

DRGANIA UKŁADU MECHATRONICZNEGO Z UWZGLĘDNIENIEM ŚCINANIA WARSTWY ŁĄCZĄCEJ

ANDRZEJ BUCHACZ, MAREK PŁACZEK

*Institut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania,
Politechnika Śląska
e-mail: andrzej.buchacz@polsl.pl, marek.placzek@polsl.pl*

Streszczenie. Praca dotyczy analizy drgań układu mechatronicznego w postaci belki wspornikowej oraz przytwierdzonego do jej powierzchni, za pomocą warstwy łączącej, przetwornika piezoelektrycznego. Układ ten obciążony jest siłą harmonicznie zmienną, działającą w kierunku prostopadłym do osi belki, przyłożoną na jej swobodnym końcu. Wyznaczono dynamiczne równania ruchu analizowanego układu z uwzględnieniem ścinania warstwy kleju, a także charakterystykę dynamiczną układu na podstawie przybliżonej metody Galerkina. Przebieg wyznaczonej podatności dynamicznej przedstawiono na wykresie.

1. WSTĘP

Proste i odwrotne zjawisko piezoelektryczne znajduje obecnie coraz szersze zastosowanie w układach mechatronicznych stosowanych w różnych dziedzinach techniki. Proste zjawisko piezoelektryczne, polegające na indukowaniu ładunku elektrycznego na powierzchni przetwornika piezoelektrycznego pod wpływem działania naprężeń mechanicznych, wykorzystywane jest między innymi w czujnikach siły, ciśnienia, przyspieszeń, czy też w sonarach i mikrofonach. Odwrotne zjawisko piezoelektryczne, polegające na odkształceniu się przetwornika piezoelektrycznego pod wpływem działania napięcia elektrycznego wykorzystywane jest szeroko w stabilizatorach i filtrach częstotliwości, silnikach piezoelektrycznych, a także mikromanipulatorach oraz pozycjonerach o wysokiej precyzji działania.

Wszystkie aplikacje wykorzystujące fizyczne działanie przetwornika piezoelektrycznego na dany układ mechaniczny wiążą się z koniecznością połączenia przetwornika piezoelektrycznego z obiektem w taki sposób, aby w pełni wykorzystać jego właściwości i uzyskać pożądane działanie układu. Aby w pełni określić skuteczność zastosowania przetwornika piezoelektrycznego w danej aplikacji oraz wyznaczyć jej charakterystykę dynamiczną, konieczne staje się uwzględnienie, w równaniach opisujących ruch analizowanego układu, warstwy pośredniczącej pomiędzy przetwornikiem piezoelektrycznym a współpracującym z nim elementem oraz przenoszonych przez nią obciążeń.

W dostępnej literaturze tematu, związanego z wykorzystaniem przetworników piezoelektrycznych jako czujniki, bądź też jako aktuatory, stosowane zarówno do wzbudzania, jak i stabilizacji i tłumienia drgań mechanicznych, najczęściej wpływ warstwy łączącej kleju jest pomijany. Zakłada się w nich idealne połączenie elementów [1].

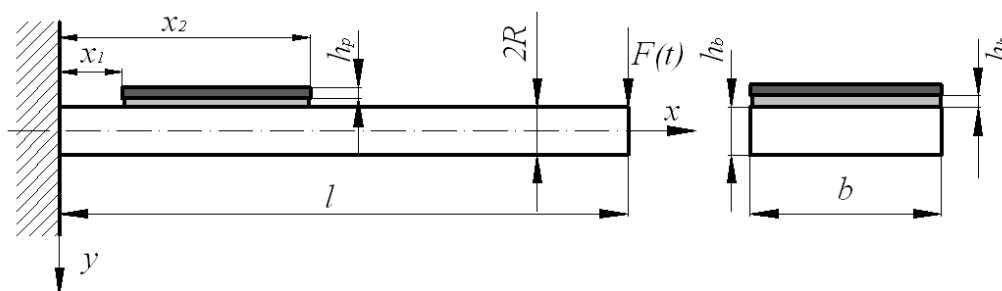
Pozycje literaturowe uwzględniające wpływ warstwy pośredniczącej pomiędzy przetwornikiem a elementem, na który on oddziałuje, ujmują jednak zagadnienie wyłącznie mechanicznie, pomijając elektryczne właściwości charakteryzujące przetwornik piezoelektryczny [2,3].

