

## SYNTEZA UKŁADÓW BELKOWYCH ZE WZGLĘDU NA ŻĄDANE WIDMO CZĘSTOŚCI

ANDRZEJ DYMAREK , TOMASZ DZITKOWSKI, ADRIAN GWÓŹDŹ

*Inst. Automatykacji Proces. Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Politechnika Śląska  
e-mail: andrzej.dymarek@polsl.p.l tomasz.dzitkowski@polsl.pl*

Streszczenie. W niniejszej pracy przedstawiono projektowanie drgających układów ciągłych jako podzespołów maszyn o żądanych własnościach dynamicznych. Przedstawiony algorytm projektowania układów ciągłych ze względu na żądane częstości drgań własnych polega na poszukiwaniu wymiarów poprzecznych przyjętej struktury układu. W pracy dokonano syntezy układów belkowych zgodnie z zaproponowanym algorytmem. Poprawność otrzymanych wyników sprawdzono, korzystając z programu ABC Rama.

### 1. WSTĘP

Projektowanie układów belkowych o żądanych wymaganiach w postaci charakterystyki dynamicznej, która jest złożoną funkcją częstotliwości, jest bardzo pracochłonne. W takich przypadkach korzystniej jest stosować metody syntezy, polegające na poszukiwaniu struktury oraz wartości parametrów układu dyskretnego, które spełniałyby żądane wymagania. Stosując znane metody syntezy układów mechanicznych w połączeniu z odwróconą metodą sił i przemieszczeń ([5], trudno jest otrzymać układy belkowe bez dokonania porównania układu otrzymanego w wyniku syntezy z modelem dyskretnym poszukiwanego układu belkowego. Podejście takie spowodowane jest brakiem ścisłego opisu doboru częstości antyrezonansowych charakterystyki dynamicznej poddanej syntezie oraz otrzymaniem bezpośrednio w wyniku syntezy układów obustronnie utwierdzonych.

Tak więc syntezę strukturalną (poszukiwanie struktury układu dyskretnego) i syntezę parametryczną (wyznaczenie parametrów inercyjnych i sprężystych) można uznać za jeden z etapów projektowania układów belkowych o żądanym widmie częstości [2÷7]. W celu dokonania syntezy omawianych układów opracowano zmodyfikowane, bazujące na istniejących metodach, sposoby przeprowadzania syntezy, pozwalające otrzymać dyskretne układy drgające, na które nałożone są utwierdzenia [6]. W literaturze dotyczącej syntezy układów mechanicznych nie zajmowano się doбором zer oraz ich wpływem na rozpatrywane układy, jak również projektowaniem układów belkowych otrzymanych w wyniku zastosowania bezpośrednio metod syntezy [1÷7]. Dlatego też praca dotyczy nie tylko sformułowania i rozwiązania problemu syntezy układów belkowych, ale również jest propozycją doboru obszarów antyrezonansowych (zer).

## 2. PROJEKTOWANIE UKŁADÓW BELKOWYCH ZE WZGLĘDU NA ŻĄDANE WIDMO CZĘSTOŚCI

### 2.1. Metody syntezy charakterystyki dynamicznej w projektowaniu układów belkowych

W poniższym rozdziale omówione zostaną dwie metody syntezy dyskretnych układów drgających z utwierdzeniami. Metody te wykorzystano do projektowania układów belkowych w taki sposób, aby spełnić żądane własności dynamiczne układu.

Metoda syntezy, nazwana w pracy metodą proporcjonalnego rozłożenia elementów, dotyczy charakterystyki dynamicznej, która opisuje układy utwierdzone. Jest ona określona mianem powolności  $U(s)$  i przyjmuje matematyczną formę:

$$U(s) = \frac{\prod_{i=0}^n (s^2 + s_{2i}^2)}{s \left( \prod_{j=1}^n (s^2 + s_{2j-1}^2) \right)}, \quad (1)$$

gdzie:  $s_{2i}$  - zera,  $s_{2j}$  - bieguny ( odpowiednio częstotliwości antyrezonansowe i rezonansowe poszukiwanego układu).

