

PROJEKTOWANIE UKŁADÓW NAPĘDOWYCH MASZYN ZE WZGLĘDU NA WIDMO CZĘSTOŚCI

TOMASZ DZITKOWSKI, ANDRZEJ DYMAREK

*Institut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania,
Politechnika Śląska*

e-mail: tomasz.dzitkowski@polsl.pl, andrzej.dymarek@polsl.pl

Streszczenie. Dobór własności dynamicznych maszyny jest jedną z metod zwiększenia jej trwałości i niezawodności. Zadanie to może być zrealizowane przy wykorzystaniu algorytmu analizy i syntezy. W pracy zaprezentowana zostanie metoda doboru parametrów dynamicznych układów napędowych maszyn przy wykorzystaniu algorytmu syntezy.

1. WSTĘP

Istotnym działem dynamiki układów technicznych, w tym maszyn, mechanizmów i urządzeń, jest dział zajmujący się drganiami. Badanie drgań układów mechanicznych jest istotnym problemem zarówno na etapie projektowania, jak i dostosowania już istniejących maszyn odnośnie do wymogów procesów produkcyjnych.

Podstawowym elementem maszyny jest układ napędowy. Rozwój techniki wymusił na projektantach układów napędowych zapewnienie wysokiej trwałości i niezawodności podczas eksploatacji tych urządzeń. Dlatego też już w stadium projektowania należy zająć się tymi problemami, które mogą stać się przyczyną takich zakłóceń w ich działaniu, które spowodują drastyczne pogorszenie warunków pracy. Dysponując zatem odpowiednim modelem maszyny, możliwe jest już na etapie projektowania uwzględnienie różnych czynników, które mają istotny wpływ na parametry techniczne maszyny.

Zagadnienie poszukiwania struktury układu i jego parametrów, spełniających określone wymagania, dotyczące realizowania żądanych zjawisk dynamicznych, jest zadaniem odwrotnym do problemu analizy, czyli jest to synteza. Zadanie to można więc traktować jako etap wspomaganie procesu projektowania układów mechanicznych, w którym istotnym wymogiem jest spełnienie żądanych właściwości dynamicznych. Właściwości te, które musi spełniać projektowany układ, można przedstawić w postaci: graficznej, analitycznej lub ciągu zer i biegunów; ten ostatni przypadek będzie rozpatrywany w pracy.

Nowoczesne technologie informatyczne umożliwiają przeprowadzanie analizy [11] i syntezy [1÷9, 12] układów mechanicznych na podstawie metod algebraicznych, łatwych do oprogramowania. Do metod takich (oprócz metod sztywnych elementów skończonych oraz metod elementów brzegowych) zalicza się metody sieciowe: grafów wiązań, grafów biegunowych, grafów przepływowych, grafów hybrydowych oraz hipergrafów i liczb strukturalnych. Rozwijane w ośrodku gliwickim zastosowania grafów i liczb strukturalnych były asumptem do podjęcia niniejszej pracy.

W pracy zaprezentowana zostanie synteza układów napędowych maszyn jako modeli drgań skrętnych. Tego rodzaju drgania w układach trudniej jest wykryć niż drgania gięte, którym towarzyszy hałas i drgania elementów sąsiadujących (np. podstaw łożyskowych). Drgania skrętne ze względu na brak objawów ich występowania są szczególnie niebezpieczne, gdyż mogą być niezauważone aż do chwili zniszczenia podzespołu. Dlatego tak ważne jest określenie podstawowych częstości drgań własnych układu napędowego. Ich znajomość pozwala uniknąć pracy układu w strefach rezonansowych, które mogą wpłynąć na trwałość i prawidłowe działanie urządzenia.

2. METODY SYNTEZY UKŁADÓW NAPĘDOWYCH MASZYN

Pierwszym etapem syntezy układów mechanicznych jest zbudowanie funkcji matematycznych, które z jednej strony spełniają warunki stawiane układom, a z drugiej mogą być w sposób dokładny zrealizowane w układzie rzeczywistym. Problem sprowadza się więc do zbudowania funkcji wymiernych, spełniających warunki realizowalności i żądane wymagania dynamiczne [1, 3, 6, 8].

