

## SPRZĘŻONE DRGANIA SŁUPA OŚWIETLENIOWEGO

WŁADYSŁAW KALIŃSKI, JERZY ŚWIDER

*Institut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania,  
Politechnika Śląska  
e-mail: wladyslaw.kalinski@polsl.pl, jerzy.swider@polsl.pl*

Streszczenie. W drgających układach o wielu stopniach swobody często daje się zaobserwować samoistne zanikanie jednej z postaci drgań i powstawanie w jej miejsce innej. Występuje tzw. „przepompowywanie” energii między postaciami drgań, co ma miejsce wówczas, gdy naturalne częstości drgań głównych są sobie równe lub bliskie. Takie periodyczne zmiany amplitudy dwóch postaci drgań zaobserwowano podczas pomiarów gasnących drgań poprzecznych aluminiowych słupów oświetleniowych o wysokości 12,5; 14,5; 16 m, co opisano w niniejszej pracy.

### 1. WSTĘP

Właściwości dynamiczne słupów oświetleniowych określone są m.in. przez częstotliwości drgań własnych i logarytmiczny dekrement tłumienia drgań. Obiekty te mają regularny kształt, co zezwala na stosowanie do określenia tych właściwości uproszczonych analitycznych metod. Jednak warunkiem jest ich sprawdzenie.

W dostępnych normach brak jest odpowiednich odniesień oraz nie są znane wyniki eksperymentalnych badań własności dynamicznych dla stożkowych słupów aluminiowych z dodatkową masą umieszczoną na ich szczycie [6,7,8].

Wykonane badania dotyczą wyznaczenia częstotliwości drgań własnych i logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań, które są podstawowymi cechami dynamicznymi. Pozostałe, takie jak postać drgań i równoważne masy, można z dostateczną dokładnością określić metodami analitycznymi.

Celem badań było wyznaczenie naturalnej częstości drgań i logarytmicznego dekrementu tłumienia słupów oświetleniowych wykonanych ze stopu aluminium. Właściwości te określone zostały dla aluminiowych słupów o wysokości 12,5 m, 14,5 m, 16 m oraz aluminiowego słupa, przeznaczonego do zawieszania sygnalizacji świateł drogowych z wysięgnikiem typu SALSYG 65-7 (SYG) o wysokości 6 m, przeznaczonego do zainstalowania na wysięgniku zespołu sygnalizacji świetlnej [1-4].

Podczas wykonywania pomiarów i rejestracji przyspieszenia drgań końcowego punktu słupów stwierdzono występowanie zjawiska charakterystycznego dla sprzężonych drgań, które obserwuje się w przypadku tzw. wahadła Wilberforce'a. Zjawisko to polegało na okresowej, wzajemnej zmianie amplitudy poprzecznych drgań wierzchołka masztu dla dwóch postaci drgań lub powstawaniu drgań skrętnych w miejscu zainstalowania zespołu oświetleniowego

## 2. ZJAWISKO PRZEKAZYWANIA ENERGII MIĘDZY MODAMI DRGAŃ

W układach o wielu stopniach swobody, przy spełnieniu odpowiednich warunków, obserwuje się ciągłą, wzajemną zamianę postaci drgań wskutek przepływu energii między tymi postaciami ruchu. Charakterystycznym przykładem takiego zjawiska są drgania wahadła Wilberforce'a [1,4].

Wahadło Wilberforce'a utworzone jest z masy zawieszonyj na walcowej sprężynie. Przy odpowiednim pobudzeniu masy do drgań pionowych uzyskuje ona dwa stopnie swobody wskutek sprzężenia pionowego i obrotowego jej ruchu. Wynika to z mechanicznych własności sprężyny walcowej, które dla małych wartości:  $f$ ,  $\Delta\varphi$ , z dostatecznym przybliżeniem można opisać zależnościami:

$$f = \frac{\pi D^2 z}{4EI \cos \psi} \left[ PD \left( \frac{EI}{GI_t} \cos^2 \psi + \sin^2 \psi \right) + M \left( \frac{EI}{GI_t} - 1 \right) \sin 2\psi \right], \quad (1)$$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi Dz}{EI \cos \psi} \left[ \frac{PD}{4} \left( \frac{EI}{GI_t} - 1 \right) \sin 2\psi + M \left( \frac{EI}{GI_t} \sin^2 \psi + \cos^2 \psi \right) \right], \quad (2)$$

gdzie:

$P$  – osiowe obciążenie sprężyny,

$M$  – moment pary sił skręcający sprężynę względem jej osi podłużnej,

$f$  – ugięcie osiowe sprężyny,

$\Delta\varphi$  – skrócenie sprężyny względem jej osi podłużnej,

$\psi$  – kąt pochylenia zwojów sprężyny, oraz

geometryczne i materiałowe konstrukcyjne cechy sprężyny.

