

## MODEL MATEMATYCZNY OBRACAJĄCYCH SIĘ TŁUMIONYCH BELEK PODATNYCH

SŁAWOMIR ŻÓLKIEWSKI

*Institut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania,  
Politechnika Śląska  
e-mail:slawomir.zolkiewski@polsl.pl*

Streszczenie. W literaturze znane są pozycje opisujące sposób modelowania układów technicznych znajdujących się w trakcie wykonywania ruchu obrotowego [1-8]. Niniejsza praca jest rozszerzeniem tematyki związanej z analizą wpływu ruchu układu na model drgań o uwzględnienie w modelu matematycznym elementów związanych z tłumieniem. Przedstawiony w opracowaniu model jest wyprowadzeniem równań ruchu tłumionych belek podatnych, a dodatkowe uwzględnienie tłumienia jest krokiem, dzięki któremu możliwe będzie zbliżenie proponowanego modelu do aplikacji rzeczywistych.

### 1. WSTĘP

Stosunkowo nowym podejściem do analizy dynamicznej obracających się układów belkowych jest jednoczesne uwzględnienie w modelu matematycznym efektu ruchu unoszenia oraz tłumienia i elementów z nim związanych. Opracowania przedstawione w treści niniejszego artykułu dotyczą dynamiki układów belkowych znajdujących się w ruchu obrotowym. Przebieg charakterystyk dynamicznych w istotny sposób zależy od prędkości, z jaką porusza się rozważany układ. Okazuje się, że ruch główny układu ma wpływ na jego lokalne drgania, co z kolei ma wpływ na zmianę charakterystyki dynamicznej. Celem pracy jest analiza dynamiczna układów w ruchu unoszenia wraz z uwzględnieniem w wyprowadzonym modelu matematycznym sił tłumiących. Rozproszenie energii mechanicznej w postaci tłumienia jest nierozłącznie związane z ruchem analizowanych układów. Dotychczasowe modelowanie układów prętowych w ruchu unoszenia z jednej strony często jest oparte na uproszczeniu i założeniu, że tłumienie w układzie jest pomijalne, natomiast z drugiej strony rozważania rzadko dotyczą układów, w których uwzględnia się efekt ruchu unoszenia.

### 2. MODELOWANE BELKI

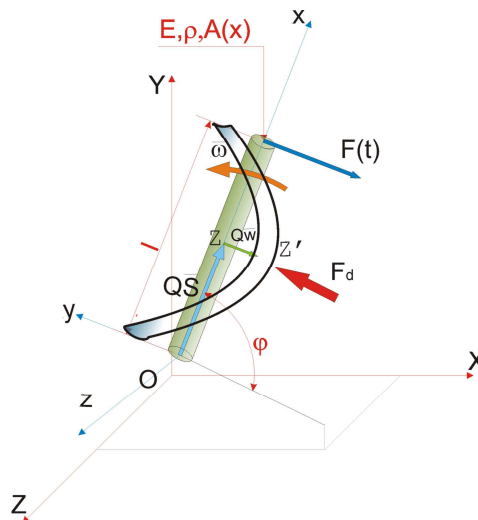
#### 2.1. Model belki swobodnej

Założono, że na jeden z końców belki, przedstawionej na rys. 1, działa harmoniczna siła poprzeczna o jednostkowej amplitudzie, w związku z definicją podatności dynamicznej.

Drugiemu końcowi belki przypisano zerowy moment zginający oraz zerową siłę poprzeczną. Układ równań opisujących warunki brzegowe zapisano w następującej postaci:

$$\begin{cases} w(0,t) = 0, \\ E \cdot Iz \cdot \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0, \\ E \cdot Iz \cdot \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ E \cdot Iz \cdot \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} \right] = -2 \cdot \int_0^l F_0 \cdot \delta(x-l) \cdot e^{j\Omega t} dx = -1 \cdot e^{j\Omega t}. \end{cases} \quad (1)$$

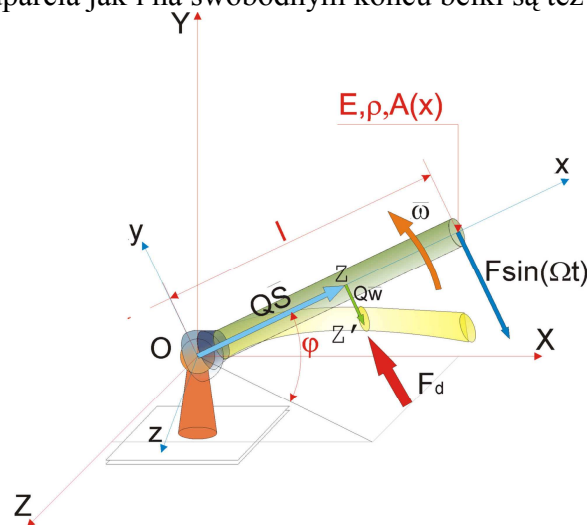
w każdej chwili  $t \geq 0$ .