Przedstawiony w pracy sposób wyznaczania analitycznej postaci charakterystyki dynamicznej polega na przyjęciu ciągu częstości rezonansowych i antyrezonansowych (biegunów i zer poszukiwanej charakterystyki dynamicznej). Tak sformułowane zadanie wyznaczania postaci charakterystyki dynamicznej nie wymaga realizacji procesu aproksymacji, lecz od razu umożliwia przejście do syntezy właściwej.

Jeśli więc przyjąć funkcję opisującą własności dynamiczne drgającego układu dyskretnego jako sztywność lub podatność dynamiczną, to względem danej charakterystyki będą stosowane następujące transformacje [1]:

$$V(s) = sY(s), \quad (1)$$

gdzie: $V(s)$ - ruchliwość, $Y(s)$ - podatność dynamiczna na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s , $s = \sqrt{-1}\omega$,

$$U(s) = \frac{1}{s}Z(s), \quad (2)$$

gdzie: $U(s)$ - odwrotność ruchliwości zwana powolnością, $Z(s)$ - sztywność dynamiczna na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s .

Za pomocą transformacji (1) i (2) przekształca się opis ruchu układu z przemieszczeń uogólnionych oraz sił uogólnionych w opis ruchu za pomocą prędkości uogólnionych i sił uogólnionych. W ten sposób odwzorowuje się funkcję podatności dynamicznej układu w funkcję ruchliwości lub funkcję sztywności dynamicznej układu w funkcję powolności, które to funkcje są stosowane w syntezie układów mechanicznych. Na podstawie własności tych funkcji, które w istotny sposób decydują o rodzaju otrzymanych w wyniku syntezy dwójników, charakterystyki dynamiczne poddane syntezie przyjmują następujące postacie:

- powolności, która opisuje układy półokreślone

$$U(s) = H \frac{s(s^2 + s_2^2)(s^2 + s_4^2) \dots (s^2 + s_{2n}^2)}{(s^2 + s_1^2)(s^2 + s_3^2) \dots (s^2 + s_{2n-1}^2)}, \quad (3)$$

- powolności układów, na które nałożone są utwierdzenia

$$U(s) = H \frac{(s^2 + s_1^2)(s^2 + s_3^2) \dots (s^2 + s_{2n+1}^2)}{s(s^2 + s_2^2)(s^2 + s_4^2) \dots (s^2 + s_{2n}^2)}, \quad (4)$$

- ruchliwości, która opisuje układy półokreślone

$$V(s) = H \frac{(s^2 + s_1^2)(s^2 + s_3^2) \dots (s^2 + s_{2n+1}^2)}{s(s^2 + s_2^2)(s^2 + s_4^2) \dots (s^2 + s_{2n}^2)}, \quad (5)$$

- ruchliwości układów, na które nałożone są utwierdzenia

$$V(s) = H \frac{s(s^2 + s_2^2)(s^2 + s_4^2) \dots (s^2 + s_{2n}^2)}{(s^2 + s_1^2)(s^2 + s_3^2) \dots (s^2 + s_{2n-1}^2)}. \quad (6)$$

gdzie: s_i - pierwiastki wielomianu licznika i mianownika, przy czym

$$s_1 < s_2 < \dots < s_{2n} < s_{2n+1}, \quad H - \text{dowolna liczba rzeczywista dodatnia.}$$

Ze względu na klasę rozpatrywanych układów mechanicznych zadanie syntezy ograniczone zostanie do przypadku układów półokreślonych, gdy liczba elementów otrzymanego układu jest nieparzysta. Funkcją dynamiczną spełniającą te założenia jest funkcja powolności opisana zależnością (3).

2.1. Synteza metodą rozkładu charakterystyki na ułamek łańcuchowy

Przystępując do syntezy charakterystyki powolności (3) na ułamek łańcuchowy, funkcję tę przedstawia się w postaci:

$$U(s) = \frac{d_l s^l + d_{l-2} s^{l-2} + \dots + d_1 s}{c_{l-1} s^{l-1} + c_{l-3} s^{l-3} + \dots + c_0}, \quad (7)$$

lub

$$U(s) = \frac{L_l(s)}{M_{l-1}(s)}, \quad (8)$$

gdzie: $d_1, \dots, d_l, c_0, \dots, c_{l-1}$ - są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, l - liczba nieparzysta.