Z zależności (1) i (2) wynika, że parametry:  $P$ ,  $M$ ,  $f$ ,  $\Delta\varphi$  wzajemnie od siebie zależą oraz że dla swobodnego jednego z końców sprężyny występują dwa jego ruchy: przemieszczenie i skrócenie.

### 2.1. Równania ruchu

Równania drgań swobodnych układu sprzężonego można uzyskać za pomocą równania Lagrange'a, przy założeniu, że wszystkie więzy układu są stacjonarne i holonomiczne, natomiast działające siły mają potencjał.

Jeśli przyjąć dla układu sprzężonego funkcję Lagrange'a w postaci:

$$L = \frac{1}{2} [m\dot{y}^2 + J\dot{\phi}^2 - k_y y^2 - k_\phi \phi^2 - \varepsilon y\phi], \quad (3)$$

gdzie:

$y$  – ugięcie sprężyny, odpowiadające przemieszczeniu masy skupionej  $m$ ,

$\phi$  – kąt osiowego skrócenia sprężyny,

$m$ ,  $J$  – masa i osiowy centralny masowy jej moment, odpowiednio,

$k_y$  – sztywność osiowa sprężyny,

$k_\phi$  – sztywność osiowego skrócenia sprężyny,

$\varepsilon$  – współczynnik sprzężenia drgań dla współrzędnych  $y$  i  $\phi$ ,

to otrzymuje się następujące różniczkowe równania ruchu drgań sprzężonych dla układu o dwóch stopniach swobody:

$$m\ddot{y} + k_y y + 0,5\varepsilon\phi = 0 \quad (4.1)$$

$$J\ddot{\phi} + k_\phi \phi + 0,5\varepsilon y = 0 \quad (4.2)$$

Z równań (4) można po przekształceniach uzyskać:

$$\frac{d^4 \phi}{dt^4} + (\omega_y^2 + \omega_\phi^2) \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \left( \omega_y^2 \omega_\phi^2 - \frac{\varepsilon^2}{4mJ} \right) \phi = 0, \quad (5)$$

gdzie:

$$\omega_y^2 = \frac{k_y}{m}, \quad \omega_\phi^2 = \frac{k_\phi}{J}. \quad (5)$$

Po podstawieniu do równania (5) ogólnego rozwiązania w postaci

$$\phi(t) = Ce^{i\omega t},$$

gdzie  $i^2 = -1$ , wyznaczyć można naturalne częstotliwości drgań:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ \omega_y^2 + \omega_\phi^2 \pm \sqrt{(\omega_y^2 - \omega_\phi^2)^2 + \frac{\varepsilon^2}{mJ}} \right], \quad (6)$$

lub:

$$\omega_{1,2} = \omega \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4mJ}} = \omega \pm 0,5\omega_d, \quad (7)$$

gdzie:

$\omega = \omega_y = \omega_\phi$ , oraz

częstość dudnienia:

$$\omega_d = \frac{\varepsilon}{2\omega\sqrt{mJ}} = \omega_1 - \omega_2. \quad (8)$$

## 2.2. Rozwiązanie równań ruchu sprzężonego

Ponieważ rozwiązaniem równania (5) jest funkcja:

$$\phi(t) = A_1 \sin \omega_1(t) + A_2 \cos \omega_1(t) + A_3 \sin \omega_2(t) + A_4 \cos \omega_2(t), \quad (9)$$

to

$$\ddot{\phi}(t) = \omega_1^2 [A_1 \sin \omega_1(t) + A_2 \cos \omega_1(t)] - \omega_2^2 [A_3 \sin \omega_2(t) + A_4 \cos \omega_2(t)], \quad (10)$$

a z równania (4.2) otrzymuje się:

$$y(t) = \frac{2J\omega_1^2}{\varepsilon} [A_1 \sin \omega_1(t) + A_2 \cos \omega_1(t)] + \frac{2J\omega_2^2}{\varepsilon} [A_3 \sin \omega_2(t) + A_4 \cos \omega_2(t)] + \\ - \frac{2k_\phi}{\varepsilon} [A_1 \sin \omega_1(t) + A_2 \cos \omega_1(t) + A_3 \sin \omega_2(t) + A_4 \cos \omega_2(t)], \quad (11)$$

a następnie:

$$\dot{y}(t) = \frac{2J\omega_1^3}{\varepsilon} [A_1 \cos \omega_1(t) - A_2 \sin \omega_1(t)] + \frac{2J\omega_2^3}{\varepsilon} [A_3 \cos \omega_2(t) - A_4 \sin \omega_2(t)] + \\ - \frac{2k_\phi}{\varepsilon} [A_1 \omega_1 \cos \omega_1(t) - A_2 \omega_1 \sin \omega_1(t) + A_3 \omega_2 \cos \omega_2(t) - A_4 \omega_2 \sin \omega_2(t)]. \quad (12)$$

Dla warunków początkowych  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ ,  $\phi(0) = \phi_0$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0$ ;  $A_1 = A_3 = 0$ , otrzymuje się następujące stałe całkowania:

$$A_2 = \frac{\frac{\varepsilon y_0}{2J} - (\omega_2^2 - \omega_\phi^2) \phi_0}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \quad (13)$$

$$A_4 = \frac{\varepsilon y_0 - (\omega_1^2 - \omega_\phi^2) \phi_0}{\omega_1^2 - \omega_2^2}. \quad (14)$$

Dla współrzędnych głównych otrzymuje się następujące zależności:

$$\text{dla pierwszej mody} - y_0 = \frac{2J}{\varepsilon} (\omega_1^2 - \omega_\phi^2) \phi_0 = \sqrt{\frac{J}{m}} \phi_0,$$

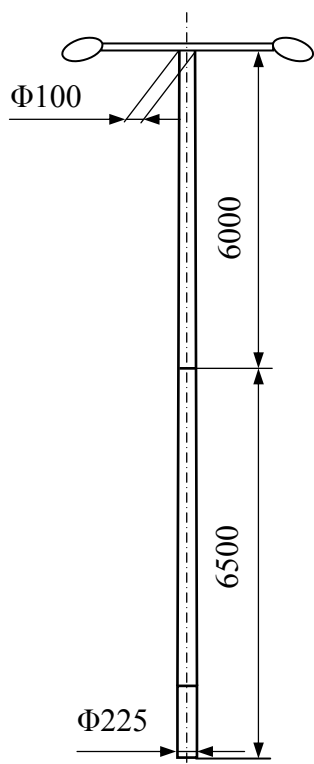
$$\text{dla drugiej mody} - y_0 = \frac{2J}{\varepsilon} (\omega_2^2 - \omega_\phi^2) \phi_0 = -\sqrt{\frac{J}{m}} \phi_0.$$

Współczynnik sprzężenia drgań wyraża się formułą:

$$\varepsilon = (\omega_1^2 - \omega_2^2) \sqrt{mJ} = 2\omega\omega_d \sqrt{mJ}. \quad (15)$$

Zależność (15) umożliwia wyznaczenie wartości współczynnika sprzężenia drgań, można tego dokonać na podstawie przeprowadzonego eksperymentu.