Uproszczenia dotyczące przyjęcia idealnego połączenia elementów układu są zasadne w przypadku małej grubości przetwornika piezoelektrycznego oraz warstwy kleju, a także przy pominięciu właściwości sprężystych warstwy łączącej, a więc założeniu jej doskonałej sztywności. W rzeczywistych przypadkach właściwości stosowanej warstwy łączącej mają wpływ na charakterystykę dynamiczną układu i, aby dokonać dokładnej jego analizy, powinny zostać uwzględnione.

W niniejszym opracowaniu dokonano więc analizy drgań układu mechatronicznego w postaci belki wspornikowej oraz przetwornika piezoelektrycznego z uwzględnieniem właściwości warstwy łączącej te elementy, wykorzystując przy tym równania opisujące ruch układu, uwzględniające również właściwości elektryczne przetwornika piezoelektrycznego.

2. ANALIZA UKŁADU

Analizowanym układem drgającym jest układ mechatroniczny tworzony przez belkę wspornikową o stałej powierzchni przekroju poprzecznego, długości l i module sprężystości wzdłużnej E oraz przytwierdzonego do jej powierzchni przetwornika piezoelektrycznego o długości l_p i grubości h_p . Przetwornik piezoelektryczny przymocowany jest do powierzchni belki za pośrednictwem warstwy łączącej o skończonej grubości h_k i module sprężystości poprzecznej G , jednorodnej na całej długości przetwornika. Układ ten obciążony jest siłą harmonicznie zmienną, działającą w kierunku prostopadłym do osi belki i przyłożoną na jej swobodnym końcu. Drgająca belka wspornikowa oddziałuje na przetwornik piezoelektryczny za pośrednictwem ścinanej warstwy łączącej, który w wyniku odkształcenia generuje ładunek elektryczny. Postać analizowanego układu mechatronicznego przedstawiono na rys.1.



Rys.1. Postać analizowanego układu

Dynamiczne równanie ruchu belki z uwzględnieniem wpływu warstwy kleju wyznaczono, wykorzystując warunek równowagi dynamicznej sił działających na elementarny odcinek belki o długości dx , zgodnie z zasadą d'Alemberta, przy założeniu jednoosiowego, jednorodnego stanu odkształcenia przetwornika piezoelektrycznego oraz ścinania w warstwie kleju [2]. Dynamiczne równanie ruchu belki opisane jest zależnością:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \frac{E_b J_b}{\rho_b h_b b} \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} - \frac{1}{\rho_b h_b b} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{G b h_b}{2 h_k} \left(-\frac{h_b}{2} \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + u(x,t) \right) [H(x-x_1) - H(x-x_2)] \right] - \frac{1}{\rho_b h_b b l} f(t) = 0, \quad (1)$$

gdzie G i E oznaczają odpowiednio moduł Kirchhoffa ścinanej warstwy kleju oraz moduł Younga belki, J_b moment bezwładności przekroju poprzecznego belki, zaś ρ_b gęstość materiału, z którego wykonana jest belka. Funkcja Heaviside'a oznaczona $H(x)$ wprowadzona została w celu ograniczenia oddziaływania przetwornika piezoelektrycznego na układ do przedziału (x_1, x_2) . Korzystając z własności funkcji Heaviside'a, można zapisać:

$$\frac{\partial H(x)}{\partial x} = \delta(x), \quad (2)$$

gdzie $\delta(x)$ oznacza funkcję Diraca, której model wyrażony jest w postaci granicy ciągu:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}. \quad (3)$$

Dynamiczne równanie ruchu przetwornika piezoelektrycznego połączonego z belką za pośrednictwem warstwy kleju opisane jest zależnością:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{h_k}{d_{31} \cdot l_p} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}(l_p, t), \quad (4)$$

gdzie d_{31} jest stałą piezoelektryczną przetwornika, E_p oznacza wartość modułu Younga przetwornika, zaś C_p stanowi całkowitą pojemność elektryczną przetwornika piezoelektrycznego. Funkcja $v(l_p, t)$ stanowi funkcję opisującą rzeczywiste przemieszczenie przetwornika piezoelektrycznego, odpowiadające przemieszczeniu powierzchni belki z uwzględnieniem różnicy wynikającej z właściwości ścinanej warstwy łączącej.