Po podzieleniu w (8) licznika przez mianownik otrzymuje się

$$U(s) = U_s^{(1)}(s) + \frac{L_{l-1}(s)}{M_{l-1}(s)} = U_s^{(1)}(s) + \frac{1}{\frac{M_{l-1}(s)}{L_{l-1}(s)}} = U_s^{(1)}(s) + \frac{1}{V_1(s)} = J_U^{(1)} s + \frac{1}{V_1(s)}. \quad (9)$$

Następnym etapem rozkładu charakterystyki (8) na ułamek łańcuchowy jest realizacja wyrażenia $V_1(s)$ w (9). Po podzieleniu $M_{l-1}(s)$ przez $L_{l-1}(s)$ otrzymuje się

$$V_1(s) = V_s^{(1)}(s) + \frac{M_{l-2}(s)}{L_{l-1}(s)} = V_s^{(1)}(s) + V_s^{(2)}(s) = \frac{s}{c_U^{(1)}} + V_2(s). \quad (10)$$

Powolność $U(s)$ z (8) przyjmuje postać

$$U(s) = U_s^{(1)}(s) + \frac{1}{V_s^{(1)}(s) + \frac{1}{U_2(s)}} = J_U^{(1)} s + \frac{1}{\frac{s}{c_V^{(1)}} + V_2(s)}. \quad (11)$$

Proces syntezy powolności (7), po wykonaniu działań zgodnych z (9, 10, 11), kontynuuje się aż do momentu, gdy w wyniku dzielenia mianownika przez licznik otrzyma się wyrażenie $U_k(s)$ w postaci:

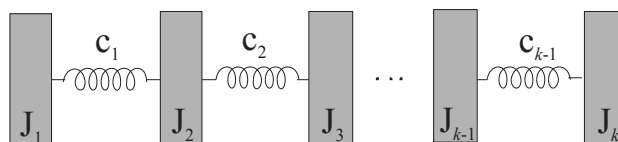
$$U_k(s) = U_s^{(k)}(s) = J_U^{(k)} s.$$

Ostatecznie powolność (7) otrzymuje się w formie ułamka łańcuchowego:

$$U(s) = U_s^{(1)}(s) + \frac{1}{V_s^{(1)}(s) + \frac{1}{U_s^{(2)}(s) + \frac{1}{V_s^{(2)}(s) + \frac{1}{\vdots} + \frac{1}{V_s^{(k-1)}(s) + \frac{1}{U_s^{(k)}(s)}}}}. \quad (12)$$

gdzie: $U^{(1)}(s) = J_U^{(1)}s$, $V^{(1)}(s) = \frac{s}{c_V^{(1)}}$, ..., $V^{(k-1)}(s) = \frac{s}{c_V^{(k-1)}}$, $U^{(k)}(s) = J_U^{(k)}s$.

W rezultacie przeprowadzonej syntezy powolności (7) otrzymuje się wartości dwójników typu inercyjnego i sprężystego. Wykorzystując twierdzenia z [3], można w sposób jednoznaczny przedstawić realizację fizyczną dowolnej charakterystyki poddanej syntezie. Dyskretny układ drgający, przedstawiony na rys. 1, stanowi fizyczną realizację zsyntezowanej charakterystyki (12).



Rys. 1. Model kaskadowy układu napędowego

2.2. Synteza metodą rozkładu charakterystyki na ułamki proste

Charakterystykę powolności (7) rozkłada się na ułamki proste jako:

$$\frac{U(s)}{H} = k_\infty s + \frac{B_1}{(s - js_1)} + \frac{B_2}{(s + js_1)} + \dots + \frac{B_{2n-1}}{(s - js_{2n-1})} + \frac{B_{2n}}{(s + js_{2n-1})}, \quad (13)$$

gdzie: $k_\infty, B_1, B_2, \dots, B_{2n-1}, B_{2n}$ – wartości residuów w biegunach odpowiednio równe

$$\infty, js_2, -js_2, \dots, js_{2n-1}, -js_{2n-1}, j = \sqrt{-1}, H = \frac{d_l}{c_{l-1}}.$$

Residua te wylicza się z zależności:

$$\begin{cases} k_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{U(s)}{s}, \\ B_1 = \lim_{s \rightarrow js_2} (s - js_2)U(s), B_2 = \lim_{s \rightarrow -js_2} (s + js_2)U(s), \\ \vdots \\ B_{2n-1} = \lim_{s \rightarrow js_{2n}} (s - js_{2n})U(s), B_{2n} = \lim_{s \rightarrow -js_{2n}} (s + js_{2n})U(s). \end{cases} \quad (14)$$