Rys. 1. Model rozważanej belki swobodnej z tłumieniem

## 2.2. Model belki utwierdzonej na obrotowym stole

Na swobodny koniec belki (rys. 2) działa siła o jednostkowej amplitudzie, natomiast przemieszczenie w miejscu zamocowania jest równe zero, z kolei momenty zginające, zarówno w punkcie podparcia jak i na swobodnym końcu belki są też równe zero.



Rys. 2. Model analizowanej belki utwierdzonej z tłumieniem

Warunki brzegowe cechuje więc następujący układ równań:

$$\begin{cases} E \cdot Iz \cdot \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ E \cdot Iz \cdot \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} \right] = 0, \\ E \cdot Iz \cdot \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ E \cdot Iz \cdot \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} \right] = -2 \cdot \int_0^l F_0 \cdot \delta(x-l) e^{j\Omega t} dx = -1 \cdot e^{j\Omega t}, \end{cases} \quad (2)$$

w każdej chwili  $t \geq 0$ .

### 2.3. Zagadnienie własne

Poszukuje się rozwiązania w postaci iloczynu funkcji własnych zmiennej przemieszczenia oraz funkcji własnych zmiennej czasu jako:

$$w(x,t) = X(x)W(t), \quad (3)$$

gdzie:

$X(x)$  - funkcja własna przemieszczenia,

$W(t)$  - funkcja własna czasu.

Uwzględniając harmoniczny przebieg funkcji własnej zmiennej czasu przyjęto co następuje:

$$w(x,t) = X(x)e^{j\Omega t}, \quad (4)$$

gdzie:

$\Omega$  - częstość siły poprzecznej,

$j = \sqrt{-1}$  - jednostka urojona.

Ciąg wartości własnych belki swobodnej można przybliżyć wyrażeniem:

$$k \approx \frac{2 \cdot n + 1}{2 \cdot l} \cdot \pi, \quad n = 0 \Rightarrow k = 0. \quad (5)$$

Funkcja własna przemieszczenia belki swobodnej jest równa:

$$X(x) = \sin(kx) + \frac{\cos(kl) - \cosh(kl)}{\sin(kl) + \sinh(kl)} \cdot \cos(kx) + \sinh(kx) + \frac{\cos(kl) - \cosh(kl)}{\sin(kl) + \sinh(kl)} \cdot \cosh(kx). \quad (6)$$

Ciąg funkcji własnych belki utwierdzonej można przybliżyć następującą zależnością:

$$k \approx (2 \cdot n - 1) \cdot \frac{\pi}{2 \cdot l}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

A dalej po przybliżeniu otrzymanych wyników opisano funkcję własną przemieszczenia belki utwierdzonej poprzez formułę:

$$X(x) = \sin(kx) + \frac{\cos(kl) + \cosh(kl)}{\sin(kl) - \sinh(kl)} \cdot \cos(kx) - \sinh(kx) - \frac{\cos(kl) + \cosh(kl)}{\sin(kl) - \sinh(kl)} \cdot \cosh(kx). \quad (8)$$

### 3. MODEL MATEMATYCZNY – RÓWNANIA RUCHU

W rozdziale przedstawiono wyprowadzenie równań ruchu obracających się belek z uwzględnieniem tłumienia. Równania ruchu wyprowadzono za pomocą metod klasycznych, zakładając współrzędne uogólnione jako poszczególne współrzędne opisujące położenie i orientację analizowanego przekroju oraz prędkości uogólnione jako odpowiednie pochodne względem czasu z tych współrzędnych:

$$\begin{aligned} q_1 = r_X, \dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt} = \dot{r}_X = v_X, \\ q_2 = r_Y, \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt} = \dot{r}_Y = v_Y. \end{aligned} \quad (9)$$