Przyjmując oznaczenia:

$$a = \sqrt{\frac{E_b J_b}{\rho_b h_b b}}, \quad (5)$$

$$c = \frac{G b h_b}{\rho_b h_b b 2 h_k}, \quad (6)$$

$$d = \frac{1}{\rho_b h_b b l}, \quad (7)$$

$$D = [H(x - x_1) - H(x - x_2)], \quad (8)$$

$$\frac{\partial D}{\partial x} = [\delta(x - x_1) - \delta(x - x_2)], \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{h_k}{d_{31} \cdot l_p}, \quad (10)$$

można zapisać układ równań ruchu analizowanego układu mechatronicznego w postaci:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -a^2 \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(-\frac{h_b}{2} \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + u(x, t) \right) \cdot D \right] + df(t) \\ \frac{dU}{dt} = \alpha \cdot \frac{\partial v}{\partial t}(l_p, t) \end{cases} \quad (11)$$

Obciążenie układu siłą harmonicznie zmienną powoduje, że również napięcie generowane przez przetwornik piezoelektryczny, w wyniku odkształcenia belki, ma charakter harmonicznie zmienny i może zostać opisane zależnością:

$$U(t) = B \cos(\omega t). \quad (12)$$

Na podstawie wykorzystanej metody Galerkiina rozwiązanie poszukiwane jest w postaci sumy funkcji własnych układu, odpowiadających zmiennym przemieszczenia oraz czasu, które są ściśle przyjęte i spełniają założone warunki brzegowe w postaci:

$$y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad (13)$$

Zakłada się więc, że przemieszczenie belki opisuje zależność:

$$y(x, t) = A \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[(2n-1) \frac{\pi x}{2l}\right] \cdot \cos(\omega t), \quad (14)$$

natomiast odkształcenie przetwornika piezoelektrycznego:

$$u(x, t) = \frac{d_{31}}{h_p} \cdot x \cdot U(t) = \frac{d_{31}}{h_p} \cdot x \cdot B \cdot \sin(\omega t). \quad (15)$$

W celu wyznaczenia charakterystyki dynamicznej analizowanego układu konieczne jest wyznaczenie odpowiednich pochodnych równań (14), (15) i (12) oraz podstawienie ich do układu równań (11). Po podstawieniu wyznaczonych pochodnych oraz przyjęciu, że podatność dynamiczna wyznaczona zostanie w miejscu obciążenia układu ($x = l$), uproszczony układ równań dynamicznych, opisujących ruch układu mechatronicznego przyjmuje postać:

$$\begin{cases} A \cos(\alpha t) \left[-\omega^2 + a^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 - cD \frac{h_b}{2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 + c \frac{h_b}{2} \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \frac{\partial D}{\partial x} \right] + B \cos(\alpha t) \left[-cD \cdot \frac{d_{31}}{h_p} - c \frac{\partial D}{\partial x} \cdot \frac{d_{31}}{h_p} \cdot x \right] = dF_0 \cos(\alpha t) \\ A \sin(\alpha t) \left[\alpha h_b \omega \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2l} \cdot l_p \right) \right] + B \sin(\alpha t) \left[-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega \right] = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Wykorzystując twierdzenie Eulera oraz traktując wszystkie elementy układu równań (16) jako wielkości rzeczywiste, układ równań dynamicznych ruchu układu mechatronicznego można przekształcić do postaci:

$$\begin{cases} A \cdot e^{i\alpha t} \left[-\omega^2 + a^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 - cD \frac{h_b}{2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 + c \frac{h_b}{2} \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \frac{\partial D}{\partial x} \right] + B \cdot e^{i\alpha t} \left[-cD \cdot \frac{d_{31}}{h_p} - c \frac{\partial D}{\partial x} \cdot \frac{d_{31}}{h_p} \cdot x \right] = dF_0 \cdot e^{i\alpha t} \\ A \cdot e^{i\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)} \left[\alpha h_b \omega \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2l} \cdot l_p \right) \right] + B \cdot e^{i\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)} \left[-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega \right] = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Stosując zależność:

$$e^{i\alpha t - \frac{\pi}{2}} = \frac{e^{i\omega t}}{e^{\frac{i\pi}{2}}}, \quad (18)$$

oraz dzieląc przez wartość $e^{i\omega t}$, otrzymano układ równań opisujących ruch analizowanego układu, w którym wyeliminowano funkcję czasu w postaci:

$$\begin{cases} A \left[-\omega^2 + a^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 - cD \frac{h_b}{2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 + c \frac{h_b}{2} \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \frac{\partial D}{\partial x} \right] + B \left[-cD \cdot \frac{d_{31}}{h_p} - c \frac{\partial D}{\partial x} \cdot \frac{d_{31}}{h_p} \cdot x \right] = dF_0 \\ A \cdot \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \left[\alpha h_b \omega \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2l} \cdot l_p \right) \right] + B \cdot \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \left[-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega \right] = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Dokonane przekształcenia pozwalają zapisać dynamiczne równania ruchu układu w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \left[-\omega^2 + a^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 - cD \frac{h_b}{2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 + c \frac{h_b}{2} \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \frac{\partial D}{\partial x} \right] & \left[-cD \cdot \frac{d_{31}}{h_p} - c \frac{\partial D}{\partial x} \cdot \frac{d_{31}}{h_p} \cdot x \right] \\ \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[\alpha h_b \omega \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2l} \cdot l_p \right) \right] & \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega \right] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dF_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Amplitudę drgań układu A wyznaczono, wykorzystując zależność:

$$A = \frac{|W_A|}{|W|}, \quad (21)$$

gdzie W oznacza wyznacznik głównej macierzy:

$$\begin{bmatrix} \left[-\omega^2 + a^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 - cD \frac{h_b}{2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 + c \frac{h_b}{2} \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \frac{\partial D}{\partial x} \right] & \left[-cD \cdot \frac{d_{31}}{h_p} - c \frac{\partial D}{\partial x} \cdot \frac{d_{31}}{h_p} \cdot x \right] \\ \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[\alpha h_b \omega \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2l} \cdot l_p \right) \right] & \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega \right] \end{bmatrix}, \quad (22)$$

natomiast W_A wyznacznik macierzy pomocniczej wyznaczonej poprzez zastąpienie pierwszej kolumny kolumną wyrazów wolnych:

$$\begin{bmatrix} \left[-\omega^2 + a^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 - cD \frac{h_b}{2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 + c \frac{h_b}{2} \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \frac{\partial D}{\partial x} \right] & dF_0 \\ \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[\alpha h_b \omega \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2l} \cdot l_p \right) \right] & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Amplituda drgań analizowanego układu mechatronicznego przyjmuje więc postać:

$$A = \frac{dF_0 \cdot \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega \right]}{\frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[-\omega^2 + a^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 - cD \frac{h_b}{2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 + c \frac{h_b}{2} \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \frac{\partial D}{\partial x} \right] \cdot \left[-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega \right] - \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[-cD \cdot \frac{d_{31}}{h_p} - c \frac{\partial D}{\partial x} \cdot \frac{d_{31}}{h_p} \cdot x \right] \cdot \left[\alpha h_b \omega \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2l} \cdot l_p \right) \right]} \quad (24)$$

Po podstawieniu otrzymanej amplitudy drgań układu do zależności opisującej przemieszczenie belki (12) otrzymano:

$$y(x,t) = \frac{dF_0 \cdot \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega \right] \cdot \cos(\alpha t)}{\frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[-\omega^2 + a^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 - cD \frac{h_b}{2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 + c \frac{h_b}{2} \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \frac{\partial D}{\partial x} \right] \cdot \left[-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega \right] - \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[-cD \cdot \frac{d_{31}}{h_p} - c \frac{\partial D}{\partial x} \cdot \frac{d_{31}}{h_p} \cdot x \right] \cdot \left[\alpha h_b \omega \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2l} \cdot l_p \right) \right]} \quad (25)$$