### 3. WYBRANE WYNIKI POMIARÓW DRGAŃ SŁUPÓW



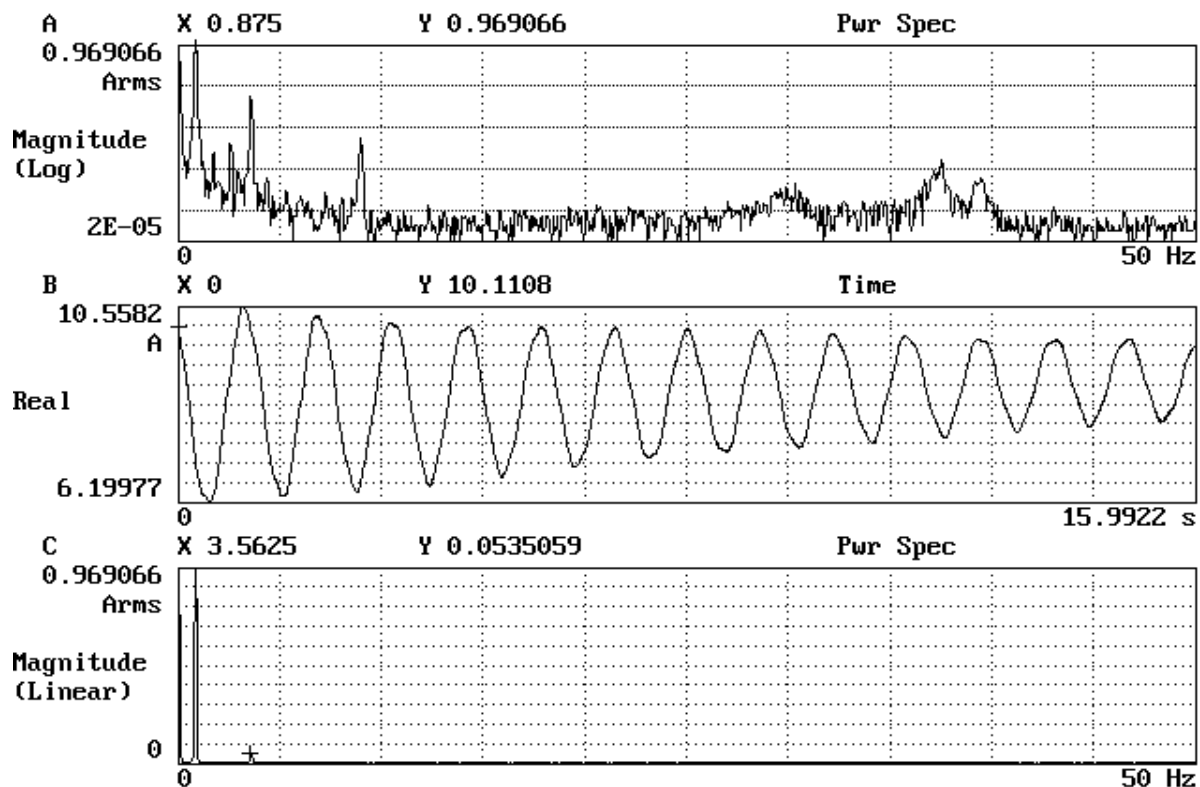
Rys. 1. Schemat słupa 12,5 m, z zespołem świetlnym

Do przeprowadzenia badań zastosowano dynamiczny dwukanałowy analizator sygnału firmy Hewlett Packard, typu HP 36665A. Wyniki badań numerycznych wykonanych w procesie projektowania słupów wykazały [5], że słupy oświetleniowe charakteryzują często mniejsze od 1 Hz częstotliwości naturalnych drgań. Oznacza to, że drgania takie charakteryzują bardzo małe wartości przyspieszenia drgań. W takim przypadku pomiary wykonano za pomocą sejsmicznego przetwornika przyspieszenia drgań firmy ICP® typu M 393B12. Zastosowany przetwornik cechują następujące istotne własności zamieszczone w certyfikacie przetwornika:

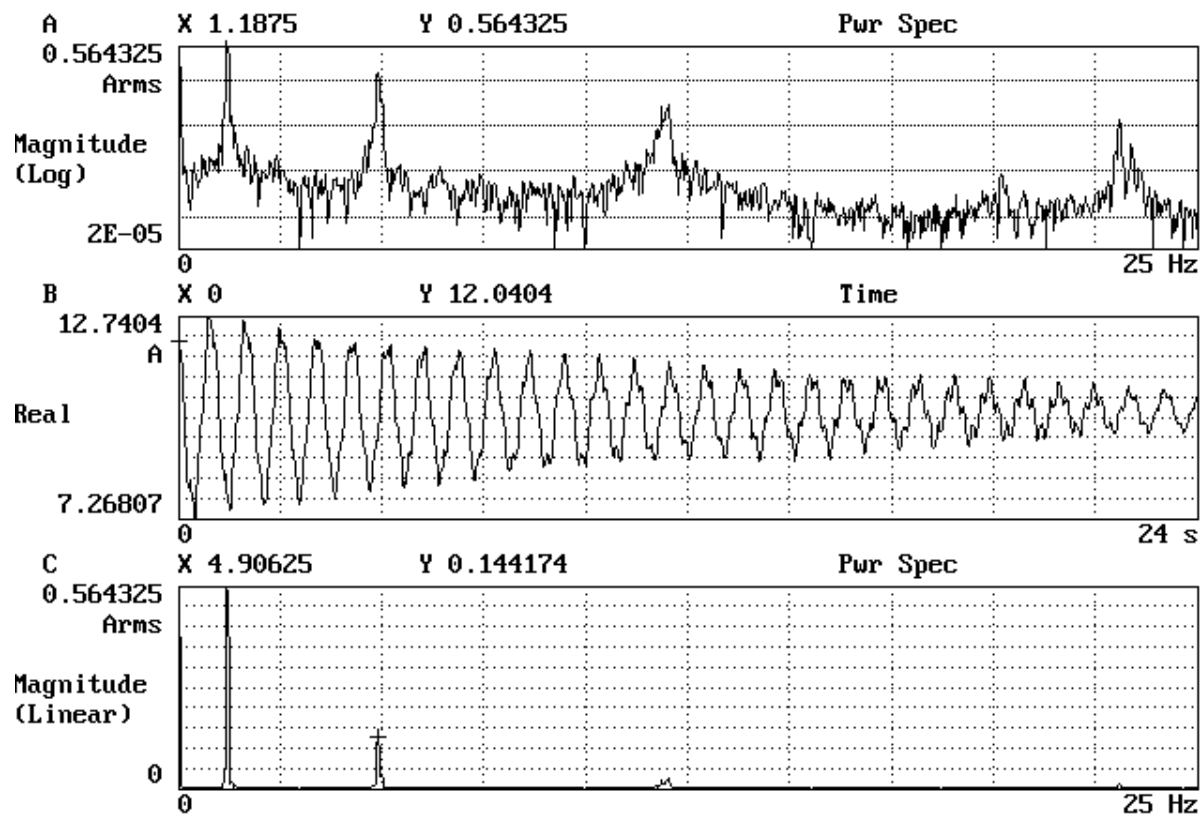
- współczynnik czułości – 978,69 mV/ms<sup>-2</sup>,
- rozdzielczość – 0,078 mm/s<sup>-2</sup>,
- bezwymiarowy współczynnik czułości poprzecznej – 0,7 %,
- zakres – 0,5 g (4,90 m/s<sup>-2</sup>),
- pomiarowe pasmo częstotliwości (± 5 %) 0,15 – 1000 Hz.

Przykładowe czasowe przebiegi przyspieszenia poprzecznych drgań końca maszty słupa pokazano na rys. 2-4.