Siły uogólnione zapisano w zależności od elementów macierzy rotacji, której użyto jako metody do transformacji poszczególnych wartości z lokalnego układu współrzędnych do globalnego układu współrzędnych, i tak względem osi X siła ma postać:

$$F_X = \frac{\partial F_g \cdot Q_{11} \cdot s}{\partial x}, \quad (10)$$

Siły uogólnione względem osi Y globalnego układu współrzędnych są następujące:

$$F_Y = \frac{\partial F_g \cdot Q_{21} \cdot s}{\partial x}. \quad (11)$$

Zgodnie z prawem Koeniga zapisano energię kinetyczną w ruchu płaskim w funkcji odpowiednich prędkości uogólnionych, jako:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot [\bar{\omega} \times \mathbf{Q} \cdot (\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{w}})]^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot (\mathbf{Q} \cdot \dot{\bar{\mathbf{w}}})^2 + \underbrace{M \cdot [\mathbf{Q} \cdot \bar{\omega} \times (\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{w}})] \cdot \mathbf{Q} \cdot \dot{\bar{\mathbf{w}}}}_{=0} \\ &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot (\dot{\bar{i}} \cdot \dot{r}_X)^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot (\dot{\bar{j}} \cdot \dot{r}_Y)^2 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{r}_X^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{r}_Y^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Dyssypację (moc strat wynikającą z tłumienia) układu określono w zależności od prędkości uogólnionych w następujący sposób:

$$D = \frac{1}{2} b [\bar{\omega} \times \mathbf{Q} \cdot (\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{w}})]^2 + \frac{1}{2} b \cdot (\mathbf{Q} \cdot \dot{\bar{\mathbf{w}}})^2 \dot{\bar{\mathbf{w}}} = \frac{1}{2} b \cdot (\bar{\mathbf{i}} \cdot \dot{r}_X)^2 + \frac{1}{2} b \cdot (\bar{\mathbf{j}} \cdot \dot{r}_Y)^2 = \frac{1}{2} b \cdot \dot{r}_X^2 + \frac{1}{2} b \cdot \dot{r}_Y^2 \quad (13)$$

W dalszych rozważaniach przyjęto następującą równoważność zapisu:

$$-\omega [\bar{\mathbf{i}} \cdot \dot{w} \cos \varphi + s \cdot \sin \varphi + \bar{\mathbf{j}} \cdot \dot{w} \sin \varphi - s \cdot \cos \varphi] + \bar{\mathbf{i}} \cdot (-\dot{w} \sin \varphi) + \bar{\mathbf{j}} \cdot \dot{w} \cos \varphi \equiv \begin{bmatrix} -\omega (\dot{w} \cos \varphi + s \cdot \sin \varphi) - \dot{w} \sin \varphi \\ \underbrace{\dot{r}_X}_{\omega (s \cdot \cos \varphi - \dot{w} \sin \varphi) + \dot{w} \cos \varphi} \\ \underbrace{\dot{r}_Y}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Po prostych przekształceniach matematycznych równania ruchu przedstawiono w postaci macierzowej jako:

$$M \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ 0 \end{bmatrix} - M \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^2 \cdot s \\ \omega^2 \cdot w \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w \cdot \omega \\ s \cdot \omega \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} \\ 0 \end{bmatrix} + -2 \cdot M \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + M \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\omega} \cdot w \\ \dot{\omega} \cdot s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial F_g \cdot s}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Siłę poprzeczną działającą na belkę, z uwzględnieniem jej sprężystości przedstawiono w zależności od odkształcenia, które jest funkcją Przemieszczenia. Związek ten zgodny jest z uogólnionym prawem Hooke'a; stąd też zależność między naprężeniami a odkształceniami opisana jest w następującej postaci:

$$\bar{\mathbf{F}}_g = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( E \cdot I_Z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial q_j^2} \right), \quad (16)$$

gdzie:

$E$  – moduł Younga,

$I_Z$  – moment bezwładności przekroju poprzecznego belki.

Po przyjęciu, że oś belki pokrywa się z osią  $x$  lokalnego układu współrzędnych, założono, że wszystkie siły poprzeczne, które zwrócone są przeciwnie do zwrotu osi  $y$  lokalnego układu współrzędnych wywołują momenty ujemne, natomiast siły zwrócone zgodne ze zwrotami osi  $y$  lokalnego układu współrzędnych, wywołują dodatnie momenty (siły i momenty powodujące ugięcie belki wypukłością w dół przyjęto jako dodatnie). Po uwzględnieniu zależności wynikających z (16) otrzymano równania ruchu w postaci macierzowej:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^2 \cdot s \\ \omega^2 \cdot w \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{b}{M} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w \cdot \omega \\ s \cdot \omega \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{b}{M} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 & - 2 \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\omega} \cdot w \\ \dot{\omega} \cdot s \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 & = -\frac{E \cdot I_Z}{\rho \cdot A} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{17}$$

