

ZASTOSOWANIE TECHNIKI POD DO IDENTYFIKACJI PRĘDKOŚCI WODY GRUNTOWEJ W OBSZARZE ZAMRAŻANIA GRUNTU NA PODSTAWIE POMIARÓW TEMPERATURY

ADAM FIC, ZIEMOWIT OSTROWSKI

*Instytut Techniki Ciepłej, Politechnika Śląska
e-mail: adam.fic@polsl.pl, ziemowit.ostrowski@polsl.pl*

Streszczenie. W pracy wykorzystano technikę POD i funkcje radialne do symulacji temperatury wykorzystywanej w algorytmie estymacji prędkości brzegowej wody gruntowej. Rozpatrywany w układzie dwuwymiarowym problem dotyczy nieustalonego procesu wymiany ciepła w gruncie podczas jego zamrażania poprzedzającego drażnienie szybu. Analizowane w zmiennych bezwymiarowych zagadnienie odwrotne sprowadza się do estymacji liczby Pecleta na podstawie pomiarów temperatury bezwymiarowej.

1. WSTĘP I CEL PRACY

Inspiracją do badań są procesy przepływu ciepła ze zmianą fazy, zachodzące w gruncie. Tego typu procesy występują w sposób naturalny w zimnych regionach globu, a także często są wywoływane sztucznie. Występują na przykład wokół rur wymienników gruntowych pomp ciepła lub podczas sztucznego zamrażania gruntu. Sztuczne zamrażanie gruntu jest dość częstym procesem stosowanym podczas budowy tuneli, czy też poprzedzającym drażnienie szybów 1. Poprawne zaprojektowanie instalacji mroźniowej czy wymienników gruntowych wymaga naturalnie wykonania odpowiednich, w praktyce numerycznych, analiz wymiany ciepła w gruncie otaczającym instalację. Wymiana ta zależy silnie jak się okazuje od ruchu wody gruntowej 3, mimo stosunkowo niewielkich w praktyce prędkości tej wody, rzędu kilku m/dobę. Znajomość prędkości wody gruntowej ma więc duże znaczenie podczas modelowania pól temperatury w gruncie w ww. układach.

Celem niniejszej pracy jest zbadanie możliwości identyfikacji prędkości brzegowej płynu dopływającego do obszaru zamrażania gruntu na podstawie pomiarów temperatury w jego wnętrzu przy zastosowaniu techniki POD (Proper Orthogonal Decomposition). Pomiarów temperatury wykonywane byłyby w warunkach procesu nieustalonego. W obszarze występuje zmiana fazy. Przyjęte stałe termofizyczne założono jak dla typowego gruntu. Rozkład prędkości płynu wyznaczano na podstawie o modelu transportu płynu nieściśliwego (wody) w ośrodku porowatym, przy poziomie tych prędkości charakterystycznych dla wód gruntowych. Tak postawione zagadnienie plasuje rozpatrywany problem w dziedzinie początkowo - brzegowych zadań odwrotnych przepływu ciepła. Jego cechą charakterystyczną jest to, że wielkość identyfikowana i mierzona, tj. prędkość i temperatura, są opisane za pomocą różnych, sprzężonych ze sobą równań transportu płynu i energii.

Literatura dotycząca rozwijanych stosunkowo od niedawna technik odwrotnych jest bogata [6]. Jak pokazano w [2] i [8], niewiele jest jednak prac dotyczących identyfikacji prędkości brzegowej. Estymacji prędkości brzegowych za pomocą technik odwrotnych na podstawie pomiarów temperatury poświęcone są prace 2, 4, 7, 8. Problemy rozpatrywane w pracach 2, 7, 8 dotyczą stanu ustalonego, w pracy 2 dla przypadku ze zmianą fazy. Problem analizowany w niniejszej pracy dotyczy stanu nieustalonego. Jak wspomniano, do rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia odwrotnego wykorzystano POD. Rozwiązania wielu problemów odwrotnych stanu ustalonego analizowane w 5 wskazują na regularyzujący wpływ techniki POD na te rozwiązania. Wyniki pierwszych prób wykorzystania tej techniki do rozwiązania zadania odwrotnego postawionego podobnie jak w niniejszej pracy zaprezentowano w 4.