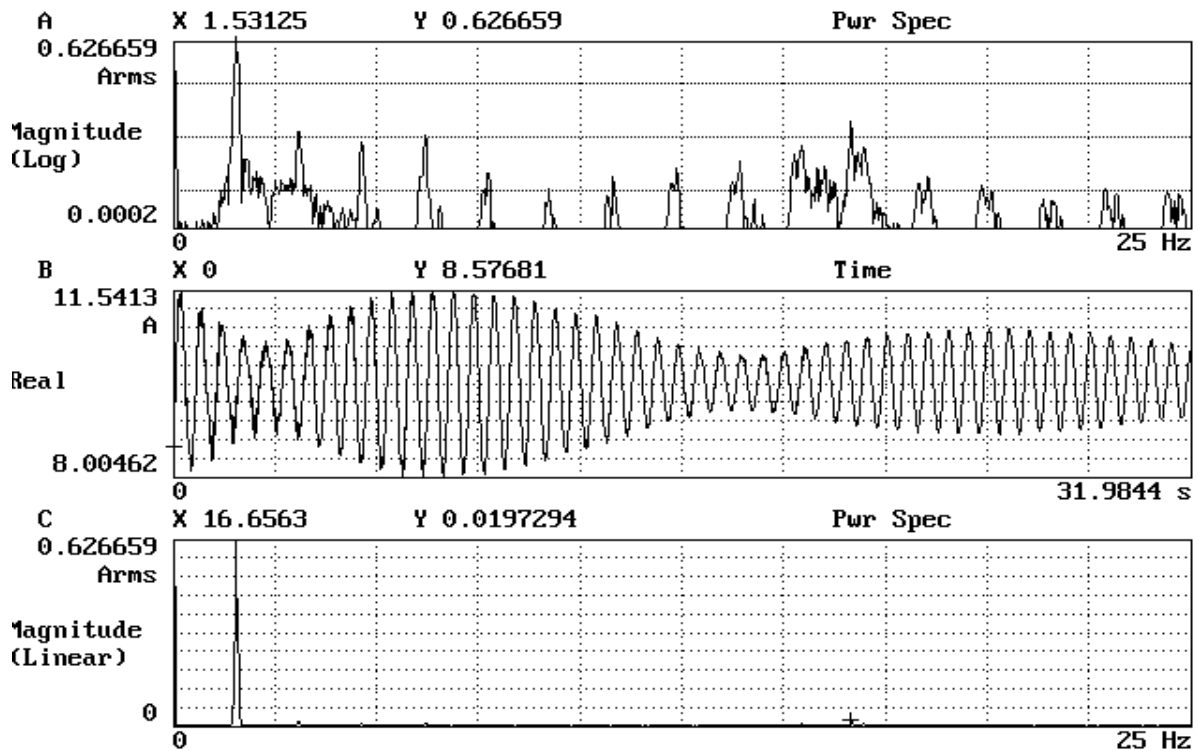
Na rys. 5 i 6 pokazano wyniki przykładowej symulacji drgań sprzężonych, w których występuje rozproszenie energii. Na ilustracjach tych zamieszczono ponadto procedury rysowania przebiegów czasowych w formalizmie biblioteki programu Mathematica [3,4].



Rys. 2. Lampa sygnalizacyjna obciążona masami modelującymi zespoły oświetleniowe; drgania skrętne słupa



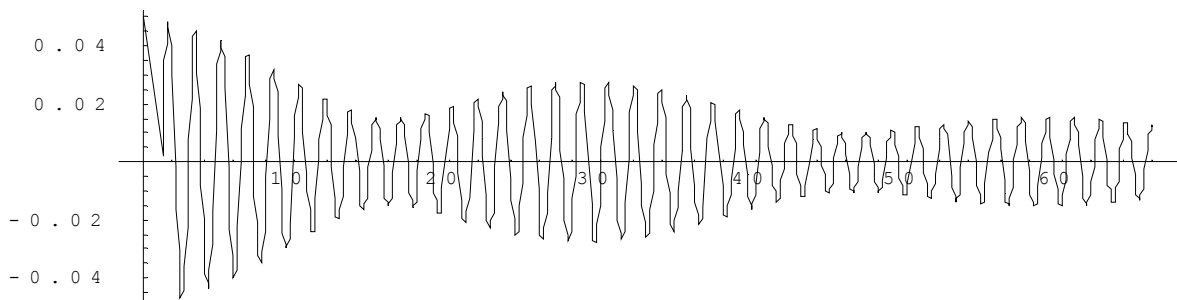
Rys. 3. Słup 14,5 m, bez zespołu oświetleniowego



Rys. 4. Słup 12,5 m bez wzmocnionego dołu, ciągła, powolna zamiana postaci drgań

$m = 0.2$ ;  $k = 2.672$ ;  $e = 0.00246$ ;  $J = 0.00006$ ;  $K = 0.000769$ ;  $b = 0.004$ ;  $B = 0.000004$   
 solution =

