κ - zbiór wartości oczekiwanych ilości N -wyrobów wytwarzanych na κ -tym stanowisku wytwórczym,

S_N^κ - wartość oczekiwana kosztów odrzucenia złych wyrobów w κ -tej operacji kontrolnej.

Kolejne elementy zbioru α_N^κ otrzymywane są z zależności:

$$\forall (e \in \{0\}, \forall (f \in \{1\}) \dots \forall (a \in \{\kappa-2\}) \forall (b \in \{\kappa-1\}) \quad (18)$$

$$\left(\alpha_{ef \dots abN}^\kappa = \frac{\alpha_N^\kappa}{1 - P_{ef \dots abN}^\kappa} \right) \cdot$$

Natomiast kolejne elementy uporządkowanego zbioru S_N^κ , zgodnie z funkcją celu, dla jednostkowego kosztu h_N wyrobu N obliczane są według następującego zbioru

$$\forall (e \in \{0\}) \forall (f \in \{1\}) \dots \forall (b \in \{\kappa-1\}) \quad (19)$$

$$\left(S_{ef \dots abN}^\kappa = \alpha_{ef \dots abN}^\kappa P_{ef \dots abN}^{\kappa, h_N} \right) \cdot$$

Kolejne zbiory $\alpha_A^{\kappa-2}, S_A^{\kappa-2}, \dots, \alpha_J^k, S_J^k, \dots, \alpha_D^1, S_D^1, \alpha_C^0, S_C^0$ są wyznaczane w analogiczny iteracyjny sposób.

Znając wszystkie zbiory wartości oczekiwanych kosztów odrzucenia złych wyrobów we wszystkich kolejnych operacjach kontrolnych $\{S_D^0, S_C^1, \dots, S_J^k, \dots, S_A^{\kappa-1}, S_N^\kappa\}$ można dokonać optymalizacji wartości oczekiwanych tych kosztów zgodnie z funkcją celu (1).

Wyznamy wówczas zbiór Δ_{opt} optymalnych przedziałów tolerancji

$$\Delta_{\text{opt}} = \{\Delta_g, \Delta_f, \dots, \Delta_e, \dots, \Delta_n\} \quad (20)$$

gdzie

$$\{g, f, \dots, e, \dots, h\} : S_{gf\dots e\dots h} = \min_{\{e, f, \dots, a, b\}} \left(S_{ef\dots ab} - \sum_{k=0}^K S_{ef\dots ab} \right) \quad (21)$$

indeksy $\{g, f, \dots, e, \dots, h\}$ są wskaźnikami przedziałów tolerancji następujących zbiorów:

$$\Delta_g \in \{\Delta\}_0, \Delta_f \in \{\Delta\}_1, \dots, \Delta_e \in \{\Delta\}_k, \dots, \Delta_h \in \{\Delta\}_{K-1}.$$

Wyznaczone według wzoru (21) wskaźniki $\{g, f, \dots, e, \dots, h\}$ optymalnych przedziałów tolerancji w kolejnych operacjach kontrolnych określają jednocześnie optymalne wartości oczekiwane intensywności wytwarzania wyrobów $\{C, \dots, J, M, N\}$ na kolejnych stanowiskach wytwórczych $\{1, 2, \dots, k, \dots, K\}$ niezbędne do wykonania planu α_N wyrobów N w określonej jednostce czasu o jakości zawartej w przedziale tolerancji Δ_k .

LITERATURA

- [1] Stanisław Piasecki, Barbara Wójcik: A probabilistic model of a manufacturing process from a quality of products point view with regard to interoperation controls. Nie publikowane.
- [2] Barbara Wójcik: Wyznaczanie optymalnych tolerancji ze względu na minimum kosztów związanych z odrzucaniem wyrobów po operacjach kontrolnych. Przegląd Statystyczny (w druku).
- [3] Barbara Wójcik: Optymalizacja przedziałów tolerancji w kontroli międzyoperacyjnej ze względu na minimalny koszt odrzucania braków. II Konferencja Jakość i Niezawodność Systemów. Jabłonna 1977.
- [4] Barbara Wójcik: Ekonomiczne uzasadnienie wyboru optymalnego przedziału tolerancji. Problemy Jakości (w druku).

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ РАБОЧИХ МЕСТ С УЧЕТОМ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ

Резюме

В работе представлен метод определения оптимальных производственных задач и полей допусков для контролируемых изделий.

Задача решается на базе вероятностной модели производственного процесса, учитывающей качество выпускаемых изделий.

OPTIMUM JOB DETERMINATION FOR PRODUCTION UNITS WITH
CONSTRAINTS ON PRODUCT QUALITY

Summary

Using a probabilistic process model, a method for the determination of optimum production jobs with product quality constraints is presented.