2. MODEL NUMERYCZNY I ALGORYTM OBLICZEŃ

Rozpatrywana jest pozioma jednorodna warstwa gruntu. Problem polega na identyfikacji prędkości wlotowej wody gruntowej u_b dopływającej do obszaru, w którym jest realizowane zamrażanie gruntu za pomocą pojedynczego kręgu pionowych rur mroźniowych (rys. 1). Grunt traktuje się jako nieściśliwy ośrodek porowaty nasycony przepływającym w nim płynem nieściśliwym (woda), który zmienia fazę w części obszaru. Pomija się przepływ ciepła w kierunku pionowym, a ziarna stałe ośrodka są w lokalnej równowadze termicznej z płynem. Zakłada się też, że rozkład prędkości płynu jest w każdej chwili ustalony, stosownie do aktualnego kształtu obszaru niezamrożonego.

Przykład obliczeniowy rozpatrywany w pracy dotyczy obszaru obliczeniowego V pokazanego na rys.1a, składającego się z podobszaru zamrożonego V_z (może to być kilka rozłącznych podobszarów) w otoczeniu powierzchni rur mroźniowych i obszaru niezamrożonego V_n . Woda gruntowa o temperaturze T_b dopływa do obszaru prostopadle do lewego brzegu obszaru z wyrównaną prędkością u_b . Na pozostałych brzegach zewnętrznych przyjęto zerowy gradient temperatury. Wyrównana temperatura początkowa w obszarze wynosi $T_p = T_b$. Na brzegu prawym założono swobodny wypływ płynu. Na pozostałych brzegach zewnętrznych oraz powierzchniach zmiany fazy, które są przez wodę omywane, założono zerową składową normalną prędkości płynu.

2.1. Zadanie proste

Przy przyjętych założeniach, rozkład prędkości temperatury bezwymiarowej Θ jest opisany w podobszarze niezamrożonym V_n równaniem

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + PeU_x \frac{\partial \Theta}{\partial X} + PeU_y \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \quad (1)$$

w obszarze zamrożonym V_z

$$p \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = l \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2)$$

zaś bezwymiarowe prędkości płynu są określone w V_n jako

$$U_x = \frac{\partial \phi}{\partial X}, \quad U_y = \frac{\partial \phi}{\partial Y} \quad (3)$$

gdzie bezwymiarowy potencjał ϕ jest opisany równaniem ciągłości, które ma tutaj postać

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4)$$

Poszczególne wielkości bezwymiarowe są zdefiniowane następująco:

$$\Theta = \frac{T - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} \quad \phi = \frac{\varphi}{x_0 u_b} \quad l = \frac{k_z}{k_n} \quad Fo = \frac{\tau k_n}{(c\rho)_n x_0^2} \quad X = \frac{x}{x_0}$$

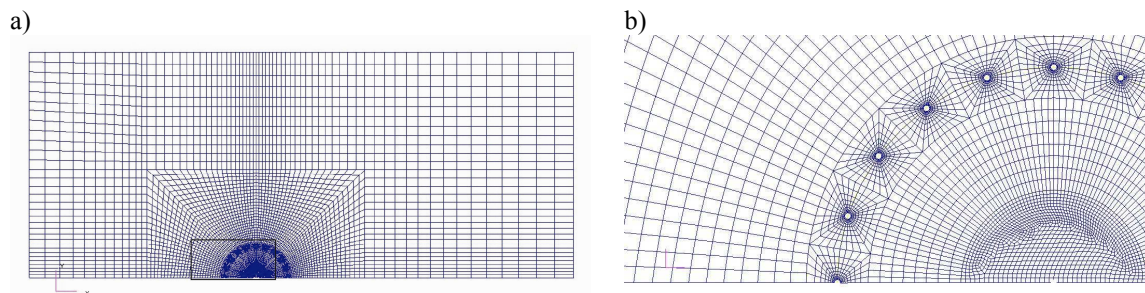
$$Pe = \frac{(c\rho)_w x_0 u_b}{k_n} \quad U_X = \frac{u_x}{u_b} \quad U_Y = \frac{u_y}{u_b} \quad p = \frac{(c\rho)_z}{(c\rho)_n} \quad Y = \frac{y}{x_0} \quad (5)$$

Występujące w powyższych wzorach wielkości, to: T – temperatura, Θ - temperatura bezwymiarowa, k – współczynniki przewodzenia ciepła, $(c\rho)$ - objętościowa pojemność cieplna właściwa, τ - czas, Fo – bezwymiarowy czas, u – prędkość wody gruntowej, φ i ϕ - potencjał i bezwymiarowy potencjał prędkości wody gruntowej, Pe – liczba Pecleta, x_0 – wymiar charakterystyczny (przyjęty tutaj jako promień kręgu rur mrozeniowych). Wskaźniki dotyczą: n – obszaru niezamrożonego, z – obszaru zamrożonego.