Przyjęto następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 w_X &= w \cdot \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = w \cdot \sin\varphi, \\
 w_Y &= w \cdot \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -w \cdot \cos\varphi,
 \end{aligned} \tag{18}$$

stąd wektor przemieszczenia liniowego przekroju poprzecznego belki prostopadły do jej osi, oraz równoległy do osi  $y$  lokalnego układu współrzędnych, wyznaczony względem globalnego układu odniesienia w odróżnieniu od  $\mathbf{w}$ , które odpowiada wektorowi przemieszczenia w układzie lokalnym.

$$\bar{\mathbf{w}}_{XY} = \bar{\mathbf{w}}_X + \bar{\mathbf{w}}_Y = \bar{\mathbf{i}} \cdot w_X + \bar{\mathbf{j}} \cdot w_Y \tag{19}$$

Ostatecznie uwzględniając zależności (19) otrzymano równania ruchu tłumionej belki drgającej giętnie w ruchu unoszenia zrzutowane na osie  $X$  i  $Y$  globalnego układu współrzędnych:

Rzut na oś  $X$ :

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} + \frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A} \cdot \frac{\partial^4 w_x}{\partial x^4} + \frac{b}{M} \cdot \left[ \frac{\partial w_x}{\partial t} + \omega \cdot (s \cdot \sin \varphi - w_y) \right] = 2 \cdot \omega \cdot \frac{\partial w_y}{\partial t} - \omega^2 \cdot (s \cdot \cos \varphi - w_x). \quad (20)$$

Rzut na oś Y:

$$\frac{\partial^2 w_y}{\partial t^2} + \frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A} \cdot \frac{\partial^4 w_y}{\partial x^4} + \frac{b}{M} \cdot \left[ \frac{\partial w_y}{\partial t} - \omega \cdot (s \cdot \cos \varphi - w_x) \right] = -\omega^2 \cdot (s \cdot \sin \varphi - w_y) - 2 \cdot \omega \cdot \frac{\partial w_x}{\partial t}. \quad (21)$$

#### 4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono model matematyczny obracających się tłumionych belek podatnych. Zamodelowano belki swobodne oraz belki utwierdzone w obrotowym ruchu unoszenia. W pracy założono wstępną znajomość postaci drgań belek, posługując się modelem belek stacjonarnych. Rozwiązanie to jest pewnym uproszczeniem, jednak w przedstawionym przykładzie nie ma wpływu na końcową postać wyprowadzonego modelu matematycznego. Wyprowadzone równania ruchu są wstępem do dalszej analizy dynamicznej zarówno w postaci charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych jak i wstępem do analizy układów wieloogniwowych.

**Praca wykonana w ramach grantu N 502 071 31/3719 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Informatyzacji w latach 2006-2009.**

**This work has been conducted as a part of research project N 502 071 31/3719 supported by the Ministry of Science and Higher Education in 2006-2009.**

#### LITERATURA

1. Buchacz A., Żółkiewski S.: Transverse vibrations of the elastic multielement manipulator in terms of plane motion and taking into consideration the transportation effect. W: 8<sup>th</sup> "Conference on Dynamical Systems – Theory and Applications". Łódź 200. Proceedings Vol. 2, p.641-648.
2. Buchacz A., Żółkiewski S.: Equations of motion of the two-link system vibrating transversally and longitudinally in transportation. International Conference of Machine-Building and Technosphere of the XXI Century. Sevastopol 2006 Vol. 4, p. 188-192.
3. Buchacz A., Żółkiewski S.: Dynamic analysis of the mechanical systems vibrating transversally in transportation. "Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering" 2007, Vol. 20, issues 1-2, 2007, p. 331-334.
4. Genta G.: Dynamics of rotating systems. New York : Springer, 2005.
5. Szefer G.: Dynamics of elastic bodies in terms of plane frictional motion. "Journal of Theoretical and Applied Mechanics" 2001, 2, 39.
6. Vance J. M.: Rotordynamics of turbomachinery. Wiley, 1988.
7. Żółkiewski S.: Mathematical model of rotating damped flexible beam systems. W: XLVII Sympozjon PTMTS „Modelowanie w Mechanice”. Wisła 2008, p. 231-232.

8. Żółkiewski S.: Analysis and modelling of rotational systems with the modyfit application. "Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering" 2008, Vol. 30, iss. 1, p. 59-66.

## **MATHEMATICAL MODEL OF ROTATING DAMPED FLEXIBLE BEAM SYSTEMS**

Summary. In the literature there are known positions described the way of modelling of technical systems in rotational motion [1-8]. This thesis is a development of subject matter connected with the analysis of effect of system's motion on the model of vibrations. This development is connected with taking into account elements of damping in the mathematical model. Presented model in this article is a derivation of equations of motion of damped flexible beam systems. Additionally taking into consideration the damping of systems is a step to bringing closer together of the proposed model and actual applications.