Podatność dynamiczną Y , zgodnie z definicją, wyznaczono z zależności [4]:

$$Y = \frac{dF_0 \cdot \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega \right] \cdot \cos(\alpha t)}{\frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[-\omega^2 + a^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 - cD \frac{h_b}{2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 + c \frac{h_b}{2} \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \frac{\partial D}{\partial x} \right] \cdot \left[-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega \right] - \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[-cD \cdot \frac{d_{31}}{h_p} - c \frac{\partial D}{\partial x} \cdot \frac{d_{31}}{h_p} \cdot x \right] \cdot \left[\alpha h_b \omega \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2l} \cdot l_p \right) \right]} = Y \cdot F_0 \cos(\alpha t) \quad (26)$$

Upraszczając równanie (26), podatność dynamiczną układu mechatronicznego można zapisać w postaci:

$$Y = \frac{d \cdot \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega \right]}{\frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[-\omega^2 + a^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 - cD \frac{h_b}{2} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 + c \frac{h_b}{2} \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \frac{\partial D}{\partial x} \right] \cdot \left[-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega \right] - \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} \cdot \left[-cD \cdot \frac{d_{31}}{h_p} - c \frac{\partial D}{\partial x} \cdot \frac{d_{31}}{h_p} \cdot x \right] \cdot \left[\alpha h_b \omega \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2l} \cdot l_p \right) \right]} \quad (27)$$

W celu wyeliminowania liczb zespolonych wykorzystano zależności matematyczne:

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i = i, \quad (28)$$

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi}{2}}} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{-i \cdot i} = \frac{-i}{-(i)^2} = \frac{-i}{-(-1)} = -i. \quad (29)$$

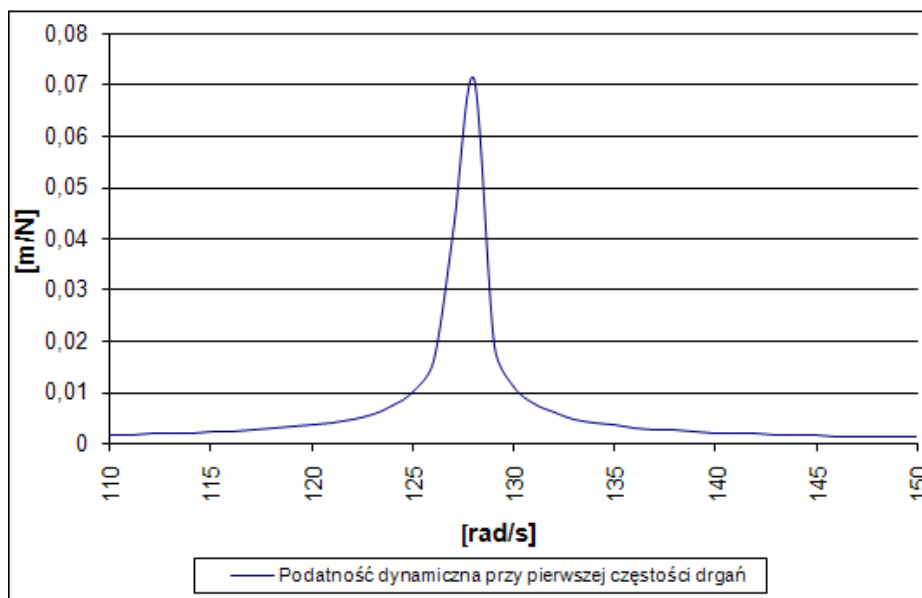
oraz wyznaczając moduł liczb zespolonych stanowiących licznik i mianownik równania, uzyskano ostateczną zależność opisującą podatność dynamiczną analizowanego układu mechatronicznego z uwzględnieniem ścinania warstwy kleju, w miejscu obciążenia układu, przy pierwszej częstotliwości drgań, którą można zapisać w postaci:

$$Y = \frac{\sqrt{\left[-d \cdot \left(-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega\right)\right]^2}}{\sqrt{\left[-\left(-\omega^2 + a^2 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^4 - cD \frac{h_b}{2} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 + c \frac{h_b}{2} \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \frac{\partial D}{\partial x}\right) \cdot \left(-\omega - \alpha \cdot \frac{d_{31}}{h_p} l_p \omega\right) - \left(-cD \cdot \frac{d_{31}}{h_p} - c \frac{\partial D}{\partial x} \cdot \frac{d_{31}}{h_p} \cdot x\right) \cdot \left(dh_b \omega \cdot \frac{\pi}{2l} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2l} \cdot l_p\right)\right)\right]^2}} \quad (30)$$