Na brzegach zewnętrznych warunki brzegowe mają typową postać warunków I, II lub III rodzaju, na granicy zmiany fazy obowiązuje warunek brzegowy Stefana oraz przyjęto zerową pochodną potencjału względem normalnej do granicy, co oznacza jej omywanie przez płyn.

Jeżeli wszystkie stałe termofizyczne i parametry brzegowe występujące w opisanym wyżej zadaniu są jednoznacznie określone, to tak zdefiniowane zadanie proste określa jednoznacznie pole temperatury i prędkości. Jeżeli jednak prędkość brzegowa u_b jest nieznana, to pojawiające się zadanie odwrotne można rozwiązać, wykorzystując informacje pomiarowe. W rozpatrywanym przypadku, przy bezwymiarowym sformułowaniu zagadnienia, identyfikowaną wielkością będzie liczba Pecleta Pe . Dodatkową informację stanowiąc będą symulowane „pomiarzy” bezwymiarowej temperatury Θ w wybranych wewnętrznych punktach obszaru.

Wymagane przez procedurę odwrotną rozwiązania zadań prostych otrzymano, stosując własny kod realizujący metodę elementów skończonych 3. Współczynniki wrażliwości Z_w względem identyfikowanej wielkości w , analizowane celem poprawnej lokalizacji punktów pomiarowych, wyznaczano, aproksymując ilorazami różnicowymi ich definicję różniczkową: $Z_w = \partial\Theta / \partial w \approx [\Theta(w + \Delta w) - \Theta(w)] / \Delta w$.



Rys. 1. Założony obszar obliczeniowy wraz z siatką (a) i fragment siatki w otoczeniu rur mrozeniowych (b)

2.2. Zadanie odwrotne

Niech wartości $\Psi_i^m = \Psi_i(Fo_m)$ ($i=1, 2, \dots, I$, $m=1, 2, \dots, M$) bezwymiarowej temperatury będą „mierzone” w I punktach rozpatrywanego obszaru w M chwilach czasu (dla M wartości liczby Fouriera), a J wielkości odtwarzanych za pomocą procedury odwrotnej jest zebranych w jednowierszowej macierzy $\mathbf{w}=[w_1, w_2, \dots, w_J]$. W rozpatrywanym przypadku jedynym elementem tej macierzy jest stała w czasie liczba Pecleta. Zagadnienie odtwarzania poszukiwanych wielkości jest rozwiązywane przez minimalizację funkcji celu względem \mathbf{w} :

$$\chi = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \left[\Theta_i(Fo_m, \mathbf{w}) - \Psi_i^m \right]^2 \quad (5)$$

gdzie $\Theta_i(Fo_m, \mathbf{w})$ jest symulowaną wartością bezwymiarowej temperatury w punkcie i w chwili czasu m . Do rozwiązania tego problemu optymalizacyjnego zastosowano w pracy algorytm ewolucyjny.

Symulację temperatury bezwymiarowej dla potrzeb obliczania wartości funkcji celu (5) realizuje się, wykorzystując technikę POD-RBF 5 polegającą na aproksymacji za pomocą techniki POD i odwrotnych funkcji radialnych zbioru wybranych dyskretnych pól temperatury (DPT, w literaturze anglojęzycznej nazywanych *snapshots*), otrzymanych tutaj poprzez rozwiązanie zagadnienia (1÷5) metodą elementów skończonych.

W pierwszym kroku wyznacza się ww. dyskretne pola temperatury dla F wartości liczby Fouriera (czasu) oraz E ciągów wartości wielkości odtwarzanych (wektory \mathbf{w}). W ten sposób liczba DPT wynosi $L = F \times E$. DPT nie muszą dotyczyć tych samych czasów, w których wykonywane są pomiary. W przedziale tych czasów powinny być jednak pomiary wykonywane. Wybór wartości wielkości odtwarzanych, których kombinacje są zebrane w wektorze \mathbf{w} , powinien być też w miarę możliwości taki, by w ich obszarze mieściły się odtworzone wielkości. Te DPT są zebrane w kolumnach prostokątnej macierzy \mathbf{U} o rozmiarach $N \times L$, gdzie N jest liczbą węzłów siatki numerycznej.