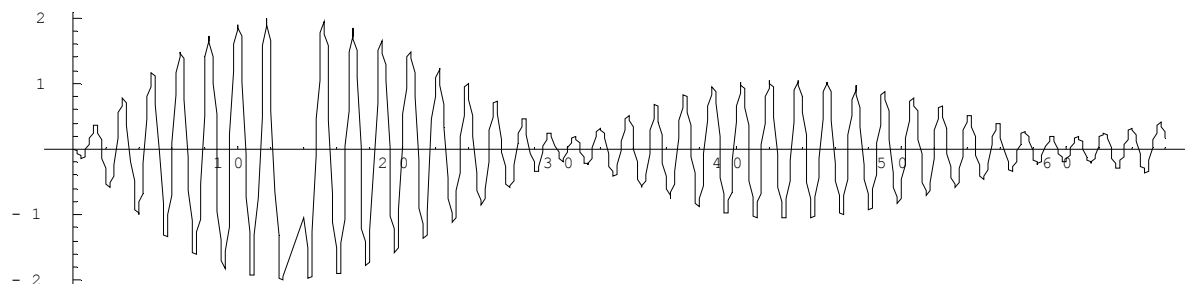
```
NDSolve[{yy''[t] + b/m*yy'[t] + k/m*yy[t] + e/m*ff[t] == 0,
  ff''[t] + B/J*ff'[t] + K/J*ff[t] + e/J*yy[t] == 0, yy[0] == .05, ff[0] == 0,
  yy'[0] == 0, ff'[0] == 0}, {yy, ff}, {t, 0, 70}, MaxSteps -> 10000];
Plot[Evaluate[{yy[t]} /. solution], {t, 0, 66}]
```



Rys. 5a. Czasowy przebieg przemieszczenia drgań i procedura jego rysowania

$m = 0.2$ ;  $k = 2.672$ ;  $e = 0.00246$ ;  $J = 0.00006$ ;  $K = 0.000769$ ;  $b = 0.004$ ;  $B = 0.000004$   
 solution =

```
NDSolve[{yy''[t] + b/m*yy'[t] + k/m*yy[t] + e/m*ff[t] == 0,
  ff''[t] + B/J*ff'[t] + K/J*ff[t] + e/J*yy[t] == 0, yy[0] == .05, ff[0] == 0,
  yy'[0] == 0, ff'[0] == 0}, {yy, ff}, {t, 0, 70}, MaxSteps -> 10000];
Plot[Evaluate[{ff[t]} /. solution], {t, 0, 66}]
```



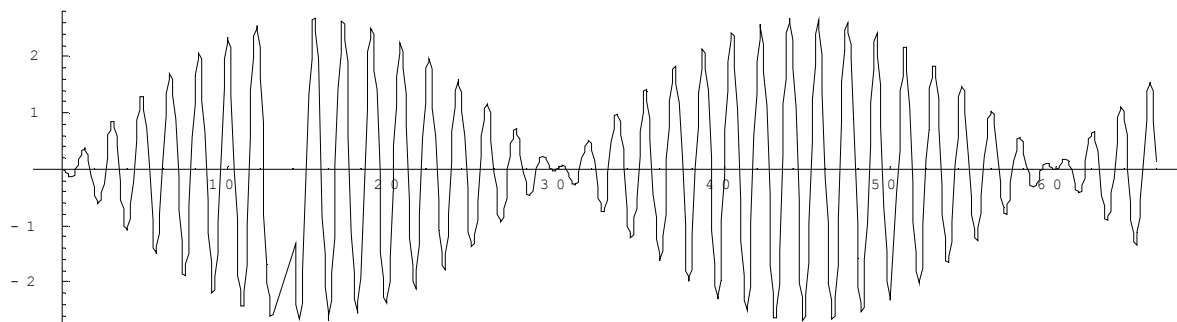
Rys. 5b. Czasowy przebieg drgań skrętnych i procedura jego rysowania

$m = 0.2$ ;  $k = 2.672$ ;  $e = 0.00246$ ;  $J = 0.00006$ ;  $K = 0.000769$ ;

**solution =**

```
NDSolve[{yy''[t] + k/m*yy[t] + e/m*ff[t] == 0,
  ff''[t] + K/J*ff[t] + e/J*yy[t] == 0, yy[0] == .05, ff[0] == 0, yy'[0] == 0,
  ff'[0] == 0}, {yy, ff}, {t, 0, 70}, MaxSteps -> 10000];
```

```
Plot[Evaluate[{ff[t]} /. solution], {t, 0, 66}]
```