Funkcję charakterystyczną można przedstawić w postaci następującej funkcji wymiernej:

$$U(s) = \frac{d_l s^l + d_{l-2} s^{l-2} + \dots + d_0}{c_{l-1} s^{l-1} + c_{l-3} s^{l-3} + \dots + c_1 s}, \quad (2)$$

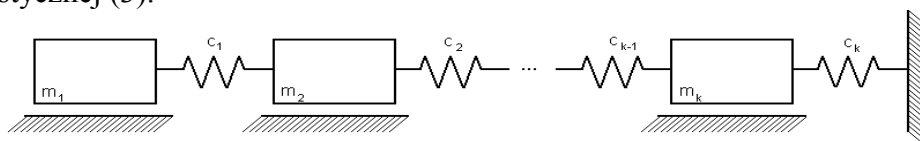
gdzie:  $d_l, d_{l-2}, \dots, d_0, c_{l-1}, c_{l-3}, \dots, c_1$  - liczby rzeczywiste otrzymane przez rozwinięcie funkcji (1).

W wyniku rozkładu powyższej funkcji na ułamek łańcuchowy można wyznaczyć wartości parametrów inercyjnych i sprężystych dyskretnych układów drgających w postaci:

$$U(s) = U_s^{(1)}(s) + \frac{1}{V_s^{(1)}(s) + \frac{1}{U_s^{(2)}(s) + \frac{1}{V_s^{(2)} + \frac{\vdots}{U_s^{(k-1)}(s) + \frac{1}{V_s^{(k)}(s)}}}}, \quad (3)$$

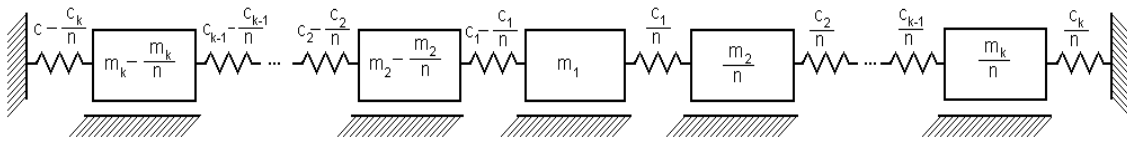
gdzie:  $U^{(1)}(s) = m_U^{(1)} s$ ,  $V^{(1)}(s) = \frac{s}{c_V^{(1)}}$ , ...,  $V^{(k-1)}(s) = \frac{s}{c_V^{(k-1)}}$ ,  $U^{(k)}(s) = m_U^{(k)} s$ .

Na rys.1 przedstawiono strukturę układu dynamicznego odpowiadającą funkcji charakterystycznej (3).



Rys. 1. Model dyskretny układu otrzymany w wyniku syntezy metodą rozkładu charakterystyki dynamicznej

Otrzymany w wyniku syntezy charakterystyki dynamicznej model układu (rys.1) należy poddać modyfikacji, polegającej na proporcjonalnym rozłożeniu parametrów inercyjnych i sprężystych elementów układu. W rezultacie otrzymuje się układ z nałożonymi dwoma utwierdzeniami (rys.3). Spełnia on żądane wymagania w postaci ciągu częstości rezonansowych, będących obszarami antyrezonansowymi i biegunami rozpatrywanej charakterystyki dynamicznej. Tak zmodyfikowany układ może być wykorzystany do projektowania systemów belkowych.



Rys. 2. Zmodyfikowany model układu dyskretnego

Druga z metod syntezy (metoda algorytmu wyznaczania dwójników typu sprężystego), wykorzystywana w projektowaniu układów belkowych, ze względu na żądane widmo częstości, dotyczy funkcji powolności w postaci (2) [4,6].

Dzieląc współczynnik stojący przy najniższej potędze licznika przez współczynnik stojący przy najniższej potędze mianownika funkcji  $U(s)$  (2), otrzymuje się:

$$H \frac{d_0}{c_1 s} = \frac{c}{s}, \quad (4)$$

gdzie:  $\frac{c}{s}$  - odpowiada elementowi o charakterze sprężystym w zbiorze powolności.