W kolejnym kroku, dla danej macierzy DPT \mathbf{U} , wyznacza się obciążoną bazę POD $\overline{\Phi}(K)$, która pozwala optymalnie 4, 5 aproksymować macierz DPT

$$\mathbf{U} \approx \overline{\Phi}(K) \overline{\mathbf{a}} \quad (6)$$

gdzie $\overline{\mathbf{a}}$ jest macierzą współczynników o rozmiarach $K \times L$. Macierz tę wyraża się w funkcji liczby Fouriera Fo i odtwarzanych wielkości w_j w celu uzyskania zależności symulowanych wartości temperatury bezwymiarowej w N węzłach siatki jako funkcji tych wielkości, zebranych w kolumnowej macierzy Θ . W efekcie uzyskuje się 5

$$\Theta(\mathbf{z}) = \Theta(Fo, \mathbf{w}) = \overline{\Phi} \mathbf{B} \mathbf{f}(\mathbf{z}) \quad (7)$$

gdzie $\mathbf{z} = [Fo, \mathbf{w}]$, \mathbf{B} jest prostokątną macierzą ($K \times L$) współczynników interpolacyjnego opisu temperatury bezwymiarowej jako funkcji \mathbf{z} , zaś $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = [f_1(\mathbf{z}) \ \cdots \ f_l(\mathbf{z}) \ \cdots \ f_L(\mathbf{z})]^T$ (T oznacza transpozycję) jest wektorem funkcji bazowych interpolacji odpowiadających poszczególnym L DPT, tj. wartościom $\mathbf{z}_l = [Fo_f, \mathbf{w}_e]$, $f=1, 2, \dots, F$, $e=1, 2, \dots, E$, $l=1, 2, \dots, L$, $L=F \times E$. Jako bazę interpolacji przyjęto odwrotne kwadratowe funkcje radialne

$$f_l(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{z} - \mathbf{z}_l|^2 + r^2}}, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (8)$$

gdzie r jest parametrem wygładzającym.

Metoda wymaga, by punkty pomiarowe były lokowane w węzłach siatki. Symulowane temperatury $\Theta_i(Fo_m, \mathbf{w})$ w funkcji celu (5) w tych punktach są wówczas odpowiednimi elementami kolumnowej macierzy $\Theta(Fo, \mathbf{w})$ wyznaczonej według wzoru (7).

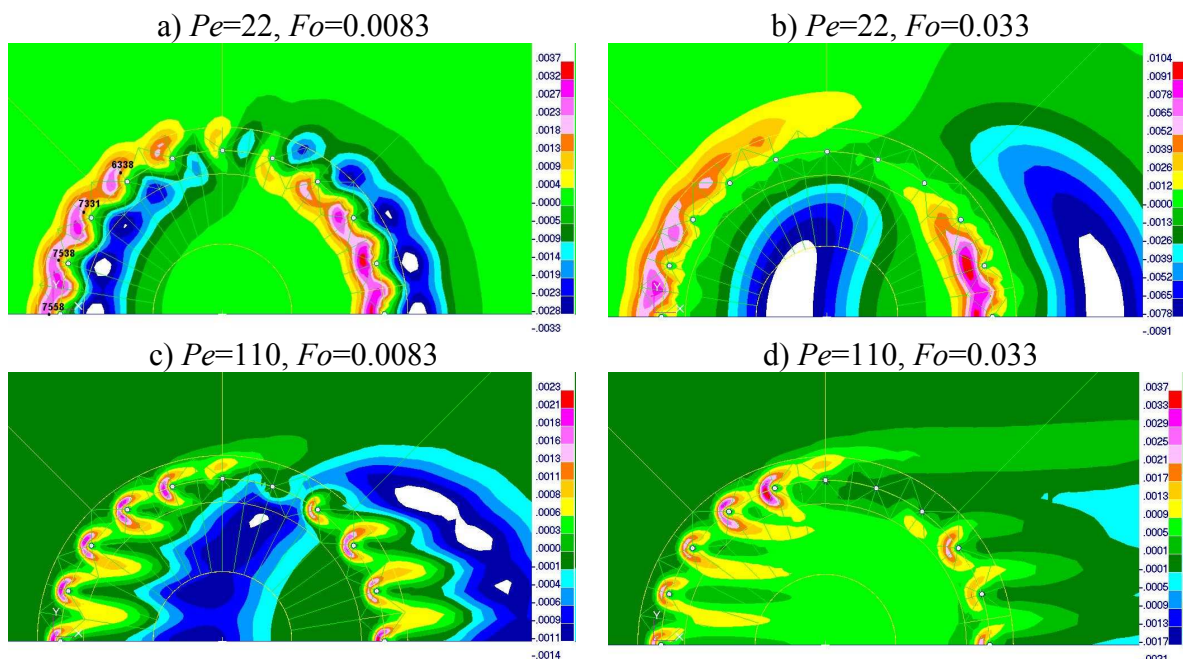
3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY I WNIOSKI