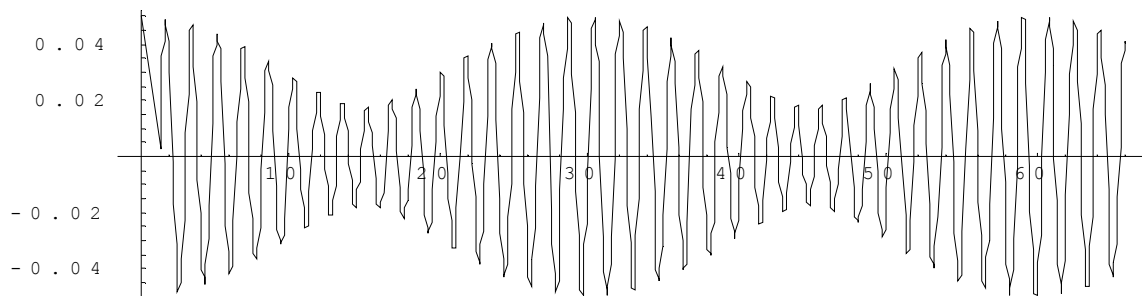
Rys. 6a. Drgania skrętne dla niewielkiego rozstrojenia układu, nie jest spełniony teoretyczny warunek idealnego sprzężenia drgań

$m = 0.2$ ;  $k = 2.672$ ;  $e = 0.00246$ ;  $J = 0.00006$ ;  $K = 0.000769$ ;

**solution =**

```
NDSolve[{yy''[t] + k/m*yy[t] + e/m*ff[t] == 0,
  ff''[t] + K/J*ff[t] + e/J*yy[t] == 0, yy[0] == .05, ff[0] == 0, yy'[0] == 0,
  ff'[0] == 0}, {yy, ff}, {t, 0, 70}, MaxSteps -> 10000];
```

```
Plot[Evaluate[{yy[t]} /. solution], {t, 0, 66}]
```



Rys. 6b. Drgania poprzeczne dla niewielkiego rozstrojenia układu, nie jest spełniony teoretyczny warunek idealnego sprzężenia drgań

W przypadku niewielkiego rozstrojenia częstości drgań głównych układu występuje niepełny zanik jednej z postaci drgań, co zaobserwowano podczas badań słupów.

#### 4. WNIOSKI

Należy unikać sprzężonych drgań słupów ze względu na możliwość utraty sprzężenia zespołu oświetleniowego ze słupem. Ponieważ sprzężenie drgań ma miejsce dla prostoliniowej osi wzdłużnej słupa, gdy występuje trudna do uniknięcia mimośrodowość osadzenia zespołu lamp, należy uwzględnić w projektowaniu wpływ masy i osiowego momentu bezwładności lamp na ich częstości drgań poprzecznych i skrętnych na słupie.

#### LITERATURA

1. Berg R. E., Marshall T. S.: Wilberforce pendulum oscillations and normal modes. "American J. Phys." 1991, 59, 10, p. 32 – 38.
2. Kaliński W., Pillich W.: Projekt celowy POW-566-2004 : uruchomienie produkcji aluminiowych masztów oświetleniowych, flagowych oraz drogowych sygnalizatorów świetlnych. Gliwice 2008.
3. Kaliński W., Pillich W.: Drgania słupów oświetleniowych. „Magazyn Autostrady” 2007, nr 4, 2007, s. 22-24.
4. Malenbaum M., Campbell J. P. : Wilberforce pendulum, <http://www.phy.davidson.edu/StuHome/pecampbell/Wilberforce/Setup>.
5. Калинин В., Пиллих В.: Связанные колебания осветительной мачты. Сборник трудов XIII международный научно-технической конференции Машиностроение и техносфера XXI века, т. 2 ДонГТУ, Донецк 2006, с. 81 - 85.
6. PN-97/B-02011. Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenia wiatrem.
7. PN-EN 40-3-3:2004 Słupy oświetleniowe. Cz. 3-2: Projektowanie i weryfikacja. Weryfikacja za pomocą badań.
8. ENV 1991-2-4: 1994 Podstawy projektowania i oddziaływanie na konstrukcje. Cz. 2-4 Obciążenie wiatrem.

### СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСВЕТИТЕЛЬНОЙ МАЧТЫ

Резюме. В колеблющихся механических системах с несколькими степенями свободы часто наблюдается самопроизвольное затухание одного вида колебаний а вместо них возникновение колебаний другого вида. Выступает „перекачка” энергии. Это периодическое изменение амплитуды колебаний происходит в случае, когда частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  главных колебаний системы близки друг другу. При исследованиях осветительных, высотой на: 12,5; 14,5; 16 м, алюминиевых мачт, возбуждение поперечных колебаний, отклонением от вертикали вершины мачты может привести к возникновению крутильных колебаний и перекачки энергии.