Zapisując mianownik funkcji powolności (2) w postaci:

$$s(c_k s^{k-1} + c_{k-1} s^{k-2} + \dots + c_1). \quad (5)$$

po pomnożeniu (5) przez (4) otrzymuje się:

$$H \frac{d_0}{c_1} (c_k s^{k-1} + c_{k-1} s^{k-2} + \dots + c_1). \quad (6)$$

Tak otrzymany wielomian, odjęty od licznika funkcji powolności (2), przyjmuje formę:

$$H(d_1 s^1 + d_{l-1} s^{l-1} + \dots + d_0) - H \frac{d_0}{c_1} (c_k s^{k-1} + c_{k-1} s^{k-2} + \dots + c_1), \quad (7)$$

lub

$$H(d_1 s^1 + d_{l-1}^1 s^{l-2} + \dots + d_1^1 s) \quad (8)$$

Ostatecznie więc po wykonaniu działań (4÷8) funkcję powolności  $U(s)$  (2) można zapisać w postaci:

$$U(s) = H \frac{d_0}{c_1 s} + H \frac{s(d_1 s^{l-1} + d_{l-1}^1 s^{l-2} + \dots + d_1^1)}{s(c_k s^{k-1} + c_{k-1} s^{k-2} + \dots + c_1)} = \frac{c}{s} + U(s), \quad (9)$$

gdzie:  $U(s)$  - otrzymana powolność, którą poddaje się dalszej syntezie metodą jej rozkładu na ułamek łańcuchowy lub ułamki proste.

W przypadku wyznaczania  $p$  elementów typu  $\frac{c}{s}$  należy rozpatrywaną charakterystykę w postaci (2) pomnożyć przez  $\frac{s^{p-1}}{s^{p-1}}$ . Postępowanie takie spowodowane jest koniecznością uzyskania w funkcji odwrotności powolności (1) lub ruchliwości dodatkowych obszarów antyrezonansowych (dodatkowych zer), które oznaczają liczbę  $p-1$  utwierdzeń zsyntezowanego układu. Ponadto należy przyjąć wartości liczbowe kolejno wyznaczanych  $p$  elementów typu sprężystego, otrzymywanych w wyniku syntezy funkcji powolności  $U(s)$  (2) z przedziału  $\left(0, H \frac{d_0}{c_1}\right)$ . Gdy wartość wyznaczonej sprężystości nie należy do przedziału  $\left(0, H \frac{d_0}{c_1}\right)$ , wtedy dalsze stosowanie tej metody jest niemożliwe, ponieważ elementy typu inercyjnego, otrzymywane w kolejnych krokach syntezy, przyjmują wartości ujemne, czyli układ staje się niestabilny.

## 2.2. Algorytm projektowania układów belkowych o żądanym widmie częstości metodami syntezy układów dyskretnych

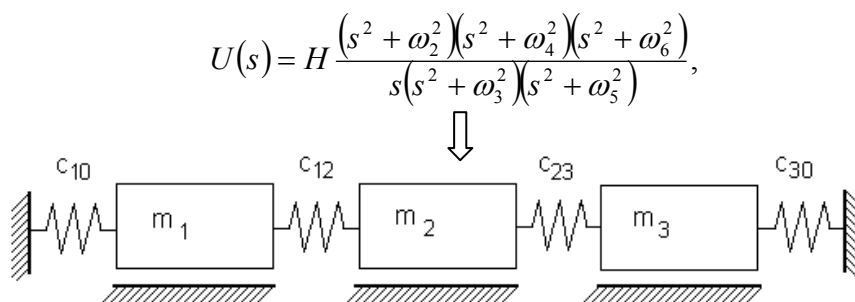
Niech dane będą własności dynamiczne poszukiwanego układu belkowego w postaci częstości rezonansowych. W przypadku tak przyjętych własności należy wyznaczyć charakterystykę dynamiczną w formie funkcji powolności  $U(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$ , gdzie  $L(s) = \prod_{i=0}^n (s^2 + s_{2i}^2)$ . Mianownik funkcji powolności (synteza metodą algorytmu wyznaczania dwójników typu sprężystego) oblicza się na podstawie wzoru:

$$M(s) = \frac{dL(s)}{ds}, \quad (10)$$

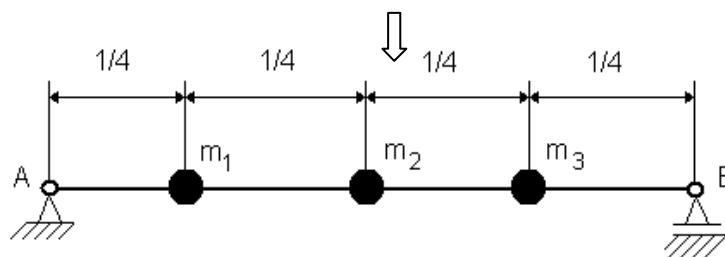
gdzie  $s$  - operator Laplace'a.