Problem dotyczy, jak już wspomniano, identyfikacji prędkości wlotowej u_b wody gruntowej dopływającej do obszaru, w którym jest realizowane zamrażanie gruntu za pomocą pojedynczego kręgu rur mrożeniowych. W rozpatrywanym przykładzie założono 20 rur mrożeniowych rozłożonych równomiernie w kręgu o promieniu $r_p=7\text{m}$. Zagadnienie jest

rozwiązywane w zmiennych bezwymiarowych. Przyjmuje się wymiar charakterystyczny $x_0=r_p$. Odtwarzana jest liczba Pecleta, a więc $w = [Pe]$. Obszar obliczeniowy wraz z czterowęzłową siatką zawierającą 7952 węzły pokazano na rys. 1. Jego bezwymiarowe rozmiary wynoszą 17×7 . Przy przyjętych typowych własnościach termofizycznych gruntu, poszczególne parametry bezwymiarowe wynoszą: $l = 1.25$, $p = 0.725$, $H = h_f / (c\rho)_w / (T_{\max} - T_{\min}) = 0.356$, gdzie h_f jest entalpią zmiany fazy, zaś $(c\rho)_w$ dotyczy wody. Założono temperaturę czynnika mroźeniowego równą $T_{\min} = -30^\circ\text{C}$, zaś wyrównaną temperaturę początkową równą temperaturze na brzegu dolotowym wody $T_{\max} = 10^\circ\text{C}$. Bezwymiarowa temperatura zmiany fazy wynosiła więc $\Theta_f = 0.75$. Rozwiązań poszukiwano w przedziale wartości liczby Pecleta $Pe \in [12.2, 244.4]$ i DPT generowano dla wartości liczby Pecleta z przedziału czasów bezwymiarowych odpowiadających początkowej fazie procesu zamrażania. Generowano więc DPT dla 28 liczb Fouriera zmieniających się z krokiem $\Delta Fo = 0.0036$, począwszy od wartości 0.0046 i początkowo (etap I) dla 8 wartości liczby Pecleta: 12.2 (odpowiada jej prędkość $u_b = 0.5 \cdot 10^{-6}$ m/s), 19.55, 31.7, 48.8, 73.3, 117.3, 146.6 i 244.4. Zadanie rozwiązywano w dwóch etapach. W etapie drugim macierz DPT uzupełniano polami generowanymi dla dwóch dodatkowych wartości liczby Pecleta z otoczenia wartości uzyskanej w etapie I identyfikacji. Obciążona baza POD zbudowana w etapie I na podstawie $L=228$ DPT zawierała $K=178$ modów.

Na rys. 2. pokazano przykładowe rozkłady współczynnika wrażliwości Z_{pe} temperatury bezwymiarowej względem liczby Pecleta dla różnych wartości liczb Pecleta i Fouriera. Pokazano też (rys. 2a) lokalizację 4 punktów pomiarowych, w których symulowano pomiary.

Lokalizacja punktów pomiarowych ma kluczowy wpływ na błędy i szanse identyfikacji odtwarzanych wielkości za pomocą procedur odwrotnych. Z tego punktu widzenia punkty pomiarowe powinny być umieszczane w obszarach najwyższych bezwzględnych wartości współczynnika wrażliwości. Jak wynika z rys.2, w przypadku rozpatrywanego zadania obszary takie znajdują się z obu stron kręgu, są zależne od liczby Pecleta i przemieszczają się w czasie. Utrudnia to znacznie lokalizację punktów pomiarowych gwarantującą identyfikację.