Graficzne rozwiązanie równania podatności dynamicznej układu mechatronicznego z uwzględnieniem ścinania warstwy kleju przy pierwszej częstotliwości drgań, w miejscu obciążenia układu ($x = l$) wyznaczono dla wartości parametrów geometrycznych oraz materiałowych układu przedstawionych w tabeli 1, a jego przebieg przedstawiono na rys. 2.

Tabela 1. Parametry geometryczne i materiałowe analizowanego układu

Parametry geometryczne		Parametry materiałowe	
l	0,24 [m]	ρ_b	7850 [kgm ⁻³]
b	0,04 [m]	E_b	210000 [MPa]
h_b	0,002 [m]	E_p	86000 [MPa]
h_p	0,002 [m]	d_{31}	-60*10 ⁻¹² [CN ⁻¹]
h_k	0,0001 [m]	e_{31}	-1,9 [Cm ⁻²]
x_1	0,01 [m]	G	1000 [MPa]
x_2	0,06 [m]		



Rys.2. Przebieg podatności dynamicznej układu przy pierwszej częstotliwości drgań

Przeprowadzona analiza drgań układu mechatronicznego z uwzględnieniem ścinania warstwy łączącej przetwornik piezoelektryczny z belką umożliwia uwzględnienie jej wpływu na przebieg charakterystyk dynamicznych układu. Wykazano tym samym, iż pomijanie wpływu parametrów zarówno geometrycznych, jak i materiałowych, a także oddziaływania na układ warstwy pośredniczącej, w analizie drgań układów mechatronicznych tworzonych

przez elementy łączone warstwą kleju, wpływa niekorzystnie na dokładność uzyskanych wyników. Uwzględnienie parametrów geometrycznych i materiałowych nie tylko samych elementów tworzących układ, ale również warstwy pośredniczącej pomiędzy nimi i łączącej je, w znacznym stopniu wpływa na dokładność analizy projektowanych układów, a tym samym umożliwia, poprzez odpowiedni dobór parametrów warstwy pośredniczącej, projektowanie układów o wymaganej charakterystyce dynamicznej z jeszcze większą dokładnością.

LITERATURA

1. Kurnik W.: Damping of mechanical vibrations utilising shunted piezoelements. "Machine Dynamics Problems" 2004, Vol. 28, No 4, p. 15 – 26.
2. Osiński Z.: Tłumienie drgań. Warszawa: PWN, 1997.
3. Pietrzakowski M.: Wpływ właściwości połączenia elementów piezoelektrycznych na skuteczność aktywnego tłumienia drgań. Kraków – Krynica, 2001, s. 233 – 240.
4. Bishop R. E. D., Gladwell G. M. L., Michaelson S.: Macierzowa analiza drgań. Warszawa: WNT, 1972

VIBRATION OF MECHATRONIC SYSTEM INCLUDING PURE SHEAR OF CONNECTION LAYER

Summary. The paper presents analysis of flexural vibrating mechatronic system. Considered system is compounded of cantilever bending beam and a strip-like piezoelectric transducer. The transducer is bonded on the beam surface by connection layer which has homogeneous properties on all its length. This mechatronic system is loaded with harmoniousness variable force operates perpendicular to the beam's axis on the end of the beam. Beam's vibrations affect piezoelectric transducer through the agency of connection layer which generates electric charge and produces additional stiffness.

Dynamic equations of considered mechatronic system were assigned on the basis of elementary beam's and transducer's section dynamic equilibrium. Transducer's dynamic equation was assigned using transducer's piezoelectric properties.

Dynamic characteristic of considered mechatronic system, including pure shear of the connection layer was assigned on the basis of approximate Galerkin's method and illustrated on the chart with giving consideration to beam's and transducer's geometrical and material parameters.