Takie wyznaczenie częstości antyrezonansowych dotyczy syntezy układów ciągłych. Wyznaczona funkcja charakterystyczna  $U(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$  jest funkcją powolności opisującą własności dynamiczne poszukiwanego układu.

W przypadku tak określonych własności dynamicznych sformułowano algorytm syntezy układów belkowych ze względu na dostosowanie układu do żądanej wartości widma częstości. Algorytm ten przedstawiono w formie graficznej na rys.3÷7.



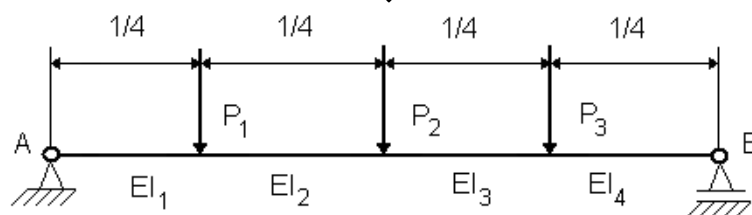
Rys. 3. Model obustronnie utwierdzonego układu o trzech stopniach swobody



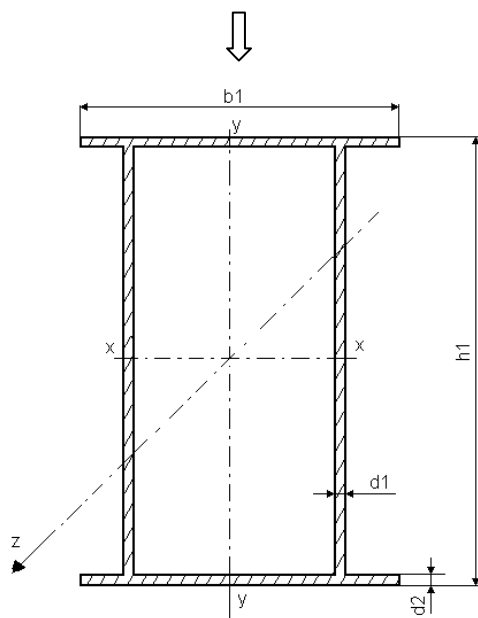
Rys. 4. Model układu o trzech masach skupionych uwzględniający długość belki

$$\text{Macierz sztywności } A = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

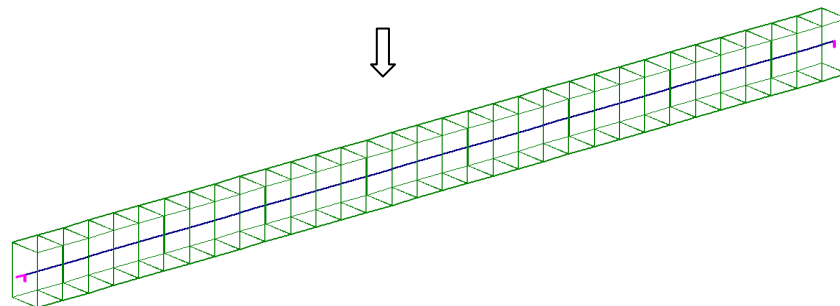
$$\text{Macierz współczynników wpływu } \delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$