Z równań (14) wynika, że $B_1, B_2, \dots, B_{2n-1}, B_{2n}$ są liczbami sprzężonymi oraz wiedząc, że wszystkie residua na osi urojonej są rzeczywiste dodatnie, a więc

$$B_1 = B_2 = k_2, B_3 = B_4 = k_4, \dots, B_{2n-1} = B_{2n} = k_{2n}, \quad (15)$$

i stąd

$$\begin{cases} \frac{B_1}{(s - js_2)} + \frac{B_2}{(s + js_2)} = \frac{2k_2 s}{s^2 + s_2^2}, \\ \frac{B_3}{(s - js_4)} + \frac{B_4}{(s + js_4)} = \frac{2k_4 s}{s^2 + s_4^2}, \\ \vdots \\ \frac{B_{2n-1}}{(s - js_{2n})} + \frac{B_{2n}}{(s + js_{2n})} = \frac{2k_n s}{s^2 + s_n^2}. \end{cases} \quad (16)$$

uwzględniając (16), równanie (13) można zapisać w postaci

$$\frac{U(s)}{H} = k_\infty s + \frac{2k_2 s}{(s^2 + s_1^2)} + \frac{2k_4 s}{(s^2 + s_3^2)} + \dots + \frac{2k_{2n} s}{(s^2 + s_{2n-1}^2)}, \quad (17)$$

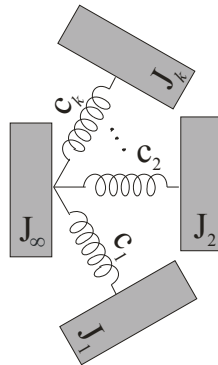
lub

$$\frac{U(s)}{H} = k_\infty s + \sum_{m=1}^n \frac{2k_{2m} s}{(s^2 + s_{2m-1}^2)}. \quad (18)$$

Poszczególnym składnikom rozkładu (17) odpowiadają wartości dwójników typu inercyjnego i sprężystego, co implikuje wymiar powolności

$$U(s) = J_U^{(\infty)} s + \frac{1}{\frac{s}{c_V^{(1)}} + \frac{1}{J_U^{(1)} s}} + \frac{1}{\frac{s}{c_V^{(2)}} + \frac{1}{J_U^{(2)} s}} + \dots + \frac{1}{\frac{s}{c_V^{(k)}} + \frac{1}{J_U^{(k)} s}}, \quad (19)$$

Fizyczną realizację zeszytowanej charakterystyki (19) przedstawiono na rys.2.



Rys. 2. Model rozgałęziony układu napędowego

2.3. Synteza metodą mieszaną

Metoda syntezy przedstawiona w tym rozdziale jest wynikiem połączenia dwóch wcześniej opisanych metod: rozkładu charakterystyki dynamicznej na ułamki proste z rozkładem funkcji charakterystycznej na ułamek łańcuchowy (nazwana w [6] metodą mieszaną). Syntezując powolność dyskretnych układów drgających tłumionych metodą mieszaną, otrzymuje się

nowe struktury i jednocześnie zbiór wartości parametrów w przypadku jednego układu spełniającego te same wymagania.

Funkcję charakterystyczną, w postaci powolności (3), przedstawia się w formie:

$$U'(s) = H \frac{s(s^2 + s_2^2)(s^2 + s_4^2) \dots (s^2 + s_{2n}^2)}{(s^2 + s_1^2)(s^{l-2} + c_{k'}s^{l-4} + \dots + c_{0'})}, \quad (20)$$

lub w postaciach:

$$U'(s) = H \frac{s(s^2 + s_2^2)(s^2 + s_4^2) \dots (s^2 + s_{2n}^2)}{(s^2 + s_1^2)(s^2 + s_3^2)(s^{l-4} + c_{k''}s^{l-6} + \dots + c_{0''})}, \quad (21)$$

oraz

$$U(s) = H \frac{s(s^2 + s_2^2)(s^2 + s_4^2) \dots (s^2 + s_{2n}^2)}{(s^4 + (s_1^2 + s_3^2)s^2 + s_1^2s_3^2)(s^{l-4} + c_{k'''}s^{l-6} + \dots + c_{0'''})}, \quad (22)$$

gdzie: s_2, s_4, s_{2n} – częstości rezonansowe, s_1, s_3 – częstości antyrezonansowe.