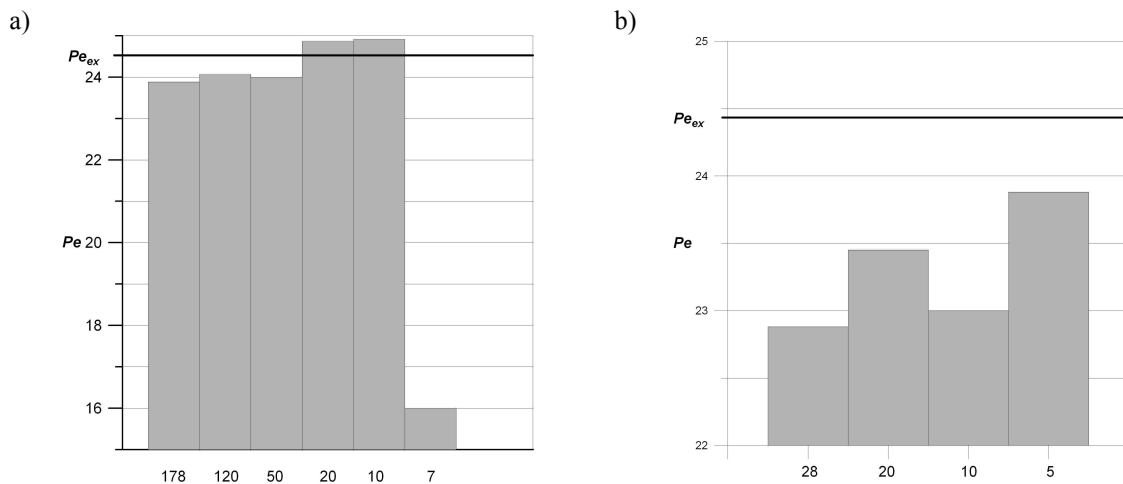


Rys.2. Rozkłady współczynnika wrażliwości Z_{pe} dla różnych wartości liczby Pecleta Pe i liczby Fouriera Fo oraz rozmieszczenie czterech punktów pomiarowych

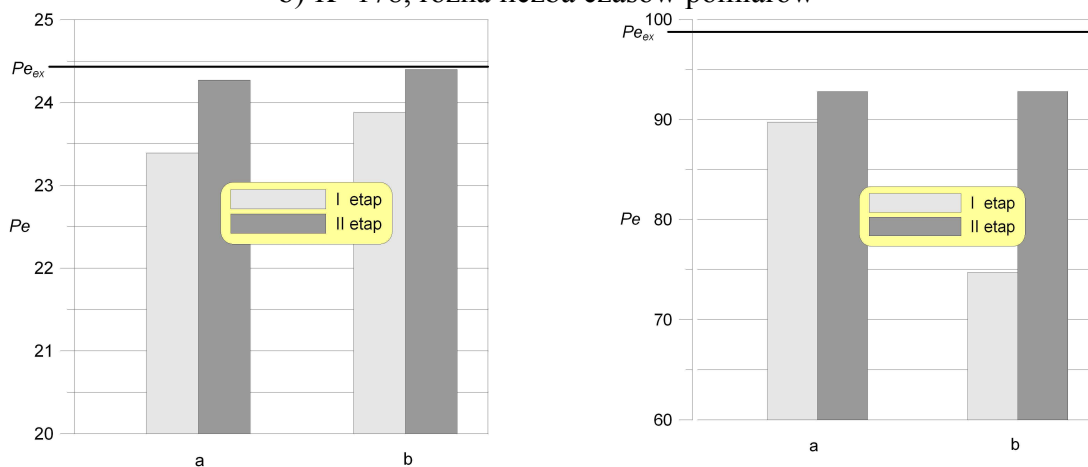
Pomiary symulowano zwykle (wyjątkiem są warianty pokazane na rys. 3b) dla 10 wartości liczby Fouriera (czasów bezwymiarowych), począwszy od wartości 0.0046 z krokiem $\Delta Fo = 0.0036$ oraz dwóch wartości liczby Pecleta: 24.4 oraz 97.6, zwanymi dalej wartościami oczekiwanymi liczby Pecleta Pe_{ex} . Procentowe błędy względne pomiarów Δ symulowano, losując je z rozkładu o stałej gęstości prawdopodobieństwa w przedziale $[-\Delta, \Delta]$. W ten sposób symulowane pomiary zawierały się w przedziale $[Pe_{ex}(1-\Delta/100), Pe_{ex}(1+\Delta/100)]$.