Rys. 5. Model belki o długości 4l



Rys.6. Przekrój poprzeczny belki



Rys.7. Belka otrzymana w wyniku syntezy

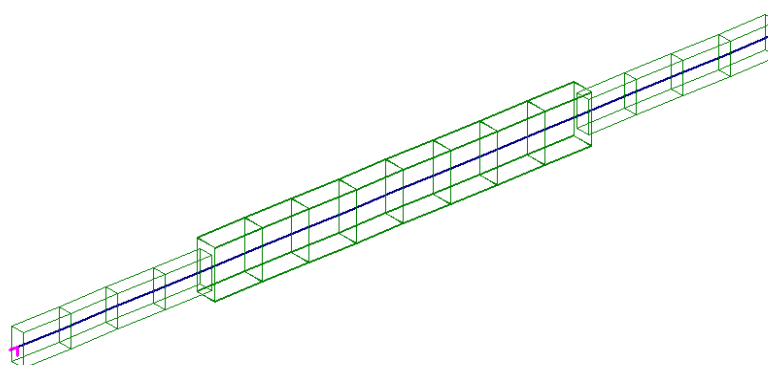
### 3. PRZYKŁAD LICZBOWY

Przyjmuje się, że poszukiwany układ spełnia wymagania określone w postaci ciągu częstości rezonansowych:  $\omega_2 = 32,24 \frac{rad}{s}$ ,  $\omega_4 = 117,7 \frac{rad}{s}$ ,  $\omega_6 = 248,6 \frac{rad}{s}$ .

Stosując syntezę metodą proporcjonalnego rozkładu parametrów, otrzymuje się następujący układ belkowy:

Tabela 1. Dane wymiarowe przekroju otrzymane w wyniku syntezy metodą proporcjonalnego rozkładu parametrów

Przekrój 1		Przekrój 2		Przekrój 3		Przekrój 4	
$I_1 = 9.054 \cdot 10^{-3} [m^4]$		$I_2 = 0.032 [m^4]$		$I_3 = 0.032 [m^4]$		$I_4 = 9.054 \cdot 10^{-3} [m^4]$	
$h_1 [m]$	1434	$h_1 [m]$	2178	$h_1 [m]$	2178	$h_1 [m]$	1434
$h_2 [m]$	1414	$h_2 [m]$	2158	$h_2 [m]$	2158	$h_2 [m]$	1414
$b_1 [m]$	614	$b_1 [m]$	934	$b_1 [m]$	934	$b_1 [m]$	614
$b_2 [m]$	602	$b_2 [m]$	922	$b_2 [m]$	922	$b_2 [m]$	602



Rys. 8. Przekrój otrzymany w wyniku syntezy metodą proporcjonalnego rozkładu parametrów

Poprawność otrzymanych rezultatów obliczeń sprawdzono, wykorzystując program ABC. Wyniki ilustruje rys.9.

Nr	w[1/s]	f[Hz]	T[sek]	Błąd[%]
1	35,97	5,725	0,1747	0,0
2	123,9	19,72	0,05071	0,0
3	244,5	38,91	0,0257	0,0
4	296,1	47,13	0,02122	0,0
5	558,3	88,86	0,01125	0,0
6	760,6	121,1	0,008261	0,0
7	839	133,5	0,007489	0,0
8	1213	193,1	0,00518	5,736
9	1247	198,5	0,005039	98,74
10	1758	279,8	0,003574	62

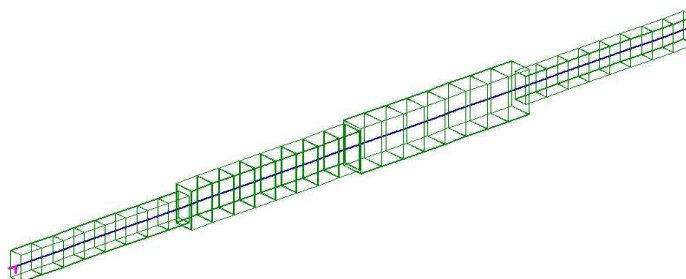
Liczba wykonanych iteracji: 16  
Założona dokładność obliczeń: 0,01%

Rys. 9. Sprawdzenie poprawności otrzymanych wyników z wykorzystaniem programu ABC

Rezultaty badań otrzymane w wyniku zastosowania syntezy metodą algorytmu wyznaczania dwójników typu sprężystego zamieszczono w tablicy 2.