Rozkład wielomianu mianownika funkcji (3) na czynniki zależy od jego stopnia. Charakterystykę (3) przedstawia się w postaci sumy funkcji wymiernych. Postacie odpowiadające kolejno charakterystykom (20), (21), (22) są następujące:

$$\frac{U'(s)}{H} = k_{\infty}s + \frac{As}{(s^2 + s_1^2)} + \frac{B_1s^{l-3} + B_2s^{l-5} + \dots + B_0s}{(s^{l-2} + c_{k'}s^{l-4} + \dots + c_{0'})}, \quad (23)$$

$$\frac{U'(s)}{H} = k_{\infty}s + \frac{As}{(s^2 + s_1^2)} + \frac{Bs}{(s^2 + s_3^2)} + \frac{C_1s^{l-5} + C_2s^{l-7} + \dots + C_0s}{(s^{l-4} + c_{k''}s^{l-6} + \dots + c_{0''})}, \quad (24)$$

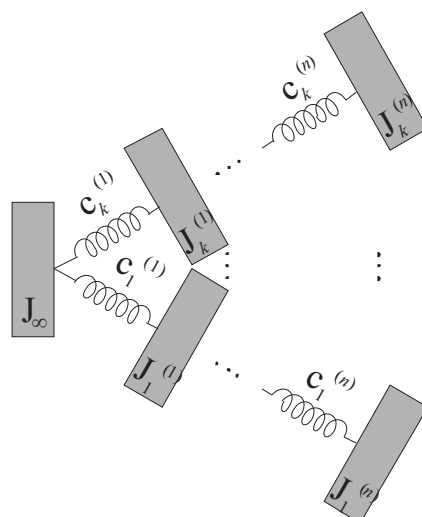
$$\frac{U'(s)}{H} = k_{\infty}s + \frac{A_1s^3 + A_2s}{(s^4 + (s_1^2 + s_3^2)s^2 + s_1^2s_3^2)} + \frac{C_1s^{l-5} + C_2s^{l-7} + \dots + C_0s}{(s^{l-4} + c_{k'''}s^{l-6} + \dots + c_{0'''})}, \quad (25)$$

gdzie: $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C_1, C_2, C_0$ - parametry wyznaczone z układu równań, utworzonego na podstawie przyrównania charakterystyk (23 ÷ 25) do (3). Funkcje wymierne w równaniach (23 ÷ 25) poddaje się rozkładowi na ułamek łańcuchowy, otrzymując wartości elementów inercyjnych i sprężystych:

$$U'(s) = J_{\infty}s + \frac{1}{\frac{s}{c_1^{(1)}} + \frac{1}{J_1^{(1)}s + \dots + \frac{1}{\frac{s}{c_1^{(n)}} + \frac{1}{J_1^{(n)}s}}}} + \dots + \frac{1}{\frac{s}{c_k^{(1)}} + \frac{1}{J_k^{(1)}s + \dots + \frac{1}{\frac{s}{c_k^{(n)}} + \frac{1}{J_k^{(n)}s}}}}. \quad (26)$$

gdzie: $J_{\infty}, J_1^{(1)}, J_1^{(n)}, J_k^{(1)}, J_k^{(n)}$ - wartości elementów inercyjnych poszukiwanego układu, $c_1^{(1)}, c_1^{(n)}, c_k^{(1)}, c_k^{(n)}$ - wartości elementów sprężystych poszukiwanego układu.

Na rys. 3 przedstawiono dyskretny układ mechaniczny jako fizyczną realizację zsyntezowanej charakterystyki (26) metodą mieszaną.



Rys.3. Model rozgałęziono-kaskadowy układu napędowego

Należy zaznaczyć, iż zaprezentowane metody syntezy układów napędowych maszyn umożliwiają otrzymanie modeli układów dyskretnych z uwzględnieniem tłumienia [3, 6]. Tak utworzony zbiór modeli układów napędowych maszyn, a zwłaszcza parametry tych układów, spełniające żądane własności dynamiczne, stanowią bazę jakościowych poszukiwań modelu.