Wyniki obliczeń pokazano na rys. 3÷7.

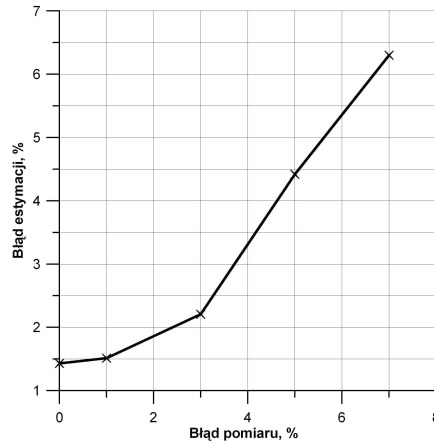
Bazę POD obcięto początkowo ostrożnie do $K=178$ modów. Jak wskazują wyniki testów pokazanych na rys. 3a, liczbę uwzględnianych modów bazy POD można ograniczyć nawet do około 10 bez poważniejszej utraty dokładności obliczeń. Można wówczas uzyskać kilkukrotne skrócenie czasu obliczeń. Rys. 3b ilustruje wpływ liczby czasów realizacji pomiarów spośród ww. listy tych czasów na błąd estymacji. Uzyskane wyniki wskazują, że liczba tych czasów może być ograniczona do kilku. W przypadku wykorzystywania 5 czasów pomiarów uzyskano nawet lepsze rezultaty niż w przypadku większej ich liczby. Wynika to z doboru punktów pomiarowych i przemieszczania się w czasie obszarów największej wrażliwości temperatury względem liczby Pecleta.



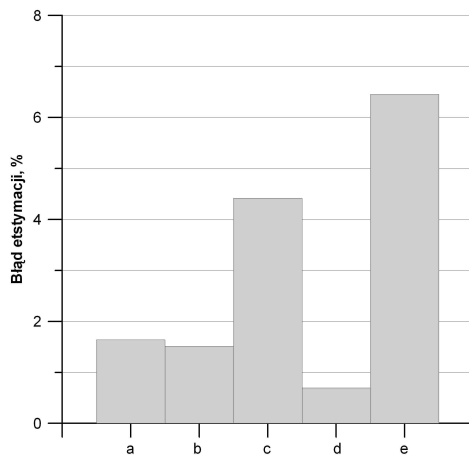
Rys. 3. Wyniki estymacji przy 4 punktach pomiarowych w etapie I dla $\Delta=5\%$, $Pe_{ex}=24.4$,
 a) Pomiary w 5 początkowych czasach bezwymiarowych, różna liczba modów K bazy POD,
 b) $K=178$, różna liczba czasów pomiarów



Rys.4. Wyniki estymacji w etapie I i II dla $Pe_{ex}=24.4$ (z lewej) oraz $Pe_{ex}=97.6$, $\Delta=5\%$, pomiary wykonane w 5 początkowych chwilach czasu, a) 2 punkty, b) 4 punkty pomiarowe

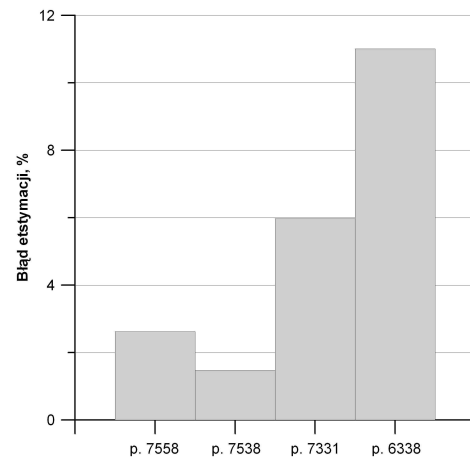


Rys.5. Błąd względny estymacji w etapie II w funkcji błędu pomiarowego Δ dla $Pe_{ex}=24.4$, przy 2 punktach i 10 czasach pomiarów



Rys.6. Błąd względny estymacji w etapie II dla $\Delta=5\%$, $Pe_{ex}=24.4$,

- 4 punkty, 10 czasów pomiarów,
- 4 punkty, 5 czasów pomiarów,
- 2 punkty, 10 czasów pomiarów,
- 2 punkty, 5 czasów pomiarów,
- 2 punkty końcowe, 5 czasów pomiarów



Rys.7. Błąd względny estymacji w etapie II dla $\Delta=5\%$, $Pe_{ex}=24.4$, przy 5 czasach pomiarów realizowanych w różnych pojedynczych punktach