Tabela 2. Dane wymiarowe przekroju otrzymane w wyniku syntezy metodą algorytmu wyznaczania dwójników typu sprężystego

Przekrój 1		Przekrój 2		Przekrój 3		Przekrój 4	
$I_1 = 7.659 \cdot 10^{-3} [m^4]$		$I_2 = 0.025 [m^4]$		$I_3 = 0.034 [m^4]$		$I_4 = 8.77 \cdot 10^{-3} [m^4]$	
$h_1 [m]$	1357	$h_1 [m]$	2007	$h_1 [m]$	2223	$h_1 [m]$	1419
$h_2 [m]$	1337	$h_2 [m]$	1987	$h_2 [m]$	2203	$h_2 [m]$	1399
$b_1 [m]$	581	$b_1 [m]$	860	$b_1 [m]$	953	$b_1 [m]$	608
$b_2 [m]$	569	$b_2 [m]$	848	$b_2 [m]$	941	$b_2 [m]$	596



Rys.10. Przekrój otrzymany w wyniku syntezy metodą algorytmu wyznaczania dwójników typu sprężystego

Nr	w[1/s]	f[Hz]	T[sek]	Błąd[%]
1	34,71	5,524	0,181	0,0
2	120,1	19,11	0,05232	0,0
3	239,7	38,15	0,02621	0,0
4	285,8	45,49	0,02198	0,0
5	541,7	86,21	0,0116	0,0
6	771,6	122,8	0,008143	0,0
7	811	129,1	0,007747	0,0
8	1137	181	0,005526	0,1828
9	1236	196,7	0,005083	0,0
10	1763	280,6	0,003564	0,0

Liczba wykonanych iteracji: 16  
Założona dokładność obliczeń: 0,01%

Rys.11. Sprawdzenie poprawności wyników syntezy otrzymanych z wykorzystaniem programu ABC

#### 4. WNIOSKI

Niniejszy praca dotyczy sformułowania rozwiązania syntezy układów belkowych. Jest propozycją obszarów antyrezonansowych (doboru zer) oraz próbą wskazania ich znaczącego wpływu na wartości parametrów poszukiwanego układu.

Tak sformułowany problem wymagał przeprowadzenia licznych badań, w których wyniku można sformułować następujące wnioski:

- obszary antyrezonansowe (zera) mają znaczący wpływ na przebieg syntezy,
- dowolny dobór częstości antyrezonansowych prowadzi do błędnych wyników,
- dla układów o stałym przekroju obszary antyrezonansowe (zera) powinno dobierać się na podstawie równania (10),
- podczas syntezy metodą proporcjonalnego rozmieszczenia parametrów układu obszary antyrezonansowe (zera) nie wpływają znacząco na przekroje badanych układów.

Niniejsza praca jest również próbą wskazania nowych możliwości oraz kierunku badań w projektowaniu podzespołów maszyn o żądanym widmie częstości.

#### LITERATURA

1. Bellert S.: Prace wybrane. Warszawa : 1980, PWN.
2. Bellert S., Woźniacki H.: Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. Warszawa: WNT, 1968.
3. Buchacz A., Dymarek A., Dzitkowski T.: Synthesis of discrete, continuous and discrete-continuous vibrating systems represented by graphs. W: Sixth International Scientific and Engineering Conference - Machine-Building and Technosphere on the Border of the XXI Century, 3, Donetsk 1999, p. 243-245.
4. Buchacz A., Dymarek A., Dzitkowski T.: Projektowanie i badanie wrażliwości ciągłych i dyskretno-ciągłych układów mechanicznych o żądanym widmie częstości w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Monografia. Gliwice: Wyd. Pol. Śl., 2005.
5. Cyganek G.: Projektowanie układów mechanicznych w aspekcie żądanego widma częstości. Praca magisterska. Gliwice 2004.
6. Dymarek A.: Odwrotne zadanie dynamiki tłumionych mechanicznych układów drgających w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Praca doktorska. Gliwice : Pol. Śl., 2001.
7. Wspomaganie konstruowania układów redukcji drgań i hałasu maszyn. Warszawa : WNT, 2001.

*Część badań zrealizowano w ramach projektu badawczego N 502 071 31/3719  
finansowanego przez Komitet Badań Naukowych w latach 2006 – 2009*

#### **THE SYNTHESIS OF BIN SYSTEMS WITH THE REQUIRED FREQUENCY SPECTRUM**

Summary. The paper is focused on an attempt to design continuous vibrating mechanical systems as subsystems of the machines with the required dynamical characteristics. Such task may be classified as a problem diverse to the dynamics and vibration isolation of machine subsystems. This paper presents the synthesis of continuous vibrating mechanical systems with certain requirements. The method then is connection of methods of synthesis of discrete systems and continuous mechanical systems analysis. The synthesis of continuous mechanical system has been presented. The synthesis results have been proved correct into ABC Rama.