Wybór modelu z grupy zsyntezowanych zależy od warunków pracy maszyny. Praca maszyny w pobliżu stanu rezonansowego jest możliwa tylko wtedy, kiedy wartość tłumienia wewnętrznego układu jest wystarczająco duża, ze względu na największe naprężenia. Tłumienie odgrywa w tych przypadkach rolę decydującą, ponieważ obniża w sposób istotny amplitudę drgań. Innym sposobem poprawy działania maszyny jest odpowiedni dobór częstości naturalnej układu lub częstości wymuszenia. Wyjście ze strefy rezonansu jest podstawowym warunkiem pracy urządzenia, lecz nie eliminuje całkowicie problemu drgań. Jeśli jednak maszyna pracuje poza obszarem rezonansu, to obliczenia dynamiczne mogą być w wystarczający sposób zrealizowane dla układów z pominięciem wpływu tłumienia.

4. WNIOSKI

Zadanie syntezy, umożliwiające otrzymanie parametrów i struktury układów ze względu na charakterystykę dynamiczną, może być wykorzystane jako narzędzie wspomaganie projektowania dla każdego warunków pracy urządzenia. Jednocześnie duża liczba otrzymanych w wyniku syntezy układów i parametrów, które spełniają te same własności dynamiczne – w postaci założonych zer i biegunów charakterystyki, mogą wpłynąć znacząco na racjonalny dobór parametrów rozpatrywanego obiektu (urządzenia).

*Część badań zrealizowano w ramach projektu badawczego N 502 071 31/3719
finansowanego przez Komitet Badań Naukowych w latach 2006 – 2009.*

LITERATURA

1. Buchacz A.: Synteza drgających układów prętowych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. ZN Pol. Śląskiej 1991, s. "Mechanika", z. 104.
2. Buchacz A., Dymarek A., Dzitkowski T.: Synthesis of discrete, continuous and discrete-continuous vibrating systems represented by graphs. Sixth International Scientific and

- Engineering Conference - Machine-Building and Technosphere on the Border of the XXI Century, 3, Donetsk 1999, p. 243-245.
3. Buchacz A., Dymarek A., Dzitkowski T.: Projektowanie i badanie wrażliwości ciągłych i dyskretno-ciągłych układów mechanicznych o żądanym widmie częstości w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Gliwice : Wyd. Pol. Śl., 2005. Monografia z. 88.
 4. Dymarek A.: The sensitivity as a criterion of synthesis of discrete vibrating fixed mechanical system. "Journal of Materials Processing Technology" 2004, 157-158, p. 138-143.
 5. Dymarek A., Dzitkowski T.: Modelling and synthesis of discrete – continuous subsystems of machines with damping. "Journal of Materials Processing Technology" 2005, 164-165, p. 1317-1326.
 6. Dymarek A.: Odwrotne zadanie dynamiki tłumionych mechanicznych układów drgających w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Praca doktorska. Gliwice 2000.
 7. Dzitkowski T.: Computer aided synthesis of discrete – continuous subsystems of machines with the assumed frequency spectrum represented by graphs. "Journal of Materials Processing Technology" 2004, 157-158, 2004, p. 144-149.
 8. Dzitkowski T.: Odwrotne zadanie dynamiki dyskretno-ciągłych układów mechanicznych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Praca doktorska, Gliwice 2001.
 9. Dzitkowski T., Dymarek A.: The synthesis of machine driving systems. Twelfth International Scientific and Engineering Conference - Machine-Building and Technosphere on the Border of the XXI Century, 5, Donetsk – Sevastopol 2005, p. 66÷70.
 10. Dzitkowski T., Dymarek A.: Synthesis and sensitivity of machine driving systems. "Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering" 2006, 20, p. 359÷362.
 11. Świtoński E. [red]: Modelowanie mechatronicznych układów napędowych. Monografia. Gliwice : Wyd. Pol. Śl., 2004. z. 70.
 12. Wojnarowski J., Graphs and structural numbers as models of mechanical systems. Gliwice : PTMTS, 1977 (in Polish).

DESIGN OF MACHINE DRIVING SYSTEMS WITH REQUIRED FREQUENCY SPECTRUM

Summary. The selection of the dynamical properties of machines is one of the methods enhancing their durability and reliability. Such task may be accomplished with the use of the analysis and synthesis algorithm. The scope of this paper is a method of selecting the dynamical parameters of machine drive systems on the grounds of the synthesis algorithm.