Na rys. 4 pokazano wyniki estymacji dla dwóch wartości oczekiwanej wartości liczby Pecleta Pe_{ex} równej 24.4 i 97.6, w dwu realizowanych etapach odtwarzania, przy wykorzystaniu dwóch (pierwszych z listy punktów pokazanych na rys. 2, tj.: 7558, 7538, 7331 i 6338) i wszystkich czterech punktów pomiarowych. Zgodnie z oczekiwaniami, dokładniejsze rezultaty uzyskuje się w etapie II, kiedy baza POD tworzona była z wykorzystaniem DPT dla wartości liczby Pecleta zbliżonych do wartości odtworzonej. Dokładniejsze wyniki uzyskano w przypadku oczekiwanej wartości liczby Pecleta równej 24.4. Wynika to zapewne znów z lokalizacji punktów pomiarowych – lepszej dla tej wartości Pe_{ex} . Okazuje się też, że dokładniejsze rezultaty uzyskano przy wykorzystaniu pomiarów jedynie w dwóch ww. punktach. Dwa kolejne są bowiem ulokowane gorzej niż te dwa początkowe.

Na rys. 5 pokazano zależność błędów względnych estymacji od błędów pomiaru w przypadku II etapu odtwarzania dla $Pe_{ex} = 24.4$. Błędy odtwarzania są na poziomie błędów pomiarowych, co wydaje się zadowalające z praktycznego punktu widzenia.

Rys. 6 i 7 ilustrują błędy estymacji uzyskane przy 5% błędzie pomiaru przy różnych liczbach punktów pomiarowych i różnych liczbach czasów realizacji pomiarów. Okazuje się, że nawet w razie wykorzystywania pomiarów wykonanych jedynie w pięciu chwilach czasu (z początkowego okresu procesu zamrażania), w jednym punkcie pomiarowym, błędy estymacji mogą być zadowalające (rys. 7). Zależy to jednak od lokalizacji punktu pomiarowego. Jest to wniosek interesujący z praktycznego punktu widzenia, odwierty do realizacji pomiarów temperatury są bowiem kosztowne.

LITERATURA

1. Harris J. S.: Ground freezing in practice. T. Telford NY, American Society for Civil Engineering, New York, 1995,
2. Fic A.: A study of steady-state inverse heat transfer problem of estimating the boundary velocity. "Numerical Heat Transfer", Part A: Applications, 2004, Vol 45, No. 2, p.153-170,
3. Fic A.: Wpływ prędkości wody na przebieg procesu zamrażania górotworu w obecności przepływającej wody gruntowej. W : Materiały XVII zjazdu termodynamików. Kraków – Zakopane 1999, s. 335-344,
4. Fic A., Ostrowski Z., Białecki R.: Retrieving inlet velocity in transient convection diffusion problems in the presence of phase change using POD. W: Materiały międzynarodowej konferencji „EUROTHERM” Seminar 82 „Numerical Heat Transfer” 2005, Kraków-Gliwice, Vol. 3, s. 1057-1066,
5. Ostrowski Z.: Application of proper orthogonal decomposition to the solution of inverse problems. Rozprawa doktorska. Gliwice : Pol. Śl., 2006,
6. Özisik M. N, Orlande H. R. B.: Inverse heat transfer: fundamentals and applications. New York : Taylor & Francis, 2000.
7. Szczygieł I.: Analiza wybranych zagadnień odwrotnych konwekcji. Rozprawa habilitacyjna. Gliwice : Wyd. Pol. Śl. 2005.
8. Szczygieł I., Fic A.: Inverse convection - diffusion problem of estimating boundary velocity based on internal temperature measurements. "Inverse Problems in Engineering" 2002, Vol. 10, No. 3, p.271-291.

APPLICATION OF THE POD TECHNIQUE FOR ESTIMATION OF GROUNDWATER VELOCITY BASED ON TEMPERATURE MEASUREMENT

Summary. The POD technique and radial basis functions have been applied in the algorithm for estimation of the inlet groundwater velocity. The considered 2D problem concerns unsteady heat transfer in the ground which is frozen before shaft drilling. An inverse problem analyzed in the dimensionless variables reduces to estimation the Peclet number based on measurements of the dimensionless temperature.

Praca została wykonana przy wsparciu finansowym Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w ramach grantu N512 033 31/3789 oraz Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej.